Beşinci Kısım:

Ekler

Ek 1. Bölüm Cisimleri ve Yerelleştirme

1. Örnekler. Yazımıza örneklerle başlayalım, ne yapmak istediğimizi en iyi örneklerle anlatabileceğiz.

a) Tamsayılar kümesi $\mathbb{Z}$ değişmeli bir halkadır[1], ama bir cisim değildir, çünkü bir cisimde, cismin tanımı gereği, 0'a eşit olmayan her elemanın çarpımsal tersi olmalıdır ve $\mathbb{Z}$'de 0'a eşit olmayan her elemanın çarpımsal tersi yoktur. Örneğin 2'nin çarpımsal tersi olan (ya da olması gereken) 1/2 sayısı $\mathbb{Z}$'de değildir. Daha doğru (yani daha matematiksel) bir ifadeyle, $\mathbb{Z}$'de $2x = 1$ denklemini çözemeyiz.

Öte yandan kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}$, tamsayıları içeren bir cisimdir[2], hatta $\mathbb{Q}$, şu anlamda tamsayıları içeren cisimlerin en küçüğüdür: Tamsayıları içeren her cismin içinde $\mathbb{Q}$'nün bir "kopyası" bulunur. Bu ifadeyi yazının en sonunda daha anlamlı bir hale getireceğiz. Şimdilik sezgilerimizle yetinelim.

b) $p \in \mathbb{Z}$ sabit bir asal olsun. p elbette $\mathbb{Z}$'de tersinir değildir, çünkü $1/p \notin \mathbb{Z}$. Şimdi,

$$\mathbb{Z}_{\langle p \rangle} = \{a/p^n : n \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{Z}\}$$

1 Yani her x ve y için $xy = yx$ eşitliği geçerlidir.

2 Yani hem değişmeli bir halkadır hem de 0 dışında her elemanın çarpımsal bir tersi vardır: Her $x \neq 0$ için, $xy = 1$ eşitliğini sağlayan bir y vardır.

olsun. Kolayca görüleceği üzere, $\mathbb{Z}_p$ kümesi toplama, çıkarma ve çarpma işlemleri altında kapalıdır, ayrıca 1'i de içerir, yani bir halkadır. Bu halkanın tersinir elemanları, bir $n \in \mathbb{Z}$ için $\pm p^n$ biçiminde yazılan sayılardır.

$\mathbb{Z}_{\langle p \rangle}$, belli ki, $\mathbb{Z}$'yi içeren ve p'nin tersinir olduğu "en küçük" halkadır. "En küçük halka" ifadesinin ne demek olduğunu yazının en sonunda matematiksel olarak açıklayacağız.

c) Katsayıları tamsayılar olan polinomları ele alalım. Bu polinomların kümesi $\mathbb{Z}[X]$ olarak yazılır.

$$(X^2 + 1)/(X - 1)$$

türünden ifadeler $\mathbb{Z}[X]$'te değiller. Polinom olmasalar da bu tür ifadeler matematikte sık sık kullanılırlar. "Kesirli sayılar"dan esinlenerek bu tür nesnelere ***kesirli polinom*** adını verelim. Bir kesirli polinom, tanımı gereği, $f, g \in \mathbb{Z}[X]$ ve $g \neq 0$ için, f/g biçiminde yazılan bir terimdir. Kesirli polinomlar kümesi $\mathbb{Q}(X)$ olarak ($\mathbb{Z}(X)$ değil!) gösterilir:

$$\mathbb{Q}(X) = \{f/g : f, g \in \mathbb{Z}[X] \text{ ve } g \neq 0\}.$$

Basit ama önemli bir olgu: Eğer $fk = gh$ ise, f/g kesirli polinomu h/k kesirli polinomuna eşittir. Bunun tersi de doğrudur: Eğer $f/g = h/k$ ise, $fk = gh$ eşitliği de doğrudur.

Kesirli polinomlar kümesinde toplama, çıkarma ve çarpma yapmasını okur herhalde biliyordur:

$$f/g \pm h/k = (fk \pm gh)/gk \text{ ve } (f/g) \times (h/k) = fh/gk.$$

Böylece tanımlanan toplama, çıkarma ve çarpma işlemleri altında, kesirli polinomlar kümesi bir halkadır. Hatta halkadan öte, bir cisimdir de: $f/g \neq 0$ ise, bu kesirli polinomun çarpımsal tersi g/f kesirli polinomudur.

Her f polinomunu $f/1$ biçiminde yazarsak, her polinomun aslında kesirli bir polinom olduğunu anlarız. (Her tamsayı da aynı zamanda kesirli bir sayıdır.)

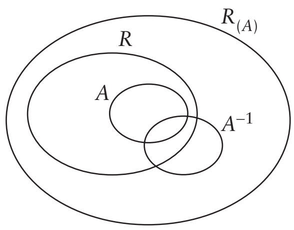
Ne yaptık? $\mathbb{Z}[X]$ polinom halkasını $\mathbb{Q}(X)$ diye bir cismin içinde soktuk. Daha önce de $\mathbb{Z}$ halkasını benzer biçimde $\mathbb{Q}$ cisminin içine sokmuştuk.

d) Katsayıları kesirli sayılar olan polinom halkası $\mathbb{Q}[X]$ olarak yazılır. Şu S kümesine bakalım:

$$S = \{f(X)/X^n : f \in \mathbb{Q}[X],\ n \in \mathbb{N}\}.$$

S, elbette $\mathbb{Q}(X)$ cisminin bir altkümesidir ve $\mathbb{Q}[X]$ halkasını içerir ($f(X)/X^n$ ifadesinde $n = 0$ alın.) Ayrıca, toplama, çıkarma ve çarpma altında kapalı olduğundan S bir halkadır. Bu halkada X tersinirdir, çünkü $1/X \in S$. Dikkatle incelenecek olursa, S'nin, bir anlamda, X'in tersinir olduğu ve $\mathbb{Q}[X]$'i içeren en küçük halka olduğu kolaylıkla anlaşılır. S'de, örneğin $1 + X$ tersinir değildir. (Neden?)

2. Amaç. Bu örneklerden sonra yazının amacını açıklayalım. Amacımız, değişmeli bir R halkası ve bu halkanın bir A altkümesi verildiğinde, A'nın elemanlarının içinde tersinir olduğu R'yi altküme olarak içeren bir halka bulmak ve bunu en **ekonomik** biçimde yapmak. Uygulamada en çok, R'nin bir bölge olduğu, yani A'nın $R \setminus \{0\}$ olabileceği durum kullanılır.



Bulmak istediğimiz bu halkayı R_A olarak yazalım. R_A'dan özetle şunları istiyoruz:

i. R_A, R'yi içeren bir halka olsun.

ii. $R \leq R_A$ olsun. Yani her iki halkanın da birim elemanları aynı olsun ve her $x, y \in R$ için, $x + y$ ve xy'nin değerleri, R'de de hesaplansa, R_A'da da hesaplansa aynı olsun.

iii. A'nın her elemanı R_A'da tersinir olsun.

iv. R_A'da sadece yukardaki özellikleri sağlayacak kadar eleman olsun, gereksiz elemanlar olmasın. (Bunu daha matematiksel bir biçimde de söyleyebilirdik, yazının sonunda söyleyeceğiz de.)

Yukardaki dört örnekte R, A ve R_A şöyle:

a) $R = \mathbb{Z}$, $A = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ya da $A = \{\mathbb{Z}\text{'nin asalları}\}$ ve $R_A = \mathbb{Q}$.

b) $R = \mathbb{Z}$ ve $A = \{p\}$ ya da $A = \{p^n : n \in \mathbb{Z}\}$ ve $R_A = \mathbb{Z}_{\langle p \rangle}$.

c) $R = \mathbb{Z}[X]$, $A = \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$ ve $R_A = \mathbb{Q}(X)$.
d) $R = \mathbb{Q}[X]$, $A = \{X\}$ ya da $A = \{X^n : n \in \mathbb{Z}\}$ ve $R_A = S$.

3. Arayış. Bir an için dilediğimiz gibi bir R_A halkasının varolduğunu varsayıp bu halkanın ne menem bir şey olduğunu anlamaya çalışalım. Ancak R_A'nın ne menem bir şey olması gerektiğini anladıktan sonra R_A halkasını inşa edeceğiz.

Şunu da belirtelim ki, illa yukardaki özellikleri sağlayan R_A diye bir halka olmak zorunda değildir. Böyle bir R_A halkası olmayabilir de... R_A'nın varlığı ve yokluğu A'ya göre değişebilir, bazı A'lar için olabilir bazı A'lar için olmayabilir. R verildiğinde, R_A halkasının hangi A'lar için olduğunu da bulacağız.

Eğer $A = \emptyset$ ise, $R_A = R$ alırsak problemi çözmüş oluruz. Bundan böyle $A \neq \emptyset$ olsun.

Eğer $a \in A$ ise, a, R_A halkasında tersinirdir, çünkü öyle olsun istiyoruz. a'nın R_A halkasındaki tersini, alışıldığı üzere, a^{-1} ya da $1/a$ olarak gösterelim.

A'nın elemanları R_A halkasında tersinir olduklarından, A'nın hiçbir a elemanı (ne R'de ne de R_A'da) bir ***sıfırbölen*** olamaz, yani $ab = 0$ ise $b = 0$ olmak zorundadır. İşte bunun kanıtı:
$$0 = a^{-1}0 = a^{-1}(ab) = (a^{-1}a)b = 1.b = b.$$
Demek ki 0 elemanı da A'da olamaz.

Bundan böyle A'nın hiçbir elemanının sıfırbölen olmadığını varsayalım (yoksa istediğimiz özellikleri sağlayan bir R_A halkası bulamayız.)

Eğer $r \in R$ ise, $r \in R_A$ olmalı, çünkü R_A'nın R'yi içermesini istiyoruz. Demek ki her $r \in R$ ve $a \in A$ için, R_A halkasında r ile $1/a$ elemanlarını çarpabilmeliyiz. R_A halkasında olması gereken bu çarpımı r/a olarak yazalım. Elbette
$$r/a = ra^{-1},$$
$$a(r/a) = r$$
ve
$$s(r/a) = (sr)/a$$
gibi eşitlikler R_A halkasında sağlanmalı.

Bir halka olduğundan, R_A'nın r/a biçiminde yazılmış elemanlarını toplayıp çarpabilmeliyiz. r/a ve s/b elemanlarının bir halkada nasıl toplanıp çarpılmaları gerektiği belli: Halkanın en basit özelliklerinden,

$$r/a \pm s/b = (rb \pm sa)/ab \text{ ve } r/a \times s/b = rs/ab$$

çıkar.

Yukardaki üç formüle bakarsak, $a, b \in A$ ise, ab'nin de A'da olmasının yararlarını görürüz, çünkü o zaman yukardaki üç işlemin herbirinin sonucunun paydasında hep A'nın elemanları olmuş olur. Zaten, eğer A çarpma altında kapalı değilse, A yerine A'nın elemanlarının tüm sonlu çarpımlarının kümesini alarak, A'nın çarpma altında kapalı olduğunu varsayabiliriz, çünkü bu sonlu çarpımlar da R_A'da tersinlenmeli. Bundan böyle A'nın gerçekten çarpma altında kapalı olduğunu varsayalım. Yeni A'nın da, eski A gibi, sıfırbölen içermediğini dikkatinize sunarım.

A artık çarpma altında kapalı olduğundan, yukardaki formüllerden,

$$\{r/a : r \in R, a \in A\}$$

kümesinin toplama, çıkarma ve çarpma altında kapalı olduğunu anlarız.

Bütün bunları, R_A'nın olduğunu varsayarak yaptık. Sezgilerimizle, R_A halkasının, eğer varsa, yukardaki gibi bir küme olması gerektiğini gördük. Demek ki R_A adayımız,

$$\{r/a : r \in R, a \in A\}$$

kümesi olmalı.

Bu, hemen hemen doğru, ama tam doğru değil, çünkü R halkası bu aday kümenin bir altkümesi olmayabilir. Nitekim, R'nin her elemanı illa belli bir $r \in R$ ve $a \in A$ için r/a biçiminde yazılmak zorunda değil. Ama 1'i de A'nın içine atarsak, yani eğer A yerine $A \cup \{1\}$ kümesini alırsak, o zaman, $r = r/1$ eşitliğinden, R'nin aday kümenin bir altkümesi olduğu anlaşılır. (Ayrıca A'nın sıfırböleni olmama ve çarpma altında kapalı olma özellikleri hâlâ korunur.)

Bundan böyle $A \subseteq R$, sıfırböleni olmayan, çarpma altında kapalı olan ve 1'i içeren bir küme olsun. O zaman R_A halkası, eğer varsa,

$$\{r/a : r \in R, a \in A\}$$

olmalı. Toplama, çıkarma ve çarpma da yukarda açıklandığı gibi olmalı.

Olmalı ama r/a diye bir eleman yok ki evrenimizde! Kendinizi tamsayıları bilen ama kesirli sayıların ne demek olduğunu bilmeyen bir çocuk yerine koyarsanız ne demek istediğimi anlarsınız. 2/3 gibi, r/a diye elemanlar yaratmalıyız, çünkü elimizde sadece r ve a diye nesneler var, r/a diye bir nesne yok.

Adına "r/a" diyeceğimiz nesneler yaratmalıyız, yaratacağız da, yaratması da kolay. Bunun için adına r/a diyeceğimiz yepyeni, daha önce olmayan soyut şeyler yaratmak yeterli!

Eğer bütün r/a elemanları birbirinden değişik olsalardı gerçekten de böyle yapardık. Ama, öyle değil, örneğin, eğer $b \in A$ ise,

$$r/a = (rb)/(ab)$$

olmak zorunda. Sözünü etmek istediğimiz sorun şu: R_A halkasının bir r/a elemanı, $s \neq r$ ve $b \neq a$ için aynı halkanın s/b elemanına eşit olmak zorunda olabilir ve o zaman soyut r/a ve s/b elemanları yaratmak bu eşitliği gözardı eder ve eşit olmaları gereken r/a ve s/b birbirine eşit olmaz... Bilmem anlatabildim mi?

R_A halkasının bir r/a elemanı ne zaman aynı halkanın bir s/b elemanına eşit olur, daha doğrusu olmak zorunda kalır? $r/a = s/b$ eşitliğini ab'yle çarparsak, R'de geçerli olan $rb = sa$ eşitliğini buluruz. Bunun tersi de doğrudur: Eğer R'de $rb = sa$ eşitliği sağlanıyorsa, o zaman R_A halkasında, bu eşitliği ab'ye bölerek, $r/a = s/b$ eşitliğinin geçerli olduğunu anlarız.

Şimdi artık R_A halkasının elemanlarının ne olması gerektiğini aşağı yukarı biliyoruz. Yukardaki bilgileri biçimselleştirmeliyiz, yani bildiklerimizi matematikçeye çevirmeliyiz.

4. Plan. Yukardaki uzun tartışmadan sonra R_A halkasını yaratacak planı kuralım. R_A halkasının r/a elemanlarını yaratacağız. Evrenimizde r/a diye elemanlar yok ama (r, a) diye çiftler var, bunlar $R \times A$ kümesinin elemanları. R_A halkasının r/a elemanını (r, a) çifti olarak görmek istiyoruz.

Ama o zaman da yukarda sözettiğimiz sorun çıkacak karşımıza: (r, a) çifti, (s, b) çiftine eşit olmayabilir ama R_A halkasında $r/a = s/b$ eşitliği boy gösterebilir. O zaman da eşit olmaları gereken (r, a) ve (s, b) çiftleri birbirine eşit olmazlar. Biz de eşit olmasını istediğimiz bu çiftlere birbirine ***denk*** çiftler diyelim ve bunu $\equiv$ olarak yazalım. Matematiksel tanım az sonra.

5. Matematiksel Tanımlar. Nihayet matematik yapabileceğiz. Yukarda söylenen her şeyi unutun, daha doğrusu unutmuş gibi davranın! Baştan başlıyoruz. Önce tanımlar.

R bir halka. A, R'nin çarpma altında kapalı, 1'i içeren ama 0'ı içermeyen (dolayısıyla sıfırbölen de içermeyen) bir altkümesi.

Eğer $(r, a), (s, b) \in R \times A$ ise,

$$(r, a) \equiv (s, b)$$

ilişkisini,

$$rb = sa$$

olarak tanımlayalım ve bu durumda (r, a), (s, b) elemanlarına ***birbirine denk*** diyelim. Bu denklik daha sonra $r/a = s/b$ olarak yorumlanacak, ama daha değil. Demek ki,

$$(r, a) \equiv (s, b) \Leftrightarrow rb = sa.$$

Önsav E1.1. *$R \times A$ kümesi üzerine,*

$$(r, a) \equiv (s, b) \Leftrightarrow rb = sa$$

olarak tanımlanan ilişki bir denklik ilişkisidir.

Kanıt: Önce $(r, a) \equiv (r, a)$ ilişkisini kanıtlayalım. Tanıma göre, bu, matematiğin en doğru eşitliklerinden biri olan $ra = ra$ anlamına gelir.

Şimdi $(r, a) \equiv (s, b)$ ise $(s, b) \equiv (r, a)$ eşitliğini kanıtlamalıyız. Bu çok kolay, okura bırakıyoruz.

Son olarak, $(r, a) \equiv (s, b)$ ve $(s, b) \equiv (t, c)$ ilişkileri geçerliyse $(r, a) \equiv (t, c)$ ilişkisini kanıtlamalıyız, yani $rb = sa$ ve $sc = tb$ ise $rc = ta$ eşitliğini kanıtlamalıyız. Kanıtlayalım:

$$(rc)b = (sa)c = (sc)a = (tb)a = (ta)b$$

eşitliğinden,

$$(rc - ta)b = 0$$

elde ederiz. b, A'da olduğundan sıfırbölen olamaz. Bu eşitlikten $rc - ta = 0$, yani $rc = ta$ çıkar. □

Eğer $(r, a) \in R \times A$ ise, $[r, a]$ kümesini, (r, a) elemanının denklik sınıfı olarak tanımlayalım:

$$\begin{aligned}[r, a] &= \{(s, b) \in R \times A : (r, a) \equiv (s, b)\}\\ &= \{(s, b) \in R \times A : br = as\}.\end{aligned}$$

Her $[r, a]$'nın $R \times A$ kümesinin bir altkümesi olduğunu unutmayalım. Örneğin,

$$[1, 1] = \{[a, a] : a \in A\},$$
$$[0, 1] = \{[0, a] : a \in A\}$$

ve her $r \in R$, $a, b \in A$ için $(br, ba) \in [r, a]$

Sonuç E1.2. *$R \times A$'nın $[r, a]$ ve $[s, b]$ altkümeleri ya birbirine eşittir ya da iki ayrık kümedir. Yani her, $(r, a), (s, b) \in R \times A$ için, ya $[r, a] = [s, b]$ ya da $[r, a] \cap [s, b] = \varnothing$'dir. Ayrıca birinci şık ancak ve ancak $(r, a) \equiv (s, b)$ ise mümkündür.*

R_A kümesini $(R \times A)/\equiv$ bölüm kümesi olarak tanımlayalım.

$$R_A = (R \times A)/\equiv\ = \{[r, a] : r \in R, a \in A\}.$$

İlerde, R_A'nın r/a elemanı $[r, a]$ olarak tanımlanacak.

Daha R_A üzerine hiçbir işlem tanımlamadık, R_A henüz sadece safkan bir küme. İşlemleri şimdi tanımlıyoruz:

$$(r, a), (s, b) \in R \times A$$

olsun.

$$[r, a] + [s, b] \text{ ve } [r, a] \times [s, b]$$

işlemlerini tanımlayacağız. Eğer $[r, a]$'nın r/a ve $[s, b]$'nin s/b anlamına geleceğini hesaba katarsak, tanımların nasıl olması gerektiği belli:

$$[r, a] + [s, b] = [rb + sa, ab]$$
$$[r, a] \times [s, b] = [rs, ab].$$

Yalnız bu tanımlarda önemli bir sorun çıkabilir. Örneğin toplamanın tanımında şöyle bir sorun çıkabilir:

$$[r, a] = [r', a'] \text{ ve } [s, b] = [s', b']$$

olabilir ve o zaman yukarda tanımlanan $[r, a] + [s, b]$'nin

$$[r', a'] + [s', b']$$

elemanına eşit olması gerekir, ki toplama işlemi gerçekten hakkıyla tanımlanmış bir işlem olsun, ne de olsa birbirine eşit elemanlar toplandığında toplamlar farklı çıkmamalı! Bir sonraki önsav bunun bir sorun olmadığını söylüyor:

Önsav E1.3. $(r, a), (r', a'), (s, b), (s', b') \in R \times A$ *olsun. Eğer* $[r, a] = [r', a']$ *ve* $[s, b] = [s', b']$ *ise o zaman*

$$[rb + sa, ab] = [r'b' + s'a', a'b']$$

ve

$$[rs, ab] = [r's', a'b'].$$

Kanıt: Son derece basit, sadece tanımları uygulamak yeterli. Kolay kanıtı okura bırakıyoruz. □

Artık yukarda önerdiğimiz gibi,

$$[r, a] + [s, b] = [rb + sa, ab]$$
$$[r, a] \times [s, b] = [rs, ab].$$

toplama ve çarpma tanımlarını yapabiliriz, buna hakkımız olduğunu gördük.

Önsav E1.4. R_A *kümesi yukardaki işlemlerle bir halkadır.* $[0, 1]$ *elemanı toplamanın etkisiz elemanı*, $[1, 1]$ *ise çarpmanın etkisiz elemanıdır*. $[-r, a]$ *elemanı* $[r, a]$ *elemanının toplama için* *tersidir. Ayrıca eğer* $a \in A$ *ise*, $[a, 1]$ *elemanı halkada tersinirdir ve bu elemanın tersi* $[1, a]$ *elemanıdır.*

Kanıt: Sadece tanımları uygulamak yeterli. □

Şimdi geriye R'nin R_A halkasının bir altkümesi olduğunu kanıtlamak kalıyor. Ama bu yanlış! Hatta R ile R_A kümeleri çoğu zaman kesişmez bile.

Evet, R, R_A'nın bir altkümesi değil ama, R'ye çok benzeyen bir althalka var R_A'da: $[r, 1]$ türünden yazılan elemanların kümesi R_A'nın R'ye çok benzeyen althalkasıdır. Nitekim, her $r, s \in R$ için,

$$[r, 1] + [s, 1] = [r + s, 1]$$
$$[r, 1][s, 1] = [rs, 1].$$

Görüldüğü gibi, R'deki toplama ve çarpma işlemleri aynen R_A'nın $\{[r, 1] : r \in R\}$ kümesine yansıyor.

Önsav E1.5. $i : R \to R_A$ *fonksiyonu* $i(r) = [r, 1]$ *kuralıyla tanımlanmış olsun. O zaman,*

a) *i birebirdir.*

b) *i toplamaya ve çarpmaya saygı duyar, yani, her* $r, s \in R$ *için,*

$$i(r + s) = i(r) + i(s),$$
$$i(rs) = i(r)i(s).$$

c) *i, R halkasının birim elemanını R_A halkasının birim elemanına götürür.*

Kanıt: Sadece tanımları uygulamak yeterli. □

Yukardaki b ve c koşullarını sağlayan bir fonksiyona halkaların ***eşyapı fonksiyonu*** adı verilir. (c koşulu küçümsenmemelidir!)

Yukardaki önsavı dikkate alarak, bundan böyle R'nin r elemanıyla R_A'nın $i(r)$ elemanı arasında bir fark gözetmeyeceğiz. Bir başka deyişle, R_A kümesinden $i(R)$ altkümesini kesip, onun yerine R kümesini koyacağız, yani $i(R)$'le R'yi özdeşleştireceğiz.

Böylece R_A'dan $[r, 1]$ elemanını silip yerine r'yi koymuş oluruz ve R yapay yolla da olsa R_A'nın bir altkümesi olur. Bu yöntemle A'nın elemanları R_A'da tersinir oldular:

$$a^{-1} = [1, a].$$

Bunun sonucu olarak

$$[r, a] = [r, 1][1, a] = ra^{-1} = r/a$$

yazabiliriz. Demek ki,

$$R_A = \{r/a : r \in \mathrm{R}, a \in A\},$$

tam istediğimiz gibi bir halka.

Burada açıklanması uzun sürecek geometrik nedenlerden, R_A halkasına R'nin A'da ***yerelleştirilmişi*** adı verilir. Eğer R bir bölgeyse, yani $xy = 0$ eşitliği $x = 0$ ya da $y = 0$ eşitliklerinden birini gereksindiriyorsa, bir üst halkada tersinlemek istediğimiz A kümesi yerine $R \setminus \{0\}$ alabiliriz. O zaman, R_A bir cisim olur (neden?) ve bu durumda R_A cismine R'nin ***bölüm cismi*** (field of fractions) adı verilir.

Eğer R bir bölgeyse ve $p \in R$ bir asalsa [yani her x ve y için, p, xy'yi böldüğünde p ya x'i ya da y'yi bölüyorsa, $A = R \setminus pR$ olabilir. Kolayca görüleceği üzere, $1 \in A$'dır ve p asal olduğundan, A çarpma altında kapalıdır. Örneğin eğer p, $\mathbb{Z}$'nin ya da $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]$'in bir asalıysa,

$$\{a/n \in \mathbb{Q} : a, n \in \mathbb{Z}, \mathrm{ebob}(p, n) = 1\}$$

ve

$$\{a/b \in \mathbb{Q}(\mathrm{X}) : a, b \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}], \mathrm{ebob}(p, b) = 1\}$$

bu tür yerelleştirilmiş halkalardandır. Ek 2'de aynı şeyi değişmeli olmayan halkalar üzerinde deneyeceğiz.

6. En Küçük Ne Demek? Şimdi R'nin bir bölge olduğunu varsayalım ve R'nin bölüm cisminin neden ve hangi anlamda R'yi içeren en küçük cisim olduğunu matematiksel olarak açıklayalım.

Teorem E1.6. *R bir bölge olsun ve F, R'nin yukarda inşa edilen bölüm cismi olsun. K herhangi bir cisim ve*

$$\varphi : R \to K$$

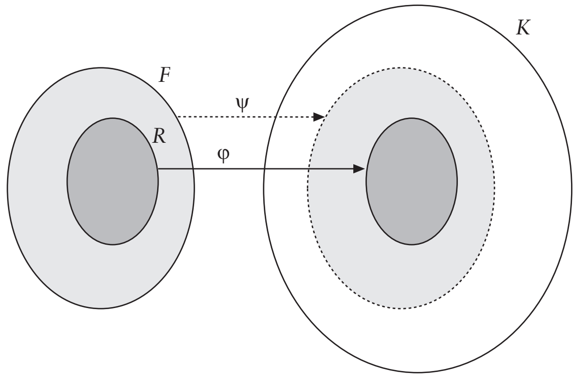
herhangi bir birebir eşyapı fonksiyonu olsun (yani φ toplamaya ve çarpmaya saygı duysun.) O zaman, her $r \in R$ için,

$$\psi(r) = \varphi(r)$$

eşitliğini sağlayan bir ve bir tane birebir

$$\psi : F \to K$$

eşyapı fonksiyonu vardır. Ayrıca, yukardaki özelliği sağlayan ve R'yi içeren her F' cismi, F'ye eşyapısal olmak zorundadır.



Kanıt: Herhangi bir $\alpha \in F$ alalım. α'yı, $r, s \in R$ olmak üzere, r/s olarak yazabiliriz: $\alpha = r/s$. Demek ki $s\alpha = r$. Eğer söz edildiği gibi bir $\psi : F \to K$ eşyapı fonksiyonu varsa, o zaman,

$$\varphi(r) = \psi(r) = \psi(s\alpha) = \psi(s)\psi(\alpha) = \varphi(s)\psi(\alpha)$$

olmalı, yani,

$$\psi(\alpha) = \varphi(s)^{-1}\varphi(r)$$

olmalı, başka seçenek olamaz. Demek ki söylendiği gibi bir ψ varsa ancak bir tane olabilir. Şimdi ψ'nin varlığını kanıtlayalım. Elbette, ψ'yi şöyle tanımlayacağız: Herhangi bir $\alpha \in F$ alalım. α'yı, $r, s \in R$ olmak üzere, r/s olarak yazalım: $\alpha = r/s$. Burada s'nin 0 olamayacağına dikkatinizi çekerim. Şimdi,

$$\psi(\alpha) = \varphi(s)^{-1}\varphi(r) \in K$$

olsun. Bu tanımın matematiksel açıdan sakıncalı olmadığını gösterelim.

Her şeyden önce, $\varphi(s) \in R \leq K$. Eğer $\varphi(s) = 0$ olsaydı,

$$\varphi(s) = 0 = \varphi(0)$$

olurdu ve birebirlikten dolayı $s = 0$ olmak zorunda olurdu, ki bunun doğru olmadığını biliyoruz. Demek ki $s \neq 0$ ve K'da $j(s)$'nin tersi vardır, yani olduğundan ve K bir cisim olduğundan, $\varphi(s)^{-1}$, K'dadır. Dolayısıyla K'nın $\varphi(s)^{-1}\varphi(r)$ elemanından sözedebiliriz.) Ama bu yetmez. Tanımın gerçekten iyi bir tanım olduğunu kanıtlamalıyız. Yani $\varphi(s)^{-1}\varphi(r)$ gerçekten K'nin bir elemanı.

Daha bitmedi. Eğer

$$\alpha = r/s = r'/s'$$

ise,

$$\varphi(s)^{-1}\varphi(r) = \varphi(s')^{-1}\varphi(r')$$

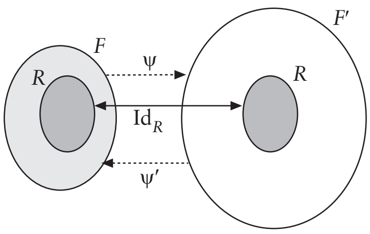
olmalı ki, ψ'nin önerilen tanımı bize çelişik sonuçlar vermesin. (Burada $r, s, r', s' \in R$ ama $s, s' \neq 0$.) Bunu hemen kanıtlayalım: R halkasında $s'r = r's$ eşitliği geçerli olduğundan, her iki tarafa da φ'yi uygularsak,

$$\varphi(s')\varphi(r) = \varphi(s)\varphi(r')$$

olmalı. Buradan da istenilen

$$\varphi(s)^{-1}\varphi(r) = \varphi(s')^{-1}\varphi(r')$$

eşitliği çıkar.



Şimdi ikinci kısmı kanıtlayalım. R'yi içeren F' cismi aynen teoremin birinci kısmında belirtilen özelliğe sahip olsun. Id_R, R'den R'ye giden özdeşlik fonksiyonu olsun: Her $r \in R$ için, $\mathrm{Id}_R(r) = r$.

Şimdi teoremin birinci kısmında K yerine F' ve φ yerine Id_R alalım. O zaman her $r \in R$ için,

$$\psi(r) = \mathrm{Id}_R(r) = r$$

eşitliğini sağlayan birebir bir

$$\psi : F \to F'$$

eşyapı fonksiyonu vardır.

İkinci olarak F ile F' cisimlerinin rollerini değiştirelim. Varsayıma göre, her $r \in R$ için,

$$\psi'(r) = \mathrm{Id}_R(r) = r$$

eşitliğini sağlayan birebir bir

$$\psi' : F' \to F$$

eşyapı fonksiyonu vardır.

Demek ki,

$$\psi' \circ \psi : F \to F$$

eşyapı fonksiyonu, her $r \in R$ için,

$$(\psi' \circ \psi)(r) = r$$

eşitliğini sağlar. Ama $\mathrm{Id}_F : F \to F$ özdeşlik fonksiyonu da her $r \in R$ için bu eşitliği sağlar. Bu eşitliği sağlayan fonksiyonun biricikliğinden dolayı,

$$\psi' \circ \psi = \mathrm{Id}_F$$

eşitliği geçerlidir. $\psi' \circ \psi$ yerine $\psi' \circ \psi : F' \to F'$ eşyapı fonksiyonunu ele alacak olursak, aynı şekilde

$$\psi' \circ \psi = \mathrm{Id}_{F'}$$

eşitliğini elde ederiz. Bundan da ψ'nin birebir ve örten, yani bir eşyapı eşlemesi olduğu çıkar. □

Bölüm cisminin yukardaki teoremde yazılan özelliği görüldüğü gibi bölüm cisminin eşyapısallığını belirliyor. Bu özellik, "evrensel özelliklere" bir örnektir. "Evrensel özelliklere" cebirde daha çok rastlayacağız. Benzer sonuç yerelleştirilmiş R_A halkaları için de geçerlidir. Bu sonucu yazmayı ve kanıtlamayı okura alıştırma olarak bırakıyoruz.

Ek 2. Ore Bölgeleri ve Halkaları

Geçen bölümde, bir bölgenin bölüm cismini tanımlamış ve var etmiştik: Eğer R bir bölgeyse, R'nin 0 dışındaki elemanlarının tersinir olduğu en küçük halkayı (aslında cismi) bulmuştuk.

Bir R halkasının bölge olması için iki koşul gereklidir:

Her $x, y \in R$ *için* $xy = yx$,

yani halka değişmelidir, ve

Her $x, y \in R$ *için*, $xy = 0$ *ise ya* $x = 0$ *ya da* $y = 0$*'dır. Yani* 0 *elemanı halkanın tek sıfırbölenidir*.

Bu bölümde, Ek 1'de yaptığımızın benzerini değişmeli olmayan halkalarda yapmaya çalışacağız. Her zaman başarılı olamasak da başarılı olmamız için yeterli koşulu göreceğiz.

İkinci koşuldan vazgeçemeyiz çünkü R'nin 0 dışındaki elemanlarının daha büyük bir halkada tersinir olmaları için bu koşul illa ki gereklidir. Ama eğer birinci koşuldan vazgeçiyorsak, ikinci koşulu güçlendirmemiz gerekir. Bundan böyle, her x, y elemanı için,

$xy = 0$ *ya da* $yx = 0$ *ise*, *ya* $x = 0$ *ya da* $y = 0$*'dır*

koşulunu sağlayan R halkalarında çalışalım.

Öyle bir D halkası bulacağız ki,

1) R, D'nin bir althalkası olacak,

2) R'nin 0 dışındaki her elemanı D'de tersinir olacak[1],

3) Her $d \in D$ için $d = s^{-1}r$ koşulunu sağlayan $r, s \in R$ elemanları olacak. (s tabii ki 0 olamaz.)

Son iki özellikten D'nin 0 olmayan her d elemanının tersinir olduğu çıkar. Nitekim, eğer $r, s \in R$ için $d = s^{-1}r$ ise, $r \neq 0$ olur, dolayısıyla D'de r'nin tersi olan r^{-1} vardır ve $r^{-1}s$ elemanı D'dedir. Kolayca görüleceği üzere bu $r^{-1}s$ elemanı d'nin tersidir. 0 olmayan her elemanının tersinir olduğu bu tür halkalara ***bölüm halkası*** denir. Bir bölüm halkasının cisim olması için çarpmanın değişkenliği yeter ve gerek koşuldur (neden?)

Yukardaki (3) koşulu yerine şu koşulu da alabilirdik:

3′) Her $d \in D$ için $d = rs^{-1}$ koşulunu sağlayan $r, s \in R$ elemanları olacak.

R, illa değişkenli bir halka olmadığı için (3) ve (3′) koşulları birbirlerine denk olmayabilirler, yani birinin doğru olması, diğerinin de doğru olduğu anlamına gelmeyebilir, nitekim gelmez de.

D'yi inşa etmek için daha önceki bölümde kullandığımız yöntemi deneyeceğiz. D'nin $s^{-1}r$ elemanını (r, s) ikilisi olarak göstereceğiz ve $R \times R \setminus \{0\}$ kümesi üzerinde $\equiv$ ikili ilişkisini, inşa edeceğimiz D'de

$$(r, s) \equiv (t, u) \Leftrightarrow s^{-1}r = u^{-1}t$$

denkliği doğru olacak biçimde tanımlayacağız. Yalnız sağ taraftaki

$$s^{-1}r = u^{-1}t$$

koşulu henüz var olmayan ve daha sonra, ancak D'yi inşa ettiğimiz zaman var olacak olan s^{-1} ve u^{-1} elemanlarını kullanıyor. R değişkenli bir halka olduğunda, doğru olması gereken

$$s^{-1}r = u^{-1}t \Leftrightarrow ur = st$$

denkliğini kullanıp, $\equiv$ ikili ilişkisini,

1 Burada, bir $x \in D$ elemanının tersinir olması demek, hem $xy = 1$ hem de $yx = 1$ eşitliklerini sağlayan bir $y \in D$ olması demektir.

$$(r, s) \equiv (t, u) \Leftrightarrow ur = st$$

olarak tanımlamıştık. Ama artık R'nin değişkenli bir halka olduğunu varsaymıyoruz. Dolayısıyla ciddi bir sorunla karşı karşıyayız. $s^{-1}r = u^{-1}t$ koşuluyla eşdeğer olan ama R'nin elemanları kullanılarak ifade edilebilen bir eşitlik arıyoruz.

$s^{-1}r = u^{-1}t$ eşitliğinde s'yi diğer tarafa geçirip hiç olmazsa s^{-1} teriminden kurtulabiliriz:

$$s^{-1}r = u^{-1}t \Leftrightarrow r = su^{-1}t.$$

Şimdi $r = su^{-1}t$ ilişkisinden R'de olup olmadığından emin olmadığımız u^{-1} terimini atmanın bir yolunu bulmalıyız. (Eğer u'nun tersi R'de olsaydık sorun olmazdı, ama u'nun tersi R'de olmayabilir.)

R değişkenli olduğunda, daha ilerde, D'yi inşa ettiğimizde doğru olacak olan

$$su^{-1} = u^{-1}s$$

eşitliğini kullanmıştık. Bu sefer böyle bir eşitlik geçerli olmayabilir. Bu eşitlik yerine, $s_1, u_1 \in R \setminus \{0\}$ için,

$$su^{-1} = u_1^{-1}s_1$$

eşitliğinin geçerli olduğunu varsayalım. Daha doğrusu, bu eşitlikten ziyade, buna denk olan ama R'de geçerli olan,

$$u_1s = s_1u$$

eşitliğinin geçerli olduğunu varsayalım. Eğer bu koşul her

$$(u, s) \in R \times (R \setminus \{0\})$$

için sağlanıyorsa, halkaya ***sol Ore bölgesi*** adı verilir. Bu varsayım altında,

$$s^{-1}r = u^{-1}t \Leftrightarrow r = su^{-1}t \Leftrightarrow r = u_1^{-1}s_1t \Leftrightarrow u_1r = s_1t$$

eşdeğerliklerine ulaşırız. Demek ki, eğer R bir sol Ore bölgesiyse, $R \times (R \setminus \{0\})$ kümesi üzerine $\equiv$ ikili ilişkisini,

$(r, s) \equiv (t, u)$ ancak ve ancak
$u_1s = s_1u$ ve $u_1r = s_1t$ eşitliklerini
sağlayan $u_1, s_1 \in R \setminus \{0\}$ varsa

yani

$$\exists u_1, s_1 \in R \setminus \{0\}\ (u_1 s = s_1 u \text{ ve } u_1 r = s_1 t\ )$$

olarak tanımlayıp bu tanımın değişmeli halkalarda tanımlanan benzer ilişkiyle aynı işlevi göreceğini umabiliriz.

Sol Ore koşulu, *a/s* ve *b/u* gibi elemanları toplarken paydaları eşitlememize olanak sağlayacak.

Sol Ore Koşulu: Her $s, u \in R \setminus \{0\}$ için,

$$u_1 s = s_1 u$$

eşitliğini sağlayan $u_1, s_1 \in R \setminus \{0\}$ vardır, yani

$$Rs \cap Ru \neq \{0\}$$

olur.

Önsav E2.1. R, *bir sol Ore bölgesiyse*, $R \times (R \setminus \{0\})$ *üzerine yukarda tanımlanan* $\equiv$ *ikili ilişkisi bir denklik ilişkisidir.*

Kanıt: Önce her $r, s \in R \times (R \setminus \{0\})$ için, $(r, s) \equiv (r, s)$ eşitliğini kanıtlamalıyız. Bunun için $u_1 = s_1 = 1$ almak yeterli.

Şimdi $(r, s) \equiv (t, u)$ denkliğini varsayıp $(t, u) \equiv (r, s)$ denkliğini kanıtlayalım. $u_1, s_1 \in R \setminus \{0\}$,

$$u_1 s = s_1 u \text{ ve } u_1 r = s_1 t$$

eşitliklerini sağlasın. $(t, u) \equiv (r, s)$ denkliğini kanıtlamak için,

$$u_2 u = s_2 s \text{ ve } u_2 t = s_2 r$$

eşitliklerini sağlayan $u_2, s_2 \in R \setminus \{0\}$ bulmalıyız. Çok kolay:

$$u_2 = s_1,\ s_2 = u_1$$

olsun.

Buraya kadar Ore koşulunu kullanmadık. Şimdi kullanacağız.

Son olarak, $(r, s) \equiv (t, u)$ ve $(t, u) \equiv (v, w)$ denkliklerini varsayıp $(r, s) \equiv (v, w)$ denkliğini kanıtlayalım. Varsayıma göre,

$$u_1 s = s_1 u,\ u_1 r = s_1 t,\ w_2 u = u_2 w \text{ ve } w_2 t = u_2 v$$

eşitliklerini sağlayan $u_1, s_1, w_2, u_2 \in R \setminus \{0\}$ elemanları var. Ve biz de,

$$w_3 s = s_3 w,\ w_3 r = s_3 v$$

eşitliklerini sağlayan $w_3, s_3 \in R \setminus \{0\}$ elemanları arıyoruz. Ore koşulunu w_2 ve s_1 elemanlarına uygularsak, $as_1 = bw_2$ eşitliğinin geçerli olduğu $a, b \in R \setminus \{0\}$ elemanlarını buluruz. Şimdi hesaplayalım:

$$au_1s = as_1u = bw_2u = bu_2w$$

buluruz. Demek ki $w_3 = au_1$ ve $s_3 = bu_2$ alırsak, $w_3s = s_3w$ birinci eşitliğini elde ediyoruz. Bakalım $w_3r = s_3v$ eşitliği de doğru mu?

$$w_3r = au_1r = as_1t = bw_2t = bu_2v = s_3v.$$

Doğruymuş! Önsavımız kanıtlanmıştır. □

Şimdi $D = (R \times (R \setminus \{0\}))/\equiv$ olsun. D üzerinde bir halka yapısı belirleyeceğiz.

D'nin bir elemanını $[r, s]$ olarak yazalım. Buradaki $[r, s]$ elemanı, $R \times (R \setminus \{0\})$ kümesinin $(r\ s)$ elemanının denklik sınıfıdır. İlerde $[r, s]$'nin $s^{-1}r$ anlamına geleceğini biliyoruz. Eğer $a \in R \setminus \{0\}$ ise $[r, s] = [ar, as]$ eşitliğine dikkatinizi çekerim.

Önce toplamadan başlayalım. İşin özü şu:

$$s^{-1}r + t^{-1}u$$

toplamını $x^{-1}y$ olarak yazmak istiyoruz. Eğer bunu yapabilirsek, o zaman,

$$[r, s] + [t, u] = [x, y]$$

olarak tanımlayabiliriz. Demek ki,

$$x(s^{-1}r + t^{-1}u) \in R$$

olacak biçimde bir $x \neq 0$ bulmak yeterli (o zaman y elemanını $x(s^{-1}r + t^{-1}u)$ olarak alabiliriz).

$$x(s^{-1}r + t^{-1}u) = xs^{-1}r + xt^{-1}u$$

olduğundan, x'i xs^{-1}, $xt^{-1} \in R$ ilişkilerini sağlayacak biçimde seçebilirsek, sorun kalmayacak. Yani x'i $Rs \cap Rt \setminus \{0\}$ kümesinden seçmeye çalışalım. Ama böyle bir x'in olduğunu da sol Ore koşulundan biliyoruz. Şimdi tanımı yapabiliriz.

(r, s), $(t, u) \in R \times (R \setminus \{0\})$ olsun. $x \in Rs \cap Rt \setminus \{0\}$ ve $y = x(s^{-1}r + t^{-1}u) \in R$ olsun. O zaman,

$$[r, s] + [t, u] = [x, x(s^{-1}r + t^{-1}u)]$$

olarak tanımlansın. Ama bu tanım pek o kadar güzel olmadı. R'nin bir elemanı olduğunu bildiğimiz sağ taraftaki $x(s^{-1}r + t^{-1}u)$ teriminde s^{-1} ve t^{-1} gibi R'de olmayan elemanlar gözüküyor. Bu

küçük kusuru giderelim. $s_1 \neq 0$ ve $t_1 \neq 0$ için $x = t_1 s = s_1 t$ eşitliği sağlansın. Şimdi toplamayı
$$[r, s] + [t, u] = [t_1 s, t_1 r + s_1 u]$$
olarak tanımlayalım. Yalnız bu tanımın r, s, t, u, t_1, s_1 elemanlarından bağımsız olduğunu göstermek gerekir. Yani şu önsavı kanıtlamalıyız:

Önsav E2.2. $[r, s] = [r', s']$ *ve* $[t, u] = [t', u']$ *olsun. Ayrıca,*
$$t_1 s = s_1 t \text{ ve } t_1' s' = s_1' t'$$
eşitlikleri sağlansın. O zaman,
$$[t_1 s, t_1 r + s_1 u] = [t_1' s', t_1' r' + s_1' u']$$
eşitliği doğrudur.

Bu önsavı kanıtlamayacağız. Okura alıştırma olarak bırakıyoruz[2]. Bu önsavdan sonra toplama, $t_1 s = s_1 t$ eşitliği sağlayan $t_1, s_1 \in R \setminus \{0\}$ elemanları için,
$$[r, s] + [t, u] = [t_1 s, t_1 r + s_1 u]$$
olarak tanımlansın.

Çarpma için de benzer şeyi yapacağız. Gene işin özüne gidelim:
$$(s^{-1} r)(u^{-1} t)$$
çarpımını $x^{-1} y$ biçiminde yazmak istiyoruz, ki
$$[r, s][t, u] = [y, x]$$
olarak tanımlayabilelim.
$$(s^{-1} r)(u^{-1} t) = s^{-1}(r u^{-1}) t$$
eşitliğinden dolayı, çarpımının en başındaki s^{-1} ile en sonundaki t'nin bir önemi yok elbet. ru^{-1} elemanını $y^{-1} x$ biçiminde yazabilirsek, işimiz biter. O zaman
$$(s^{-1} r)(u^{-1} t) = s^{-1} y^{-1} x t = (ys)^{-1} x t$$
olur ve

2 Dileyen okur John A. Beachy'nin Introductory Lectures on Rings and Modules kitabına bakabilir. London Mathematical Society, Student Texts 47 (1999) ISBN 0521 64340 6 ve 0521 64407 0.

$$[r, s][t, u] = [xt, ys]$$

tanımını deneyebiliriz. Eğer $ru^{-1} = y^{-1}x$ ise, $yr = xu$'dur. Sol Ore koşuluna göre de R'de bu son eşitliği sağlayan $x, y \neq 0$ elemanları vardır. Şimdi çarpmayı tanımlayabiliriz:

$(r, s), (t, u) \in R \times (R \setminus \{0\})$ olsun. $x, y \in R \setminus \{0\}$ elemanları, $yr = xu$ eşitliğini sağlasın.

$$[r, s][t, u] = [xt, ys]$$

tanımını yapalım. Bir kez daha bu tanımın yasal olduğunu kanıtlamalıyız:

Önsav E2.3. $[r, s] = [r', s']$ *ve* $[t, u] = [t', u']$ *olsun. Ayrıca*, $yr = xu$ *ve* $y'r' = x'u'$ *eşitlikleri sağlansın. O zaman*,

$$[xt, ys] = [x't', y's']$$

eşitliği doğrudur.

Böylece çarpmayı yukardaki gibi tanımlayabiliriz.

Eğer tanımda $r = t = 1$ alırsak, o zaman $x = y = 1$ alabiliriz ve

$$[1, s][t, 1] = [t, s]$$

buluruz.

Ama dikkat: Eğer tanımda $s = t = 1$ alırsak, $yr = xu$ eşitliğini sağlayan x ve y elemanları için,

$$[r, 1][1, u] = [x, y]$$

eşitliği bulunur ve $ur = ru$ doğru olmadıkça bu çarpım $[r, u]$ olmaz.

Okur bir de $[r, s][s, r]$ çarpımını hesaplasın.

$$[r, s][s, r] = [s, s] = [1, 1]$$

bulacaktır.

Bütün bunlardan sonra, artık D kümesinin bu iki işlemle birlikte bir halka olduğunu, hatta $[0, 1]$ dışında her elemanın tersinir olduğunu kanıtlayabiliriz. Ayrıca, $r \mapsto [r, 1]$ fonksiyonunun R'den D'ye giden bir halka gömmesi olduğunu kanıtlayabiliriz.

Teorem E.2.4. *R bir sol Ore bölgesiyse, bu tanımlarla*

$$(D, +, \times, [0, 1], [1, 1])$$

yapısı bir halkadır. Bu halkada [0, 1] *toplamanın*, [1, 1] *da çarpmanın etkisiz elemanlarıdır. Eğer* $r \neq 0$ *ise, D'nin her* $[r, s]$ *elemanı tersinirdir ve* $[r, s]^{-1} = [s, r]$*'dir. Ayrıca,*

$$[r, s] = [1, s][r, 1] = [s, 1]^{-1}[r, 1]$$

dir. Dahası, $i(r) = [r, 1]$ *kuralıyla tanımlanan*

$$i : R \to D$$

fonksiyonu birebirdir, toplamaya ve çarpmaya saygı duyar ve R'nin 0 *ve* 1 *etkisiz elemanlarını sırasıyla D'nin* [0, 1] *ve* [1, 1] *etkisiz elemanlarına götürür.*

Eğer $i(R)$ ile R'yi özdeşleştirirsek, istediğimiz,

$$D = (R \setminus \{0\})^{-1}R$$

eşitliğini buluruz.

Son olarak bölge olmayan Ore halkalarından söz edelim. Bir R halkasında,

Her $y \in R$ *için,* $xy = 0$ *ya da* $yx = 0$ *ise* $y = 0$*'dır*

önermesini doğrulayan elemanlara (yani sıfırbölen olmayan elemanlara) ***düzgün eleman*** denir. R'nin düzgün elemanlar kümesini R_0 ile gösterelim. Yukarda yaptıklarımızda, $R_0 = R \setminus \{0\}$ idi.

Sol Ore Koşulu: *Her* $u, s \in R_0$ *için,*

$$u_1 s = s_1 u$$

eşitliğini sağlayan $u_1, s_1 \in R_0$ *vardır.*

Bu koşulu sağlayan bir halkaya ***Ore halkası*** denir. Aynen yukardaki yöntemle, bir R Ore halkasını, R_0'ın elemanlarının tersinir olduğu $D = R_0^{-1}R$ eşitliğini sağlayan bir D halkasının içine gömebiliriz.