

# Ordinal Aritmetiği

Yaz Vizesi III  
18 Haziran, 1999  
Ali Nesin

$\alpha$  ve  $\beta$  iki ordinal olsun.  $\alpha$ 'nın sonuna  $\beta$ 'nin elemanlarını koyarak  $(\alpha \times \{0\}) \cup (\beta \times \{1\})$  kümesini iyisıralayın. Her kümede olduğu gibi, bu yeni iyisıralı küme bir ve tek ordinale izomorftur bu ordinale  $\alpha + \beta$  diyeceğiz.

Aşağıda  $\alpha, \beta, \gamma$  rastgele ordinaler olarak seçilmiştir.

1.  $0 + \alpha = \alpha + 0 = \alpha$  ve  $\alpha + 1 = \alpha^+$  olduğunu gösterin.
2. Eğer  $\alpha > \omega$  ve  $n \in \omega$  ise  $n + \alpha = \alpha$  olduğunu gösterin.
3. Eğer  $\beta < \alpha$  ise o zaman  $\beta + \gamma = \alpha$  eşitliğini sağlayan  $\gamma$  ların olduğunu gösterin.
4. Eğer  $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$  eşitliğini sağlayan bir  $\alpha$  varsa, o zaman  $\beta = \gamma$  olduğunu gösterin.
5. Kesin bir kanıt vermeden neden  $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$  eşitliğinin doğru olduğunu söyleyin.

$\alpha$  ve  $\beta$  iki ordinal olsun.  $\alpha \times \beta$  kümesini aşağıdaki gibi sıralayın:

$(a, b) < (a', b')$  ancak ve ancak  $b < b'$  veya  $(b = b'$  ve  $a < a')$ .

Bu ters alfabetik sıralamadır. Bu bir iyisıralamadır ve bu yüzden tek bir ordinale  $(\alpha\beta)$  izomorftur.

Aşağıda,  $\alpha, \beta, \gamma$  rastgele ordinaler olarak seçilmiştir.

6.  $0\alpha = 0\alpha = 0$  ve  $1\alpha = \alpha 1 = \alpha$  eşitliklerini gösterin.
7.  $2\omega = \omega$  olduğunu gösterin.
8.  $\omega\omega \neq \omega$  olduğunu gösterin.
8.  $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$  ve  $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$  eşitliklerinin doğru olduğunu gösterin.  $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$  eşitliğinin her zaman doğru olmadığını gösterin.
9.  $\alpha, \beta$  ve  $\lambda$  ordinaleri için
$$\alpha^0 = 1$$
$$\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \alpha$$
$$\alpha^\lambda = \bigcup_{\beta < \lambda} \alpha^\beta$$
eğer  $\lambda$  limit ordinalse

olarak tanımlayın.

$0^\alpha = 0$  ve  $1^\alpha = 1$  olduğunu gösterin.

10.  $2^\omega = \omega$  olduğunu gösterin.

11.  $\alpha^{\beta + \gamma} = \alpha^\beta \alpha^\gamma$  ve  $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$  eşitliklerinin her zaman doğru olduğunu gösterin.  $(\alpha\beta)^\gamma = \alpha^\gamma \beta^\gamma$  eşitliğinin her zaman doğru olmadığını gösterin.