Math 151
Şubat 2005
Ali Nesin

Part I.

1. Her $x, a \in \mathbb{R}^{>0}$ ve $n \in \mathbb{N}^{>0}$ için şunu kanıtlayınız : $x > a$ ancak ve ancak $x^n > a^n$. Eğer $x^n = a^n$ ise o zaman $x = a$ olduğu sonucunu çıkarınız. (5 puan)

2. $a \geq 0$ ve $a \geq b$ iki gerçel sayı olsun. n bir doğal sayı ise şu eşitsizliği kanıtlayınız.

$$(a - b)^n \geq a^n - na^{n-1}b \qquad \text{(5 puan)}$$

3. $a, x > 0$ iki gerçel sayı ve n pozitif bir doğal sayı olsun. $x^n < a$ olsun. Bir $\delta > 0$ real sayısı için $(x + \delta)^n \leq a$ olduğunu kanıtlayın. (10 puan)

4. $a, x > 0$ iki reel sayı ve n pozitif bir doğal sayı olsun. Varsayalım ki $a < x^n$. Bir $\delta > 0$ real sayısı için $a < (x - \delta)^n$ olduğunu kanıtlayın. (10 puan)

Part II. $a \geq 1$ bir reel sayı olsun.

5. Bir n pozitif tamsayısı için, $\{x \in \mathbb{R} : x^n \leq a\}$ kümesinin üstten sınırlı olduğunu gösteriniz. (3 puan)

$a^{(1,\,n)}$ tanımını şu şekilde yapalım:

$$a^{(1,\,n)} := \sup\{x \in \mathbb{R} : x^n \leq a\}.$$

Aslında $a^{(1,\,n)}$, $a^{1/n}$ anlamına geliyor (bkz: Problem 8). Daha sonradan notasyonumuzu standart notasyona çevireceğiz (bkz: Problem 11)

6. $a^{(1,1)} = a$ eşitliğini kanıtlayın. (2 puan)

7. $(a^n)^{(1,\,n)} = a$ eşitliğini kanıtlayın. (5 puan)

8. $(a^{(1,\,n)})^n = a$ eşitliğini kanıtlayın. (10 puan)

9. $(a^{(1,\,n)})^m = (a^m)^{(1,\,n)}$ eşitliğini kanıtlayın. (10 puan)

10. Eğer $n/m = p/q$ ise o zaman $(a^n)^{(1,\,m)} = (a^p)^{(1,\,q)}$ eşitliğini kanıtlayın. (10 puan)

11. Şu sonucu çıkarınız : Bir pozitif n/m kesirli sayısı için ($n, m > 0$ olacak biçimde), $a^{n/m}$ ifadesini $(a^n)^{(1,\,m)}$ şeklinde tanımlamayabiliriz. $n/m = k \in \mathbb{N}$ olduğunda $a^{n/m} = a^k$ olduğunu gösterin. (5 puan)

12. p ve q pozitif rasyonel sayıları için, $a^{pq} = (a^p)^q$ eşitliğini kanıtlayın. (10 puan)

13. Bir p pozitif rasyonel sayısı ve $a, b \geq 1$, sayıları için $(ab)^p = a^p b^p$ eşitliğini kanıtlayın. (5 puan)

14. p ve q pozitif kesirli sayıları için, $a^{p+q} = a^p a^q$ eşitliğini kanıtlayınız. (5 puan)

Part III. $a \geq 1$ bir reel sayı olsun.

15. Bir r pozitif gerçel sayısı için, $\{a^q : 0 < q \leq r \text{ ve } q \in \mathbb{Q}\}$ kümesinin üstten sınırlı olduğunu gösteriniz. Şu tanımı yapalım:

$$a^{(r)} = \sup\{a^q \in \mathbb{R} : q \leq r\}$$

16. Herhangi bir p pozitif kesirli sayısı için, $a^{(p)} = a^p$ eşitliğini kanıtlayın. Bundan sonra, $a^{(r)}$ ‘yi a^r şeklinde göstereceğiz.

17. s ve r pozitif gerçel sayıları için, $a^{r+s} = a^r a^s$ ve $a^{rs} = (a^r)^s$ eşitliklerini kanıtlayın.

18. Her $a, b \geq 1$ reel sayıları ve p pozitif rasyonel sayısı için, $(ab)^p = a^p b^p$ eşitliğini kanıtlayın.