

Math 111

Vize 2

Şubat 1999

Ali Nesin

İpucu: Soruların görünümünden korkmayın.

I. Kombinatorik.

Verilen bir n doğal sayısı için, $n!$ sayısını tümevarımla aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$0! = 1$$

$$(n+1)! = n!(n+1)$$

$0 \leq k \leq n$ doğal sayıları için, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ tanımını yapalım.

I.1. $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ eşitliğini gösterin.

I.2. $\binom{n}{k}$ sayısının bir doğal sayı olduğunu kanıtlayın.

I.3. Bütün n doğal sayıları ve x ve y kesirli sayıları için,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Eşitliğini kanıtlayın.

II. Logaritmik Sabit e

II.1. Üstten sınırlı artan bir dizinin Cauchy dizisi olduğunu gösterin.

II.2. Yeterince büyük n ler için $n! > 2^n$ olduğunu gösterin.

II.3. I.3 ve II.2'den yola çıkarak $a_n = (1+1/n)^n$ dizisinin üstten sınırlı olduğunu gösterin. (Üst sınır: $2 + 19/24$).

II.4. $a_n = (1+1/n)^n$ dizisinin $n > 1$ için artan bir dizi olduğunu gösterin. (**İpucu:** İlk olarak $(x-1)^n \geq x^n - nx^{n-1}$ eşitsizliğinin $x \geq 1$ için doğru olduğunu gösterin. Daha sonra $a_{n-1} \leq a_n$ olduğunu gösterin).

II.5. $a_n = (1+1/n)^n$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu sonucuna varın.

III. Sonluluk

Sonlu olmanın 4 farklı tanımını vereceğiz.

Eğer X kümesiyle bir doğal sayı arasında birebir bir eşleme varsa bu X kümesine **1-sonlu** denir.

Eğer elemanları X kümesinin altkümelerinden oluşan boş olmayan her kümenin (altküme olma ilişkisine göre) maksimal elemanı varsa, X 'e **2-sonlu** denir.

Eğer elemanları X kümesinin altkümelerinden oluşan boş olmayan her kümenin (altküme olma ilişkisine göre) minimal elemanı varsa, X 'e **3-sonlu** denir.

X kümesiyle X 'in özalt kümelerinden herhangi biriyle arasında birebir bir eşleme yoksa X 'e **4-sonlu** denir.

III.1. 2-sonlu olmakla 3-sonlu olmak arasında fark olmadığını gösterin.

III.2. Bir doğal sayının 2-sonlu olduğunu gösterin.

III.3. 1-sonlu kümelerin 2 ve 3-sonlu olduğunu gösterin.

III.4. 2 veya 3-sonlu bir kümenin 4-sonlu olduğunu gösterin.

III.5. Doğal sayılar kümesi \mathbb{N} 'nin hiçbir $i = 1, 2, 3, 4$ için i -sonlu olmadığını gösterin.

III.6. Her doğal sayının $i = 1, 2, 3, 4$ için i -sonlu olduğunu gösterin.