

İkinci Vize

Math 111

Ocak 1998

Ali Nesin

Not: \mathbb{N} doğal sayılar kümesini, \mathbb{Z} tamsayılar kümesini, \mathbb{R} reel sayılar kümesini belirtir. X bir kümeys, $\wp(X)$, X 'in altkümelerinin kümesini ve Id_X fonksiyonu X üzerinde birim fonksiyonu belirtir, yani her $x \in X$ için $\text{Id}_X(x) = x$. $f \circ g$ sembolü anlamlı olduğunda f ve g fonksiyonlarının bileşkesini belirtir: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. f^2 sembolü anlamlı olduğunda $f \circ f$ fonksiyonunu belirtir.

- $\wp(\wp(\{1,2\}))$ kümesinin bütün elemanlarını yazın.
- Aşağıdaki kümelerin altküme olma ilişkisine göre en küçük ve en büyük elemanları var mıdır?
 - $\{x \in \wp(\mathbb{N}): 1 \in x, 2 \notin x\}$
 - $\{x \in \wp(\mathbb{N}): \exists n \in \mathbb{N} \forall m > n (m \notin x)\}$
 - $\{x \in \wp(\wp(\mathbb{N})): a \in x \text{ her } a \in \mathbb{N} \text{ için}\}$
- 4 kümesinin $f^3 = \text{Id}_4$ özelliği olan bütün birebir ve örten f fonksiyonlarını bulun.
- Her $x, y \in \mathbb{N}$ için " $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ " özelliğini sağlayan bütün birebir ve örten $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ fonksiyonlarını bulun.
- $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ fonksiyonu $f(x) = x - x^2$ $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $g(x) = x/(1+x^2)$ olarak verilmiş olsun. $(g \circ f)(3)$ hesaplayın. X 'in hangi değerleri için $(g \circ f)(x) \geq 0$ olur?
- X bir küme ve $f: X \rightarrow X$ bir fonksiyon olsun. f^2 birebir ve örtense f 'nin birebir ve örten olduğunu kanıtlayın.
- $f \neq \text{Id}_{\mathbb{N}}$ ve $f^2 = f$ özelliğini sağlayan ve sabit olmayan bir $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ fonksiyonu örneği verin.
- 0'dan farklı herhangi bir n doğal sayısı için,
$$\frac{1}{1} \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n-1} \frac{1}{2n+1} = \frac{n}{2n+1}$$
eşitliğini gösterin.
- A, B, C üç küme olsun. $(A \cap C) \setminus (B \cap C) \subseteq A \setminus B$ olduğunu gösterin.
- X bir küme olsun. "Her $x \in X$ için öyle bir ve bir tek $y \in Y$ vardır ki $y \in x$ " özelliğini sağlayan Y kümesine X 'in **seçim kümesi** denir.
 $X = \{\{0,1\}, \{1,2\}\}$ için seçim kümesini bulun. Seçim fonksiyonu olmayan bir X kümesi bulun.
- X bir küme olsun. 2^X , X ten $2 = \{0, 1\}$ kümesine giden fonksiyonların kümesini temsil etsin. 2^X ve $\wp(X)$ arasında birebir ve örten bir fonksiyon olduğunu gösterin. (6 pts.)