MATH 111

Fonksiyonlar üzerine ödevler

Ekim 1999

Örnek 1. $X = Y = \mathbb{N}$, $f(x) = 2x + 1$ olsun.

Örnek 2. Bir x doğal sayısına $x/2$ sayısını eşleştiren kural $\mathbb{N}$ den $\mathbb{N}$ ye bir fonksiyon değildir, çünkü $x/2$ her zaman bir doğal sayı değildir. Öte yandan, aynı kural $\mathbb{N}$ den rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}$ ya bir fonkiyon tanımlar.

Örnek 3. Her $x \in \mathbb{N}$ elemanını $y^2 = x$ olacak şekilde bir y reel sayısına eşleştiren kural $\mathbb{N}$'den $\mathbb{R}$'ye bir fonksiyon değildir, çünkü, $x = 0$ hariç, $y^2 = x$ denkleminin iki farklı çözümü vardır. Başka bir deyişle, y değeri her zaman biricik değildir.

1. n elemanlı bir kümeden m elemanlı bir kümeye kaç fonksiyon tanımlayabiliriz?

Eğer f, X'ten Y ye bir fonksiyonsa ve A, X in bir altkümesiyse f fonksiyonunun A nın elemanlarında aldığı değerlerin kümesini $f(A)$ ile gösteririz.Daha formel olarak,

$$f(A) = \{y \in Y : \text{bazı } a \in A \text{ için } y = f(a)\}.$$

2. $X = Y = \mathbb{N}$, $f(x) = 2x + 1$ olsun.

2a. $f(\mathbb{N})$ yi bulun.

2b. $f(f(\mathbb{N}))$ yi bulun.

2c. $f(f(f(\mathbb{N})))$ yi bulun.

2d. $f(f\ldots(f(\mathbb{N}))\ldots)$ yi bulun. (Burada n tane f var.Bu kümeyi $f^n(\mathbb{N})$ ile gösteririz.)

f, X'ten Y'ye bir fonsiyon ve A ve B, X'in iki altkümesi olsun.

3. Eğer $A \subseteq B$ ise $f(A) \subseteq f(B)$ olduğunu gösterin.

4. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ olduğunu gösterin. Tabii ki, aynı eşitlik kümelerin herhangi sonlu brleşimi için de geçerlidir.

5. $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ olduğunu gösterin. Aynı içindelik ilişkisi herhangi sonlu sayıda altküme için de geçerlidir.

6. $f(A \cap B)$ nin $f(A) \cap f(B)$ den farklı olabileceğini gösterin.(Bunu göstermek için X, Y, f, A ve B örnekleri bulmalısınız.)

7. $f(A \setminus B)$ ile $f(A) \setminus f(B)$ arasındaki ilişki hakkında ne söylebilirsiniz?

8. $f(\emptyset) = \emptyset$ olduğunu gösterin.

$(A_i)_{i \in I}$ X'in altkümelerinin bir ailesi olsun.

9. $f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$ olduğunu gösterin (4. sorunun genelleştirilmiş hali)

10. $f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$ olduğunu gösterin. (5. sorunun genelleştirilmiş hali)

Bundan sonra, f fonksiyonunun X kümesinden kendisine gittiğini varsayalım, yani, f, X'ten X'e giden bir fonksiyon olsun. Eğer X in bir A altkümesi için $f(A) \subseteq A$ ise, A'ya ***f*-kapalı** denir. X ve $\varnothing$ kümeleri elbette f- kapalıdır.

11. Eğer A, X in f- kapalı bir altkümesiyse, o zaman $f(A)$ da f- kapalıdır.

12. $\bigcup_{n\in \mathbf{N}} f^n(A)$ kümesi X in f- kapalı bir altkümesidir. (Kabul görmüş bir kural olarak $f^0(A) = A$ alınır. $n > 0$ için $f^n(A)$ nin anlamı 2. sorunun d şıkkından bariz olmalı.)

13. Herhangi bir f fonksiyonu ve X in herhangi A altkümesi için $\bigcap_{n\in \mathbf{N}} f^n(A)$ kümesi f- kapalı mıdır?

14. f- kapalı kümelerin kesişimlerinin de f- kapalı olduklarını gösterin. Başka bir deyişle, eğer her bir $i \in I$ için A_i , X in f- kapalı bir altkümesiyse o zaman $\bigcap_{i\in I} f(A_i)$ kümesi de X in f– kapalı bir altkümesidir.

15. A, X in bir altkümesi olsun. X in A'yı içeren tüm f- kapalı altkümelerinin kesişimi X in A'yı içeren en küçük biricik altkümesidir, gösterin. Yani şunları gösterin:

15a. X in A'yı içeren tüm f- kapalı altkümelerinin kesişimi yine X in f- kapalı bir altkümesidir.

15b. X in A'yı içeren f- kapalı altkümelerinin kesişimi de A yı içerir.

15c. Eğer B, X in A'yı içeren f- kapalı bir altkümesiyse, o zaman B, X in A'yı içeren tüm f- kapalı altkümelerinin kesişimini de içerir.

Bu biricik kümeyi A^* ile gösterelim.

16. $A^* = \bigcup_{n\in \mathbf{N}} f^n(A)$ olduğunu gösterin.

17. f, 2'inci sorudaki gibi olsun. $\{0\}^* = \{2^n - 1 : n \in \mathbb{N}\}$ olduğunu gösterin.

18. f, 2'inci sorudaki gibi olsun. $\{1\}^*$ için yukarıdaki gibi bir eşitlik bulun.

19. f, 2'inci sorudaki gibi olsun. $\{2\}^*$ için yukarıdaki gibi bir eşitlik bulun.

20. f- kapalı kümelerin kesişimlerinin de f-kapalı olduğunu gösterin.

21. A, X in bir altkümesi olsun. A nın tüm f- kapalı altkümelerinin birleşimi A nın en büyük f–kapalı altkümesidir ve bu küme biriciktir. Bu biricik küme A° ile gösterilir.

22. A, 3'e bölünemeyen doğal sayıların kümesi olsun. A° nedir?