

## Math 152 Arasınay Soruları

Ali Nesin  
Mart 2005

1. Süreklilik tanımını kullanarak  $f(x) = \frac{x+4}{x^2-1}$  fonksiyonunun tanımlı olduğu bölgede sürekli olduğunu gösterin.
2.  $X$  metrik uzayından iki reel değerli, sürekli  $f$  ve  $g$  fonksiyonları verilsin.  $\max\{f(x), g(x)\}$  ın da sürekli olduğunu gösterin.

$X$  bir küme,  $Y$  bir metrik uzay,  $(f_n)_n$   $X$  den  $Y$  ye tanımlanmış bir fonksiyon dizisi ve  $f: X \rightarrow Y$  bir fonksiyon olsun. Eğer, her  $\varepsilon > 0$  ve  $n > N$  iken tüm  $x \in X$  için  $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$  olacak şekilde bir  $N$  varsa,  $(f_n)_n$  dizisi  $f: X \rightarrow Y$  fonksiyonuna **düzgün yakınsar**, denir.  $X$  den  $Y$  ye tanımlanan bir  $(f_n)_n$  fonksiyon dizisi, eğer her  $x \in X$  ve her  $\varepsilon > 0$  için  $n > N$  iken  $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$  koşulunu sağlayan bir  $N$  varsa  $(f_n)_n$  dizisi  $f: X \rightarrow Y$  fonksiyonuna **noktasal yakınsar** denir.

- 3a. Düzgün yakınsaklığın noktasal yakınsaklığı gerektirdiğini ispatlayın.
- 3b.  $X = [0, 1]$ ,  $Y = \mathbb{R}$  ve  $f_n(x) = x^n$  olsun.  $(f_n)_n$  dizisinin noktasal yakınsadığını ama düzgün yakınsamadığını gösterin.
- 3c.  $X = [0, a]$  ( $0 \leq a < 1$ ),  $Y = \mathbb{R}$  ve  $f_n(x) = x^n$  olsun.  $(f_n)_n$  dizisinin düzgün yakınsak olduğunu gösterin.

4.  $X = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ,  $Y = \mathbb{R}$  ve  $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$  olsun.

4a.  $A = \{x \in \mathbb{R} : (f_n(x))_n \text{ yakınsar}\}$  kümesini bulun.

$x \in A$  için,  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  olsun.

4b.  $f$  nedir?

4c.  $A$ 'yı içeren (açık veya kapalı) aralıklarda  $(f_n)_n$  fonksiyon dizisinin düzgün yakınsaklığı hakkında ne söylebiliriz?

5.  $X = [0, 1]$ ,  $Y = \mathbb{R}$  ve  $n > 1$  için  $f_n(x) = \frac{nx}{x+n}$  olsun.  $(f_n)_n$  dizisinin bir fonksiyona düzgün yakınsadığını gösterin.

6.  $X$  bir küme ve  $Y$  bir metrik uzay olsun.  $X$ 'ten  $Y$ 'ye tanımlanan sınırlı fonksiyonların kümesini  $B$  ile gösterelim, yani  $B = \{f: X \rightarrow Y : f(X) \text{ sınırlı}\}$  olsun.  $B$  üzerinde öyle bir metrik bulun ki  $B$ 'deki düzgün yakınsaklık aynen  $Y$  deki metriğe karşılık gelsin.

7.  $X$  bir küme ve  $Y$  bir metrik uzay olsun.  $(f_n)_n$  dizisi bir  $f$  fonksiyonuna düzgün yakınsak olsun. Her  $f_n$ 'nin bir  $a \in X$  için,  $a$ 'da sürekli olduğunu varsayalım.  $f$  fonksiyonu da  $a$ 'da sürekli dir, gösterin.