

**Math 111**  
**Final Exam**

Ali Nesin  
5-June-1998

1. (5 pts.)  $\mathbb{R}$  'nin tümleyeni sonlu olan bütün altkümelerinin kesişimi nedir.

2.  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bir kümeler dizisi olsun.

$$\liminf X_n = \{x : \text{öyle bir } N \text{ vardır ki } x \in X_n \text{ her } n > N\}$$

$$\limsup X_n = \{x : x \in X_n \text{ sonsuz tane } n \text{ için}\}$$

olarak tanımlansın.

2a. (1 pts.)  $\liminf X_n \subseteq \limsup X_n$  olduğunu gösterin.

2b. (2 pts.) Her  $n$  doğal sayısı için,  $\liminf X_n$  ve  $\limsup X_n$  kümelerinin  $X_0, X_1, \dots, X_{n-1}$  kümelerinden bağımsız olduğunu kanıtlayın.

2c. (4 pts.) Eğer  $X_n \subseteq Y_n$  ilişkisi sonlu tanesi hariç tüm  $n$  göstergeçleri için doğruysa  $\liminf X_n \subseteq \liminf Y_n$  ve  $\limsup X_n \subseteq \limsup Y_n$  olduğunu gösterin.

2d. (8 pts.) Doğruluğunu kanıtlayın ya da karşıörnek bulun.

$$\limsup (X_n \cup Y_n) = \limsup Y_n \cup \limsup X_n$$

$$\limsup (X_n \cap Y_n) = \limsup Y_n \cap \limsup X_n$$

$$\liminf (X_n \cap Y_n) = \liminf Y_n \cap \liminf X_n.$$

$$\liminf (X_n \cup Y_n) = \liminf Y_n \cup \liminf X_n.$$

2e. (4 pts.)

$$\limsup X_n = \bigcup_n \left( \bigcap_{i=n}^{\infty} X_i \right)$$

ve

$$\liminf X_n = \bigcap_n \left( \bigcup_{i=n}^{\infty} X_i \right)$$

olduğunu gösterin.

2f. (2 pts.)  $X^c$ ,  $X$  kümesinin bütün  $X_n$  kümelerini içeren bir kümedeki tümleyeni simgelesin.  $\liminf X_n^c = (\limsup X_n)^c$  olduğunu gösteriniz.

2g. (4 pts.)  $\lim X_n = X$  eşitliği ancak ve ancak  $\liminf X_n = X = \limsup X_n$  koşulu ile tanımlansın. Eğer  $X_n$  kümeleri azalıyor ise (yani  $X_{n+1} \subseteq X_n$  her  $n$  için) ya da artan ise (yani  $X_n \subseteq X_{n+1}$  her  $n$  için)  $\lim X_n$  'nin varlığını gösteriniz.

2h. Aşağıdaki dizilerin (varsa)  $\limsup$ ,  $\liminf$  ve  $\lim$  lerini bulunuz.:

i) (2 pts.)  $X_n = \{z \in \mathbb{N} : n < z \leq 2n\}$ .

ii) (2 pts.)  $X_n = \begin{cases} [0, n] & n \text{ çift ise} \\ [-1/n, 0] & n \text{ tek ise} \end{cases}$  (buradaki aralıklar reeldir).

3. (6 pts.)  $\{\alpha \in \text{Sym}(8) : \alpha^6 = \text{Id}\}$  kümesi  $\text{Sym}(8)$  'in bir altgrubu mudur?

4. (12 pts.)  $\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x + y \text{ çifttir}\}$  kümesini  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  'nin bir altgrubu olduğunu ve  $(1, 1), (1, -1)$  elemanlarını içeren en küçük altgrup olduğunu gösteriniz.