# Kümeler Kuramı Final Sınavı

Ali Nesin

2008

$X$ bir küme olsun. $\wp(X)$, elemanları $X$'in altkümelerinden oluşan küme olsun. $\tau \subseteq \wp(X)$ olsun ve $\tau$'nun elemanlarına $X$'in **açık kümeleri** adını verelim. Açık kümeerin şu özellikleri sağladığını varsayalım.

**T1.** $\varnothing$ ve $X$ açık altkümelerdir.

**T2.** İki açık altkümenin kesişimi açıktır.

**T3.** Açık kümelerin birleşiminden oluşan altküme açıktır.

Yani

**T1′.** $\varnothing \in \tau$ ve $X \in \tau$.

**T2′.** Eğer $U, V \in \tau$ ise $U \cap V \in \tau$.

**T3′.** Eğer $\sigma \subseteq \tau$ ise $\cup\sigma \in \tau$.

O zaman $(X, \tau)$ çiftine **topolojik uzay** denir. Eğer $\tau$'nun ne olduğu konunun gelişinden belliyse, $(X, \tau)$ yerine sadece $X$ topolojik uzayından sözedeceğiz. Aynı küme üzerine değişik topolojiler kurulabileceğine dikkat edin.

Bu arada $\tau \subseteq \wp(X)$ yani $\tau \in \wp(\wp(X))$ olduğunu unutmamak gerekir.

Eğer $\tau_1$ ve $\tau_2$ aynı $X$ kümesi üzerinde topolojiler ve $\tau_1 \subseteq \tau_2$ ise $\tau_1$'in, $\tau_2$'den daha **kaba** ya da $\tau_2$'nin, $\tau_1$'den daha **zengin** ya da daha **ince** bir topoloji olduğu söylenir.

**1.** $X$ herhangi bir küme olsun.

**1a.** $X$ üzerinde bütün topolojilerden daha kaba tek bir topoloji olduğunu gösterin (buna $X$ üzerine **en kaba** topoloji denir) (2 pts.)

**1b.** $X$ üzerinde bütün topolojilerden daha zengin tek bir topoloji olduğunu gösterin (buna $X$ üzerine **ayrık** ya da **en ince** ya da **en zengin** topoloji) (2 pts.)..

**1c.** Eğer $\Sigma$, $X$ üzerine topolojilerden oluşan bir küme ise $\cap\Sigma$ kümesinin de $X$ üzerine bir topoloji olduğunu gösterin. (3 pts.)

**1d.** Bir $X$ kümesi ve $\tau \subseteq \wp(X)$ verilmiş olsun, $X$ üzerinde $\tau$'yi altküme olarak içeren ve $\tau$'yi içeren bütün topolojilerden daha kaba olan tek bir topoloji olduğunu gösterin. (5 pts.) Bu topolojiye $\tau$ ile **gerilmiş** topoloji denir ve bu topoloji $\langle\tau\rangle$ ile gösterilir.

**1e.** $\tau = \{A, B, C\} \subseteq \wp(X)$ olsun $\langle\tau\rangle$ topolojisinin elemanlarını bulun. (2 pts.)

**1f.** $\langle\varnothing\rangle$ topolojisinin elemanlarını bulun. (2 pts.)

**1g.** $\tau \subseteq \wp(X)$ altkümesinin şu özelliği olsun: Her $A, B \in \tau$ için $A \cap B$, $\tau$'nun bazı elemanlarının bileşimidir. $\langle\tau\rangle = \{\cup\sigma : \sigma \subseteq \tau\}$ eşitliğini gösterin.(4 pts.)

**1h.** $\tau_1 \subseteq \tau_2$ ise $\langle\tau_1\rangle \subseteq \langle\tau_2\rangle$ olduğunu gösterin. (2 pts.)

**1i.** $\tau \subseteq \wp(X)$ için $\tau_{\text{int}} = \{A_1 \cap \ldots \cap A_n : n \in \mathbb{N} \text{ ve } A_i \in \tau \text{ her } i = 1, \ldots, n\}$ olsun. $\tau_{\text{int}}$'in 1g'de belirttiğimiz koşulları sağladığını ve $\langle\tau\rangle = \langle\tau_{\text{int}}\rangle$ eşitliğini gösterin.(4 pts.)

**2.** $Y$ topolojik bir uzay ve $X$, $Y$'nin bir altkümesi olsun. $X$'in bir altkümesi eğer $Y$'nin bir açık kümesiyle $X$'in kesişimi olarak yazılabiliyorsa, bu altkümeye ***X*'te açık** ya da ***X*-açık** diyelim. Başka bir deyişle $U \subseteq X$ altkümesi $X$'te açıktır ancak ve ancak $U = V \cap X$ eşitliğini sağlayan açık bir $V \subseteq Y$ altkümesi varsa. Bu tanımın $X$'te bir topoloji tanımladığını gösterin. $X$ üzerinde tanımladığımız bu yeni topolojiye **kısıtlanmış topoloji** denir ($Y$'nin topolojisinden kısıtlanmıs topoloji). (4 pts.)

**3.** $X$ ve $Y$ topolojik uzaylar olsun. $X \times Y$'nin, sırasıyla $X$'in ve $Y$'nin $U$ ve $V$ açık altkümeleri için $U \times V$ biçiminde yazılan altkümelerine ve bunların her türlü bileşimlerine açık diyelim. Böylece $X \times Y$ üzerinde bir topoloji tanımladığımızı gösterin. (3 pts.) $X \times Y$ üzerindeki bu topolojiye **çarpım topolojisi** denir .

**4.** Bir $X$ topolojik uzayından $Y$ topolojik uzayına giden bir $f : X \to Y$ fonksiyonu alalım. Eğer $Y$'nin her $V$ açık altkümesi için, $f^{-1}(V)$, $X$'in açık bir altkümesiyse, $f$'ye sürekli denir. (Dolayısyla bir $f : X \to Y$ fonksiyonunun sürekli olası $X$ ve $Y$ 'nin topolojilerine bağlıdır.)

**4a.** $X$, $Y$, $Z$ topolojik uzaylar olsun. Eğer $f : X \to Y$ ve $g : Y \to Z$ sürekli fonksiyonlar ise, $g \circ f : X \to Z$ bileşke fonksiyonun da sürekli olduğunu gösterin. (2 pts.)

**4b.** İki topolojik uzay arasındaki sabit bir fonksiyonun her zaman sürekli olduğunu gösterin. (3 pts.)

**4c.** $X$ bir topolojik uzay olsun. $\mathrm{Id}_X : X \to X$ fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterin. (Burada tanım ve görüntü kümelerindeki topolojinin aynı olduğu kabul edilmelidir.) (1 pt.)

**4d.** $X$ en az iki elemanı olan bir küme olsun. Eğer tanım kümesinde en kaba topoloji, değer kümesinde ise en zengin topoloji alınırsa $\mathrm{Id}_X : X \to X$ fonksiyonunun sürekli olmadığını gösterin. (2 pts.)

**4e.** $Y$ topolojik uzay ve $X \subseteq Y$ olsun. $X$ üzerinde $Y$'den kısıtlanmış topolojiyi alırsak (bkz #2) $i : X \to Y$, $i(x) = x$ ile verilen fonksiyonun sürekli olduğunu gösterin. (4 pts.)

**4f.** $X$ ve $Y$ iki topolojik uzay olsun. $X \times Y$ çarpım topolojisini alırsak (see #3)

$$\pi_1 : X \times Y \to X \text{ ve } \pi_2 : X \times Y \to Y$$

izdüşüm fonksiyonlarının sürekli olduğunu gösteriniz. (3 pts.)

**4g.** Eğer $Y$ üzerinde en kaba topolojiyi alırsak (bkz 1a) herhangi bir topolojik uzaydan $Y$'ye giden bütün fonksiyonların sürekli olduğunu gösteriniz. (2 pts.)

**4h.** Eğer $X$ üzerinde ayrık topolojiyi alırsak (bkz 1b) $X$'ten herhangi bir $Y$ topolojik uzayına giden bütün $f$ fonksiyonlarının sürekli olduğunu gösteriniz. (2 pts.)

**4i.** $X$ bir küme, $Y$ topolojik bir uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. $\tau$ ve $\tau_1$, $X$ üzerinde iki topoloji ve $\tau_1$ de $\tau$'dan daha zengin olsun. $X$'i $\tau$ ile bir topolojik uzay olarak düşündüğümüzde $f$ fonksiyonu sürekli oluyorsa, $X$'i $\tau_1$ ile bir topolojik uzay olarak düşündüğümüzde de $f$ fonksiyonunun sürekli olacağını gösteriniz. (2 pts.)

**4j.** $X$ bir küme, $Y$ bir topolojik uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. $\Sigma$, $X$ üzerinde $f$ fonksiyonunu sürekli yapan bütün topolojilerin kümesi olsun. $X$'i $\cap\Sigma$ ile bir topolojik uzay olarak düşündüğümüzde $f$ fonksiyonunun sürekli olacağını gösteriniz. (2 pts.)

$$\cap\Sigma = \langle f^{-1}(V) : V, Y\text{'nin açık kümesi}\rangle$$

olduğunu gösteriniz. (6 pts.) Buradan $\cap\Sigma$ topolojisinin $X$ üzerinde $f$ fonksiyonunu sürekli kılan en küçük topoloji olduğunu gösteriniz. (3 pts.)

**4k.** $Y$ bir topolojik uzay ve $X \subseteq Y$ bir altküme olsun. $i : X \to Y$, $i(x) = x$ ile verilen fonksiyon olsun. $\tau$ da $X$ üzerinde $i$'yi sürekli yapan en küçük topoloji olsun. $\tau$'nın $X$ üzerinde kısıtlanmış topoloji ($Y$'nin topolojisinden kısıtlanmış topoloji) olduğunu gösteriniz. (8 pts.)

**4l.** $X$ bir küme, $Y$ bir topolojik uzay ve $\mathcal{F}$ de $X$ 'den $Y$'ye giden fonksiyonlardan oluşan bir küme olsun. $X$ üzerinde $\mathcal{F}$ 'deki bütün fonksiyonları sürekli yapan bir enküçük topoloji olduğunu gösteriniz. (4 pts.)

**4m.** $X$ ve $Y$ topolojik uzaylar olsun. $X \times Y$ üzerinde, $\pi_1 : X \times Y \to X$ ve $\pi_2 : X \times Y \to Y$ projeksiyon fonkisyonlarını sürekli yapan en küçük topolojinin $X \times Y$ üzerindeki çarpım topolojisi olduğunu gösteriniz. (bkz #3). (10 pts.)

**4n.** $X$ bir topolojik uzay, $I$ da bir küme olsun. $\Pi_I X$, $I$ 'dan $X$'e giden bütün fonksiyonların kümesi olsun. $f \in \Pi_I X$ ve $i \in I$ verildiğinde $\pi_i(f) = f(i)$ olarak tanımlansın. Bu durumda $\pi_i$,

$\Pi_I X$ den $X$ 'e bir fonksiyon olur ($i$'inci projeksiyon fonksiyonu). $\Pi_I X$ üzerindeki bütün projeksiyon fonksiyonlarını sürekli yapan en küçük topolojiyi bulun. (10 pts.)

**5.** $X$ bir topolojik uzay ve $K \subseteq X$. $(U_i)_{i\in I}$, $X$'in bir altkümeler ailesi olsun. $K \subseteq \cup_{i\in I} U_i$ içindeliği sağlanıyorsa, $(U_i)_{i\in I}$, ailesine $X$'in **örtüsü**adı verilir. Eğer her $U_i$ kümesi açık ise **açık örtü**den sözedilir ve eğer $I$ sonluysa **sonlu örtü**den sözedilir. $J \subseteq I$ ise ve $(U_j)_{j\in J}$ hâlâ daha $K$'nın bir örtüsüyse, $(U_j)_{j\in J}$ örtüsüne $(U_i)_{i\in I}$ örtüsünün altörtüsü denir. Eğer $K$ 'nın her açık örtüsünün sonlu bir altörtüsü varsa,$K$'ya **tıkız** denir.

**5a.** Sonlu sayıda tıkız kümenin birleşiminin de tıkız olduğunu gösteriniz. (4 pts.)

**5b.** Sonlu bir kümenin tıkız olduğunu gösteriniz. (4 pts.)

**5c.** Eğer $f : X \to Y$ iki topolojik uzay arasında sürekli bir fonksiyonsa $X$'in her tıkız altkümesinin $f$ altındaki görüntüsünün $Y$'de tıkız olduğunu gösteriniz . (6 pts.) $Y$'de tıkız bir altkümesinin $f$ altındaki önimgesi her zaman $X$ 'te tıkız olmak zorunda mıdır? (3 pts.)

**5d.** $C$, $X$ topolojik uzayının bir altkümesi olsun. Eğer $X \setminus C$ açık bir kümeyse $C$'ye **kapalı** denir. Tıkız bir kümenin kapalı bir altkümesinin de tıkız olduğunu gösteriniz. (6 pts.)

**5e.** Eğer bir topolojik uzay kendi kendisinin tıkız bir altkümesi ise, o topolojik uzaya **tıkız** denir. $X$ bir topolojik uzay, $Y$ de $X$'in bir altkümesi olsun. $Y$'nin $X$'in tıkız bir altkümesi olması için $Y$'nin kısıtlanmış topoloji ile tıkız olmasının gerekli ve yeterli olduğunu gösteriniz. (bkz #2). (6 pts.)

**5f.** $X$ ve $Y$ topolojik uzaylar olsun. $X \times Y$ kümesinin çarpım topolojisi ile tıkız olması için (bkz #3) hem $X$ hem de $Y$ nin tıkız olmasının gerekli ve yeterli olduğunu gösteriniz. (10 pts.)