

Sınav

Kümeler Kuramı (Math 111)

Mayıs 5, 1999

Ali Nesin – Özlem Beyarslan

Genel İpucu: Resim çizin.

X kümesi üzerine tanımlanmış $<$ ikili ilişkisi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa X 'e daha doğrusu $(X, <)$ çiftine **iyisirali** küme denir:

- i) Her $x, y, z \in X$ için, eğer $x < y$ ve $y < z$ ise o zaman $x < z$.
 - ii) Her $x \in X$ için, $\neg(x < x)$.
 - iii) Her $x, y \in X$ için, ya $x < y$ ya da $x = y$ ya da $y < x$ doğrudur.
 - iv) X in boş olmayan her altkümesinin bir en küçük elemanı vardır.
- X i iyi sıralayan bir $<$ ikili ilişkisi varsa X 'e **iyisiralanabilir** küme denir.

- I.** $X, <$ ikili ilişkisiyle iyisiralanmış bir küme olsun. $x \in X$ olsun ve $[0, x)$ kümesini X 'in $\{y \in X: y < x\}$ altkümesi olarak tanımlayın. $Y \subset X$ olsun. Şu iki koşulun eşdeğer olduğunu kanıtlayın:
 - a) Bir $x \in X$ için $Y = [0, x)$.
 - b) Her $a \in Y$ için, eğer $b < a$ ise o zaman $b \in Y$.
- II.** X iyi sıralanabilir bir küme olsun. Y, X 'in herhangi bir altkümesi olsun. Y 'nin de iyisiralanabilir olduğunu gösterin.
- III.** X iyisiralanabilir bir küme olsun. Y herhangi bir küme olsun. Eğer Y 'den X 'e giden birebir bir fonksiyon varsa Y 'nin de iyisiralanabilir olduğunu gösterin.
- IV.** İyisiralanmış bir kümenin boş olmayan herhangi bir altkümesinin en büyük elemanı olduğu doğru mudur?
- V.** $X, <$ ilişkisiyle iyisiralanmış bir küme olsun. $y \notin X$ ve $Y = X \cup \{y\}$ olsun. Y üzerine $<'$ ikili ilişkisini aşağıdaki şekilde tanımlayın:
$$a <' b \text{ ancak ve ancak } a \in X \wedge ((b \in X \wedge a < b) \vee b = y).$$
 - Va.** $<'$ ilişkisinin Y 'yi iyisiraladığını gösterin.
 - Vb.** Y 'nin en büyük elemanı olduğunu gösterin.
- VI.** $<$ ikili ilişkisi X 'i iyi sıralasın. $\pi: X \rightarrow X$ **sıralamayı-koruyan** bir fonksiyon olsun, yani her $x, y \in X$ için, $x < y$ ancak ve ancak $\pi(x) < \pi(y)$ özelliğini sağlasın. Her $x \in X$ için, $x \leq \pi(x)$ olduğunu gösterin. (yani ya $x < \pi(x)$ ya da $x = \pi(x)$ olmalıdır.).
- VII.** Sıralamayı koruyan bir fonksiyon birebir olmak zorunda mıdır?
- VIII.** $<$ ikili ilişkisi X 'i iyisiralasın ve $x \in X$ olsun. $Z = [0, x)$ olsun. X 'ten Z 'ye giden ve sıralamayı koruyan bir fonksiyon olmadığını gösterin.
- IX.** $<$ ikili ilişkisi X 'i iyi sıralasın. $\varphi(x)$ bir formül olsun. Her $x \in X$ için, eğer her $y < x$ için $\varphi(y)$ doğruysa, o zaman $\varphi(x)$ önermesinin de doğru olduğunu varsayın. Her $x \in X$ için, $\varphi(x)$ olduğunu gösterin.