Math 131 Kümeler Kuramı
MT 3
Ali Nesin

C terimleri $\mathbb{Q}$ da olan Cauchy dizilerinin kümesi olsun. C (noktasal) toplama ve çarpma altında kapalı olduğunu biliyoruz. C'nin herhangi iki $x = (x_n)_n$ ve $y = (y_n)_n$ elemanı iiçin,

$x \equiv y$ ancak ve ancak $\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0$ olsun.

1. Bu ilişkinin C zerine bir denklik ilişkisi olduğunu gösterin.

$\mathbb{R} = C/\!\equiv$ tanımını yapalım.

2. Her $x, y, x', y' \in C$ için eğer $x \equiv x'$ ve $y \equiv y'$ ise, o zaman $x + y \equiv x' + y'$ ve $xy = x'y'$ olduğunu gösterin.

3. $\mathbb{R}$ üzerinde, $[x] + [y] = [x + y]$ ve $[x][y] = [xy]$ formüllerinin anlamlı olduğunu gösterin.

$q \in \mathbb{Q}$ için, $s(q)$ bütün terimleri q sayısına eşit olan sabit dizi olsun. $i : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu $i(q) = [s(q)]$ olarak tanımlayın.

4. i fonksiyonunun her $q, q' \in \mathbb{Q}$ için, $i(q + q') = i(q) + i(q')$ ve $i(qq') = i(q)\, i(q')$ özelliklerini sağlayan birebir bir fonksiyon olduğunu gösterin.

$x = (x_n)_n \in C$ için, "$0 < x$" tekli ilişkisini "$0 < x$ ancak ve ancak öyle bir $\delta > 0$ kesirli sayı ve N doğal sayısı vardır öyle ki bütün $n > N$ için, $x_n > \delta$ olur"

5. Her $x, x' \in C$ için eğer $0 < x$ ve $x \equiv x'$ ise o zaman $0 < x'$olduğunu gösterin.

6. $x = (x_n)_n \in C$ için, "$0 < x$" koşuluyla tanımlanan $0 < [x]$ ilişkisinin iyi tanımlı olduğunu gösterin.

$P = \{\alpha \in \mathbb{R} : 0 < \alpha\}$olsun.

7. $i(0) \notin P$ olduğunu gösterin. $i(\mathbb{Q}^{>0}) \subseteq P$ olduğunu gösterin.

8. $P + P \subseteq P$, $PP \subseteq P$, $P \cap -P = \emptyset$, $\mathbb{R} = P \cup \{0\} \cup -P$ ilişkilerini gösterin.

9. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için "$\alpha < \beta$ ancak ve ancak $\beta - \alpha \in P$" ilişkisinin $\mathbb{R}$ üzerinde pozitif elemanlar tarafından toplamaya ve çarpmaya saygı duyan bir sıralama tanımladığını gösterin.