Math 111 (Kümeler Kuramı)

Vize 1/3
Ali Nesin
Kasım 2000

$\mathbb{R}^n$'nin bir C altkümesindeki her $x = (x_1, ..., x_n)$ ve $y = (y_1, ..., y_n)$ için ve $[0, 1]$ aralığındaki her t gerçel sayısı için,

$$(tx_1 + (1 - t)y_1, ..., tx_n + (1 - t)y_n)$$

noktası gene C'nin içinde kalıyorsa o zaman C'ye **içbükey** denir.

5a. $a \le b$ iki gerçel sayı ve $t \in [0, 1]$ ise $a \le ta + (1 - t)b \le b$ eşitsizliklerini kanıtlayınız. (2 puan)

5b. Herhangi üç gerçel sayı $a \le c \le b$ için, $[0,1]$ aralığında $c = ta + (1 - t)b$ eşitliğini sağlayan bir t olduğunu gösteriniz. (4 puan)

5c. $\mathbb{R}$'nin içbükey altkümeleri nelerdir? (3 puan)

5c. Boş kümenin, tek elemanlı kümelerin ve $\mathbb{R}^n$'nin içbükey olduğunu gösteriniz. (3 puan)

5d. İki içbükey kümenin bileşimi içbükey midir? Doğru olup olmadığını gösteriniz. (3 puan)

5e. $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ içbükey ise, $X \times Y$ kümesinin de $\mathbf{R}^{n+m}$'nin içbükey bir altkümesi olduğunu gösteriniz. (3 puan)

5f. İçbükey kümelerin kesişiminin de içbükey olduğunu gösteriniz. (4 puan)

5g. X, $\mathbb{R}^n$'nin herhangi bir altkümesi olsun. $\mathbb{R}^n$'nin X'i içeren en küçük bir içbükey altkümesi olduğunu gösteriniz, yani aşağıdaki özelliklere sahip öyle bir $C(X) \subseteq \mathbb{R}^n$ olduğunu kanıtlayınız:

i. $X \subseteq$ C(X).
ii. C(X) içbükey.
iii. $\mathbb{R}^n$'nin bir altkümesi içbükey ise ve X'i içeriyorsa, o zaman C(X)'i de içerir.

$C(X)$ kümesine X'in **içbükey kabuğu** denir. (10 puan)

5h. X içbükey ise $C(X)$ nedir? (2 puan)

5i. $X = \{0, 1\} \subseteq \mathbb{R}$ olsun. $C(X)$'i bulunuz. (2 puan)

5j. $X = \{1/n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$olsun. $C(X)$'i bulunuz. (2 puan)

5k. Varsayalım ki $X \subseteq \mathbb{R}^2$ kümesinin yalnızca iki notası var. Geometrik olarak $C(X)$ nedir? (2 puan)

5l. Varsayalım ki $X \subseteq \mathbb{R}^2$ kümesinin yalnızca üç notası var. Geometrik olarak $C(X)$ nedir? (2 puan)

5m. $X \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}^n$ ise $C(X) \subseteq C(Y)$ olduğunu gösteriniz. (4 puan)

5n. $X \subseteq Y \subseteq C(X)$ ise $C(Y) = C(X)$ olduğunu gösteriniz. (5 puan)

5o. $\mathbb{R}^n$ 'nin X ve Y altkümeleri için $C(X \cap Y) \subseteq C(X) \cap C(Y)$ olduğunu gösteriniz. (8 puan)

5p. $\subseteq$ simgesini ters çevirirsek **5o.** hala doğru mudur? (4 puan)

5q. $\mathbb{R}^n$'deki tümleyeni içbükey olan bir altkümeye "**coconvex**" denir eğer. Rastgele çoklukta "**coconvex**" kümelerin kesişiminin de "**coconvex**" olduğunu gösterin. (5 puan)

5r. $\mathbb{R}^n$'nin herhangi bir altkümesinin en büyük bir "**coconvex**" altkümesi içerdiğini gösterin. (6 puan)