MATH 111 (Kümeler Teorisi)
İkinci ara sınav
Ali Nesin – Özlem Beyarslan
Ocak 2000

1. $a \in \mathbb{Q}$ sabit bir rasyonel sayı ve f ve g, $\mathbb{Q}$'dan $\mathbb{Q}$'ya giden herhangi iki fonksiyon olsun. Eğer tüm $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ için $f(x) = g(x)$ eşitliğini sağlayan pozitif bir ε rasyonel sayısı varsa f ve g, a civarında **aynı öze sahiptir** denir ve bu $f \equiv_a g$ sembolizmiyle gösterilir.

1a. Tanımlanan bu $\equiv_a$ ilişkisinin $\mathbb{Q}$'dan $\mathbb{Q}$'ya giden tüm fonksiyonlar kümesi ${}^{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}$ üzerine bir denklik ilişkisi tanımladığını gösterin. Bir $f \in {}^{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}$ fonksiyonunun bu ilişkiye göre denklik sınıfını $[f]$ ile gösterelim.

1b. Eğer $f_1 \equiv_a g_1$ ve $f_2 \equiv_a g_2$ ise $f_1+f_2 \equiv g_1+g_2$ ve $f_1f_2 \equiv_a g_1g_2$ olduğunu gösterin. Bu tanımlarla ${}^{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}/\equiv_a$ kümesi üzerinde toplama ve çarpma işlemleri tanımlayabiliriz.

1c. Bir $r \in \mathbb{Q}$ için $c_r : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ fonksiyonunu tüm $x \in \mathbb{Q}$ için $c_r(x) = r$ olarak tanımlayalım, yani c_r fonksiyonu her zaman r değerini alan sabit fonksiyon olsun. Her $r, s \in \mathbb{Q}$ için $c(r) = [c_r]$ olarak tanımlanan $c : \mathbb{Q} \to {}^{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}/\equiv_a$ fonksiyonunun birebir olduğunu ve

$$c(r+s) = c(r) + c(s)$$
$$c(rs) = c(r)c(s)$$

eşitliklerini sağladığını gösterin.

1d. Bir $f \in {}^{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}$ fonksiyonu için aşağıdaki iki koşulun birbirine denk olduğunu gösterin.

(i) Öyle bir $\varepsilon > 0$ var ki tüm $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ için $f(x) \neq 0$ olur.

(ii) $[f][g] = [c_1]$ eşitliğini sağlayan bir $g \in {}^{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}$ vardır.

1e. 1a'dan esinlenerek $\equiv_\infty$ denlik ilişkisini tanımlayınız.

2a. $(a_n)_n$ ve $(b_n)_n$ iki farklı sayıya yakınsayan iki farklı rasyonel sayı dizisi olsun. $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cap \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesinin sonlu olduğunu gösterin.

2b. $(a_n)_n$ ve $(b_n)_n$, $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cap \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi sonsuz olacak şekilde iki Cauchy dizisi olsun. $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$ olduğunu gösterin.

2c. $(a_n)_n$ ve $(b_n)_n$ **,** $\{n \in \mathbb{N} : \text{öyle bir } m \text{ var ki } a_n = b_m\}$ kümesi sonsuz olacak şekilde iki Cauchy dizisi olsun. Doğruluğunu ya da yanlışlığını kanıtlayın : $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$.

3. A ve B kümeleri eleman sayıları sırasıyla n ve m olan iki küme olsun. A'dan B'ye kaç tane birebir fonksiyon vardır?