Ek 3. Sonsuz Küçük Eleman

Bu bölümde, bugüne dek ancak rüyalarınızda göreceğinizi tahmin edeceğiniz bir numara gerçekleştireceğiz: 3/5, 7/9, –4/5 ve 3 gibi kesirli sayılara ***sonsuz küçük*** bir eleman ekleyeceğiz. Miniminnacık bir şey olacak bu sonsuz küçük eleman (ya da bu yeni "sayı"). O kadar küçük, ama o kadar küçük olacak ki, milyarda 1'den, katrilyonda 1'den ve her pozitif kesirli sayıdan daha küçük olacak.

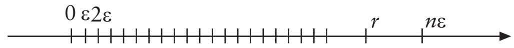
Kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}$'yü içeren, ama ayrıca bir de "sonsuz küçük" bir eleman içeren yepyeni bir "sayı sistemi" yaratacağız. Bu sayı sisteminde, "sayı"ları toplayıp çıkarıp çarpabileceğiz, hatta birbirine bölebileceğiz. (Tabii ki 0'a bölemeyeceğiz!)

Sonsuz küçük elemana ε adını verirsek, $1/\varepsilon$ gibi bir elemanımız da olacak doğal olarak. Tahmin edileceği üzere, ε sonsuz küçük olduğundan, $1/\varepsilon$ sonsuz büyük olacak!..

Arşimet Özelliği

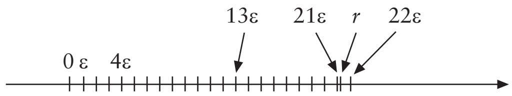
Arşimet'in insanlık için yaptığı haddi hesabı olmayan iyiliklerden biri de, ne kadar küçük adımlar atarsak atalım, eğer hep aynı uzunlukta adımlar atarsak ve eğer yeterince adım atarsak, dilediğimiz kadar uzağa gidebileceğimizi anlamasıdır. Buna kısaca "sabreden derviş yol katetmiş teoremi" diyebiliriz, ama daha da kısa olarak ***Arşimet Özelliği*** adıyla bilinir.

Arşimet Özelliği. $\varepsilon > 0$ *bir kesirli sayı olsun. q bir başka kesirli sayı olsun. O zaman $n\varepsilon > q$ eşitliğini sağlayan bir n doğal sayısı vardır. Yani ε ne kadar küçük olursa olsun, eğer pozitifse, kendisiyle yeterince defa toplanınca her sayıyı geçer.*



n adet ε uzunluğunda adımla *r* geçiliyor

Kanıt: Eğer $q \leq 0$ ise $n = 1$ almak yeterli. Şimdi $q > 0$ varsayımını yapalım. Pozitif a, b, c, d doğal sayıları için, $\varepsilon = a/b$ ve $q = c/d$



22 adet ε uzunluğunda adımla *r* geçiliyor

olarak yazalım. O zaman, $b\varepsilon = b \times a/b = a \geq 1$. Dolayısıyla

$$c(b+1)\varepsilon = c(b\varepsilon + \varepsilon) \geq c(1+\varepsilon) > c \geq c/d = q$$

Demek ki $n = c(b+1)$ almak yeterli. □

Eğer bir ε sayısı 0 değilse ve her n tamsayısı için, $n|\varepsilon| < 1$ oluyorsa, ε sayısına ***sonsuz küçük*** diyelim... Arşimet Özelliği sonsuz küçük bir kesirli sayının olmadığını söylüyor!

Sonsuz küçük gerçel sayı da yoktur elbette. Ama bizim için bu önemli olmayacak, biz kesirli sayılarla çalışacağız.

Bir ε sayısının sonsuz küçük olmasıyla bunun mutlak değeri olan $|\varepsilon|$ sayısının sonsuz küçük olması aynı şeydir tabii ki...

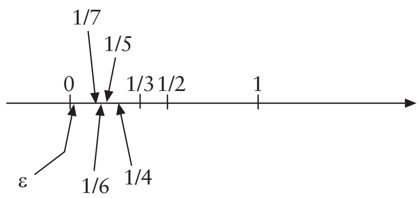
Tanıma bakılırsa, pozitif bir ε sayısının sonsuz küçük olması için,

$$0 < \varepsilon < 1,$$
$$0 < \varepsilon < 1/2,$$
$$0 < \varepsilon < 1/3,$$
$$0 < \varepsilon < 1/4,$$
$$\ldots$$

koşullarının hepsinin birden doğru olması gerekiyor. Kesirli sayılarda bu koşulların hepsini birden sağlayan bir ε yoktur, çünkü Arşimet Özelliği'ne göre **her** $n > 0$ doğal sayısı için,

$$0 < \varepsilon < 1/n$$

koşullarının hepsini birden sağlayan kesirli (hatta gerçel) bir sayı yoktur.



Gerçekle başa çıkılmaz... Bunu dert etmeyeceğiz. Biz gene de sonsuz küçük bir sayı bulacağız. Bulduğumuz sayı kesirli (ya da gerçel) sayı olmayacak tabii. Bambaşka bir evrene geçeceğiz.

Bir şeye dikkatinizi çekerim: Yukarda sıraladığımız sonsuz sayıdaki koşulun sonlu tanesini sağlayan bir ε mutlaka vardır. Örneğin, ε = 1/1001, ilk bin koşulu sağlar (ama bu ε sonraki koşulları sağlamaz.)

Matematikçiler bu gibi durumlarda tüm koşulları sağlayan bir **başka sistem**in olduğunu hissederler. Tecrübe diye buna derler işte... Mantıkçılar ise bir başka sistemin olduğunu bilirler. Buna da bilim denir! Eğer sonsuz tane koşulun sonlu tanesi hep sağlanabiliyorsa, o zaman sonsuz tane koşulu da sağlayan bir evren olmalı! Bu ilkeye göre, yukardaki sonsuz koşulu sağlayan ε'un olduğu bir evren olmalıdır. İşte bu bölümde bu evreni bulacağız. Üstelik soyut bir buluş olmayacak bu, evren karşımızda etiyle kemiğiyle belirecek.

Önce böyle bir ε'un olduğu bir evrenin olduğunu varsayalım. Bakalım bu varsayımsal evren hakkında neler söyleyebileceğiz? Biraz düşünerek evrene toslayacağız.

Sonsuz küçük bir sayı içeren evrene *E* diyelim.

E'nin sonsuz küçük bir elemanına ε diyelim:

$$\varepsilon \in E.$$

Ayrıca kesirli sayıların da *E*'de olmalarını istiyoruz. Demek ki $\mathbb{Q} \subseteq E$ olmalı.

Elbette $\varepsilon \notin \mathbb{Q}$.

E'nin elemanlarını çarpabilmek istediğimizden (bölmeyi daha sonra ele alacağız), *E*'de sadece $\mathbb{Q}$ değil, örneğin $\mathbb{Q}\varepsilon$, $\mathbb{Q}\varepsilon^2$, $\mathbb{Q}\varepsilon^3$ gibi altkümeler de olmalı. Bu altkümelerin elemanlarını toplayabilmeliyiz de. Yani *E*'de,

$$\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\varepsilon + \mathbb{Q}\varepsilon^2 + \mathbb{Q}\varepsilon^3$$

gibi altkümeler olmalı. Demek ki *E*'de kesirli katsayılı ve "değişkeni" ε olan tüm polinomlar olmalı. Eğer bölme yapmaktan vazgeçip sadece toplama, çarpma ve çıkarmayla yetinmeye razı olursak, sadece polinomlar yettiğini göreceğiz, *E*'de başka bir şey olmasına gerek yok.

$$E = \mathbb{Q}[\varepsilon]$$

olsun. *E*, katsayıları kesirli olan ve değişkeni ε olan polinomlar kümesidir. Daha açık olarak, *E*'nin her f elemanı, bir n doğal sayısı ve f_0, f_1, ..., f_n kesirli sayıları için

$$f = f_0 + f_1\varepsilon + \cdots + f_n\varepsilon^n$$

olarak yazılırlar. (Eğer katsayıların hepsi birden 0 değilse, f'nin de 0 olamayacağının kanıtı yan sütundaki gri kutucuğun içindedir.) Burada ε'u tanımsız, anlamsız ve yepyeni bir terim olarak görüyoruz.

Yalnız ε'un sonsuz küçük olmasını istediğimizi unutmayalım. Bir de ε'un pozitif olmasını istiyoruz. Yani, her pozitif n doğal sayısı için,

$$0 < \varepsilon < 1/n$$

olmasını istiyoruz. Dolayısıyla her pozitif $q = m/n$ kesirli sayısı için, (m ve n'yi pozitif alalım)

$$0 < \varepsilon < 1/n \leq m/n = q,$$

yani

$$0 < \varepsilon < q$$

olmalı.

E halkasında henüz tanımlamadığımız eşitsizliğin başka özelliklerini de irdeleyelim. Yukardaki eşitsizliklerin üç terimini de herhangi bir pozitif kesirli sayıyla çarparsak, q de rastgele seçildiğinden, her a, b pozitif kesirli sayısı için,

$$0 < a\varepsilon < b$$

olması gerektiğini görürüz. Bunları ε ile çarparsak

$$0 < a\varepsilon^2 < b\varepsilon$$

olması gerektiği anlaşılır. Bunu böylecene devam ettirirsek, her pozitif a_0, a_1, ..., a_k kesirli sayısı için,

$$0 < a_k\varepsilon^k < \ldots < a_2\varepsilon^2 < a_1\varepsilon < a_0$$

olması gerektiğini görürüz.

Buradan, her a_0, a_1, ..., a_k kesirli sayısı için, eğer $a_0 > 0$ ise,

$$a_0 + a_1\varepsilon + + a_2\varepsilon^2 + \ldots + a_k\varepsilon^k > 0$$

olması gerektiği çıkar. Bunu kanıtlayalım:

$$\begin{aligned} -a_1\varepsilon - a_2\varepsilon^2 - \ldots - a_k\varepsilon^k &\le |a_1|\varepsilon + \cdots + |a_k|\varepsilon^k \\ &\le |a_1|\varepsilon + \cdots + |a_k|\varepsilon \\ &= (|a_1| + \cdots + |a_k|)\varepsilon < a_0. \end{aligned}$$

Dolayısıyla, eğer $a_i > 0$ ise ve i aşağıda görülen göstergeçlerin en küçüğüyse,

$$a_i\varepsilon^i + \cdots + a_k\varepsilon^k > 0$$

olması gerekir.

ε Cebirsel Olamaz

Hemen yukardaki satırdan, hepsi birden 0 olmayan

$$f_0, f_1, \ldots, f_n$$

kesirli sayıları için,

$$f_0 + f_1\varepsilon + \cdots + f_n\varepsilon^n$$

teriminin 0 olamayacağı kolaylıkla kanıtlanabilir. Yani ε, cebirsel bir sayı olamaz.

Şimdi E kümesinin tüm elemanlarını (polinomları) tek bir hamleyle sıralayalım.

E'den rastgele iki a ve b elemanı alalım. Bunlardan hangisinin daha büyük olması gerektiğine karar vereceğiz. Yani $a \ge b$ eşitsizliğinin mi yoksa $a \le b$ eşitsizliğinin mi doğru olması gerektiğine karar vereceğiz. Tabii, $a \le b$ eşitsizliği için, $b - a \ge 0$ eşitsizliği gerek ve yeter koşul olmalı. Dolayısıyla hangi polinomun hangi polinomdan daha büyükeşit olduğuna karar vermek için negatif olmayan polinomları bilmek yeterli olmalı.

Rastgele bir $f \neq 0$ polinomu alalım. Bu polinomun pozitif olup olmaması gerektiğine karar vereceğiz. Polinomu,

$$f = f_0 + f_1\varepsilon + \cdots + f_m\varepsilon^m$$

olarak yazalım. $f_0 = 0$ olabilir elbette. f_1 katsayısı da 0 olabilir. Ama eğer $f \neq 0$ ise, bu katsayılardan biri 0 olmamalı. f_k, 0'a eşit olmayan katsayıların ilki olsun. Demek ki,

$$f = f_k\varepsilon^k + \cdots + f_m\varepsilon^m,$$

ve k, yukarda beliren göstergeçlerin en küçüğü ve $f_k \neq 0$. Daha önce yaptığımız hesaplardan,

$$\begin{aligned} f > 0 &\Leftrightarrow f_k\varepsilon^k + \cdots + f_m\varepsilon^m > 0 \\ &\Leftrightarrow f_k + f_{k+1}\varepsilon \cdots + f_m\varepsilon^{m-\mathrm{k}} > 0 \\ &\Leftrightarrow f_k > 0 \end{aligned}$$

olması gerektiğini biliyoruz. Demek ki aslında eşitsizliğin tanımını da biliyoruz:

$$f > 0 \Leftrightarrow f\text{'nin 0 olmayan ilk katsayısı} > 0.$$

Dolayısıyla, $f, g \in E$ için,

$$f > g \Leftrightarrow f - g > 0$$

tanımını yapalım. Bunun yardımıyla, tahmin edildiği gibi $\leq$ ilişkisinin de tanımını yapabiliriz.

Teorem. *Yukarda tanımlanan $\leq$ ilişkisi $E = \mathbb{Q}[\varepsilon]$ halkasını sıralı bir halkaya dönüştürür.*

Görüldüğü gibi E, $\mathbb{Q}$'nün aksine, bu sıralamayla Arşimet özelliğini sağlamaz. yani $\mathbb{Q}$'nün her pozitif α elemanı için, $n\alpha > 1$ eşitsizliğini sağlayan bir n doğal sayısı olmayabilir, örneğin $\alpha = \varepsilon$ için böyle bir eleman yoktur.

E'nin pozitif α, β elemanları, her $n \in \mathbb{N}$ (ya da her $n \in \mathbb{Q}$) için,

$$n\alpha < \beta$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, α'ya β'ya ***göre sonsuz küçük*** diyelim ve bunu

$$\alpha << \beta$$

olarak yazalım. Demek ki $\varepsilon << 1$. Hatta, hangi pozitif a ve b sayılarını alırsak alalım,

$$a\varepsilon << b$$

olur. ε^2 de ε'a ve 1'e göre sonsuz küçüktür ve ε^3 de ε^2'ye, ε'a ve 1'e göre sonsuz küçüktür.

E bir halkadır. Yani *E*'de toplama, çıkarma ve çarpma gibi işlemler vardır ve bu işlemler hepimizin bildiği ve tahmin ettiği özellikleri sağlarlar.

Ama *E* bir cisim değildir, çünkü *E*'de bölme yapılamaz. Bölme yapabilmek için *E* yerine,

$$F = \{f/g : f, g \in E, g \neq 0\}$$

kümesine geçmeliyiz. Burada,

$$f/g = f_1/g_1 \Leftrightarrow fg_1 = f_1g$$

eşkoşulunu anımsatırız.

$f/g = (-f)/(-g)$ eşitliğinden dolayı, *F*'nin her elemanı, bir $f \in E$ ve bir $g \in E$ ve $g > 0$ için f/g biçiminde yazılır. Böyle yazılmış f/g ve f_1/g_1 için,

$$f/g \leq f_1/g_1 \Leftrightarrow fg_1 \leq f_1g$$

tanımını yapalım. Şimdi, *F*, üstünde toplama, çıkarma, çarpma ve (0'dan değişik bir elemanla) bölme yapılabilen ve yukardaki teoremi sağlayan bir nesnedir.

$\varepsilon \in F$, gene sonsuz küçüktür, yani her $n > 0$ doğal sayısı için, $0 < \varepsilon < 1/n$ dir. Ama $1/\varepsilon$, *F*'nin sonsuz büyük bir elemanıdır, yani her $n \in \mathbb{Z}$ için, $n < 1/\varepsilon$ eşitsizliği doğrudur.

Bütün bu yaptıklarımızı kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}$ yerine, mot à mot, gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ ile yapabilirdik.