Analiz Final Sınavı (Math 212)
Bahar 2005
Ali Nesin

1. Gerçel sayılardan oluşan öyle bir $(a_n)_n$ dizisi bulun ki herhangi bir gerçel sayı bu dizilerin altdizilerinden birinin limiti olsun.

Gerçel sayılardan oluşmuş bir $(a_n)_n$ dizisi için,

$$\limsup a_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{a_m : m > n\}$$

tanımını anımsayın. (Burada $\sup\{a_m : m > n\}$, ∞ olabilir ve bu durumda $\lim_{n\to\infty} \infty$, ∞ olarak tanımlanır.). $\limsup a_n$'nin bir gerçel sayı , ∞ ya da $-\infty$ olabileceğini not ediniz.

2a. $\limsup a_n = \infty$ ancak ve ancak $(a_n)_n$ sınırlı olduğunu gösteriniz.
2b. $\limsup a_n = -\infty$ ancak ve ancak $\lim a_n = -\infty$ olduğunu gösteriniz.

Bir önceki yakınsaklık tanımını genişleterek, $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ise $(a_n)_n$'nin ∞'a yakınsadığını söyleyeceğiz. Aynı şekilde $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ ise, $(a_n)_n$ dizisi $-\infty$'a yakınsar diyeceğiz.

3. $\limsup a_n$'nin, $(a_n)_n$ yakınsak altdizilerinin limitlerinden oluşan kümenin supremumu olduğunu gösteriniz.

4. $\Sigma_n\, a_n x^n$ kuvvet serisi olsun. $R = 1/\limsup |a_n|^{1/n}$ olsun. $\Sigma_n\, a_n x^n$'nin $|x| < R$ için mutlak yakınsadığını ve $|x| > R$ için ıraksadığını gösteriniz. (R'ye $\Sigma_n\, a_n x^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapı denir).

5. $0 \le S < R$ olsun. $\Sigma_n\, a_n x^n$ serisinin $\{x : |x| \le S\}$ kümesi üzerinde düzgün yakınsadığını gösterin.

6. $\Sigma_{n\ge 0}\, a_n x^n$ and $\Sigma_{n>0}\, n a_n x^{n-1}$ kuvvet serilerinin yakınsaklık yarıçaplarının aynı olduğunu gösterin.

7. $\Sigma_n\, a_n x^n$ bir kuvvet serisi ve R de bu kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı olsun. $|x| < R$ eşitsizliğini sağlayan herhangi bir x üzerinde $\Sigma_n\, a_n x^n$ kuvvet serisinin türevlenebilir olduğunu gösterin.