Direkt Limit

2a. $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bir ayrık kümeler dizisi olsun ve her bir $n < m \in \mathbb{N}$ için, f_{mn}, E_n'den E_m'ye giden bir fonksiyon olsun. f_{nm} fonksiyonunun aşağıdaki özellikleri sağladığını varsayalım:

a) $f_{nn} = \mathrm{Id}_{E_n}$ her n için.

b) $f_{pn} = f_{pm} \circ f_{mn}$ her $p \geq m \geq n$ için.

E, E_n kümelerinin bileşimi olsun. $x, y \in E$ için, $x \approx y$ ancak ve ancak "$x \in E_n$, $y \in E_m$ ve $f_{pn}(x) = f_{pm}(y)$ özelliğini sağlayan n'den büyük p ve m var" olarak tanımlayın.

$\approx$ ilişkisinin E üzerine bir denklik ilişkisi olduğunu gösterin.

2b. "$x \approx y$ ancak ve ancak $s = \max(n, m)$ için, $(f_{pn}(x))_{p>s}$ ve $(f_{pn}(y))_{p>s}$ dizileri yeterince büyük p'ler için çakışırlar" önermesini kanıtlayın.

2c. Şimdi her E_n'nin bir grup olduğunu varsayın ve f_{nm} fonksiyonları grup homomorfizmaları olsunlar. $x \in E$ için, $[x]$, x'in denklik sınıfını belirtsin. (yani $[x] \in E/\approx$).

$x, y \in E$ için, n, m, p sayıları $x \in E_n$, $y \in E_m$, $p > n$ ve $p > m$ özelliklerini sağlayan elemanlar olsunlar ve

$$[x]\,[y] = [f_{pn}(x) f_{pm}(y)]$$

olarak tanımlayın. Bunun iyi tanımlı bir çarpma olduğunu gösterin. Bu sayede $E/\approx$ kümesinin gruba dönüştüğünü gösterin.

3a. p bir asal sayı ve $E_n = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ olsun. $m \geq n$ için, $f_{mn}: E_n \to E_m$ fonksiyonunu

$$f_{mn}(x) = p^{m-n}x$$

olarak tanımlayın. f_{mn} fonksiyonlarının iyi tanımlı olduğunu gösterin. Fonksiyonların 2a sorusundaki hipotezi sağladığını gösterin.