

# Kümeler Teorisi

Birinci ara sınav

Kasım, 1999

Ali Nesin

**I.**  $(\omega, S, 0)$  yapısının temel özelliklerini hatırlatalım:

**PA1.**  $S : \omega \rightarrow \omega$  fonksiyonu birebirdir.

**PA2.**  $S(\omega) = \omega \setminus \{0\}$ .

**PA3.** Eğer  $X \subseteq \omega$  kümesi

a)  $0 \in X$

b) Eğer  $x \in X$  ise,  $S(x) \in X$

koşullarını sağlıyorsa,  $X = \omega$  dir.

+ ve  $\times$  işlemlerinin de temel özelliklerini de hatırlatalım: Tüm  $x, y \in \omega$  için,

**S1.**  $x + 0 = x$

**S2.**  $x + S(y) = S(x + y)$

**P1.**  $x0 = 0$

**P2.**  $x S(y) = xy + x$

**I.1.** Her  $x, y \in \omega$  için,  $x + y = y + x$  eşitliğini gösterin.

**I.2.** Her  $x, y \in \omega$  için,  $xy = yx$  eşitliğini gösterin.

**II.** Bu soru için  $(\omega, +, \times)$  yapısının temel aritmetik kurallarını bildiğinizi varsayabilirsiniz.

$\omega \times \omega$  kümesi üzerinde  $\equiv$  ilişkisini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$(a, b) \equiv (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$$

**II.1.** Bu ilişkinin  $\omega \times \omega$  üzerinde bir denklik ilişkisi olduğunu gösterin.

**II.2.**  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(2, 6)$ ,  $(1, 5)$  ve  $(a, b)$  elemanlarının denklik sınıflarını bulun.

**II.3.** Eğer  $(a, b) \equiv (c, d)$  ve  $(a', b') \equiv (c', d')$  ise  $(a + a', b + b') \equiv (c + c', d + d')$  ve  $(aa' + bb', ab' + ba') \equiv (cc' + dd', cd' + dc')$  olduğunu gösterin.

**II.4.**  $(a, b)$  çiftinin denklik sınıfını  $[a, b]$  ile gösterelim ve  $\mathbb{Z} = \omega \times \omega / \equiv$  de tüm denklik sınıflarının kümesi olsun. Neden 3. sorunun bize  $\mathbb{Z}$  kümesi üzerinde + ve  $\times$  işlemlerini

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$$

$$[a, b] \times [c, d] = [a, b][c, d] = [ac + bd, ad + bc]$$

şeklinde tanımlamamıza izin verdiğini açıklayın.

**II.5.** Tüm  $x, y \in \mathbb{Z}$  elemanları için

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

olacak şekilde  $\omega$ 'dan  $\mathbb{Z}$ 'ye birebir bir  $f$  fonksiyonu olduğunu gösterin.

**II.6.**  $\mathbb{Z}$  hakkında düşüdüklerinizi ve bildiklerinizi yazın.

Puanlama: I.1. 30 puan.  
I.2. 30 puan.  
II.1. 8 puan.  
II.2. 6 puan.  
II.3. 12 puan.  
II.4. 5 puan.  
II.5. 15 puan.  
II.6. 4 puan