21. $\mathbb{R}$'nin Biricikliği

Bu noktaya gelene kadar $\mathbb{R}$'nin birçok özelliğini kanıtladık. Bu özelliklerin bir listesini çıkaralım: 1) $\mathbb{R}$, sıralı bir cisimdir. 2) $\mathbb{R}$ tamdır, yani $\mathbb{R}$'nin her temel (ya da Cauchy) dizisi $\mathbb{R}$'de yakınsaktır. 3) $\mathbb{R}$ bir Arşimet cismidir.

Bu bölümde yukardaki üç özelliği sağlayan $\mathbb{R}$'den başka bir cisim olmadığını kanıtlayacağız. Kanıtlayacağız ama bu yanlış... Örneğin $\mathbb{R}$'nin elemanlarının adlarını değiştirirsek, diyelim her $\alpha \in \mathbb{R}$ için α' diye yepyeni bir eleman yaratırsak, sözgelimi $\alpha' = (\alpha, 0)$ olabilir, ve bu elemanları şöyle toplayıp, çarpıp, sıralarsak:

$$\alpha' + \beta' = (\alpha + \beta)',$$
$$\alpha'\beta' = (\alpha\beta)',$$
$$\alpha' \leq \beta' \Leftrightarrow \alpha \leq \beta,$$

o zaman $\mathbb{R}' = \{\alpha' : \alpha \in \mathbb{R}\}$ kümesi aynen $\mathbb{R}$ gibi yukardaki özellikleri sağlayan bir cisim olur. Dolayısıyla yukardaki özellikleri sağlayan bir tane sıralı cisim olduğunu kanıtlayamayız, yanlış çünkü. Ama şunu kanıtlayabiliriz: Eğer R ve S, tam olan ve Arşimet özelliğini sağlayan iki sıralı cisimse,

$$f(x + y) = f(x) + f(y),$$
$$f(xy) = f(x)f(y),$$
$$f(1_R) = 1_S,$$
$$x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$$

özelliklerini sağlayan bir $f : R \to S$ eşlemesi vardır. Bu durumda, f'ye ***eşyapı eşlemesi*** ve R ve S cisimlerine ***eşyapısal*** denir. İki yapı arasındaki bir eşyapı eşlemesi, yapıların aslında birbirinin tıpatıp aynı olduğunu sadece elemanlarının adlarının değişik olduğunu söyler.

Teorem 21.1. *Tam olan ve Arşimet özelliğini sağlayan iki sıralı cisim eşyapısaldır. Ayrca bu iki cisim arasında tek bir eşyapı eşlemesi vardır.*

Teoremin püf noktası, böyle bir cismin içinde $\mathbb{Q}$'ye çok benzeyen yoğun bir altcismin varlığı ve $\mathbb{Q}$'ye benzeyen cisimlerin eşyapısal olmalarıdır.

Önce R'nin içinde $\mathbb{Q}$'ye çok benzeyen bir altcisim bulalım.

Önsav 21.2. *R sıralı bir cisim olsun. 0_R ve 1_R, sırasıyla toplamanın ve çarpmanın etkisiz elemanları olsunlar. $n > 0$ pozitif bir doğal sayıysa,*

$$i(n) = \underbrace{1_R + \cdots + 1_R}_{n \text{ tane } 1_R} = n_R$$

olsun. $i(0) = 0_R$ olsun. Eğer $n < 0$ negatif bir doğal sayıysa,

$$i(n) = -i(-n) = n_R$$

olsun. O zaman, $n, m \in \mathbb{Z}$ ve *$m \neq 0$ için,*

$$i(n/m) = i(n)/i(m)$$

kuralıyla tanımlanan $i : \mathbb{Q} \to R$ fonksiyonu birebir bir eşyapı fonksiyonudur, yani her $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ için,

$$i(\alpha + \beta) = i(\alpha) + i(\beta),$$
$$i(\alpha\beta) = i(\alpha) + i(\beta),$$
$$i(1) = 1_R\ ,$$
$$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow i(\alpha) \leq i(\beta)$$

önermeleri doğrudur. Ayrıca bundan başka bu özellikleri sağlayan bir $i : \mathbb{Q} \to R$ fonksiyonu yoktur.

Kanıt: Konunun heyecanını öldürmemek için (kolay olan) kanıtı vermiyoruz. □

Kimileyin $i(n)$ yerine n_R yazılır. $i(\mathbb{Q})$ yerine de $\mathbb{Q}_R$ yazmak ve $\mathbb{Q}_R$'ye "R'deki $\mathbb{Q}$" demek fena fikir değildir. Öte yandan, bir karışıklığa neden olması imkânsızsa, $i(q)$ yerine doğrudan q de yazılabilir. Bu arada, her $r \in R$ ve her pozitif $n \in \mathbb{N}$ doğal sayısı için, nr'nin n tane r'nin toplamı olarak tanımlandığını anımsayıp, $nr = i(n)r = n_Rr$ eşitliğinin farkına varalım:

$$\begin{aligned} nr &= r + \cdots + r = 1_Rr + \cdots + 1_Rr \\ &= (1_R + \cdots + 1_R)r = i(n)r = n_Rr. \end{aligned}$$

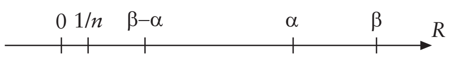
Şimdi $i(\mathbb{Q})$'nün ana teoremin kanıtında oynayacağı önemli rolü görelim:

Önsav 21.3. *Eğer R bir Arşimet cismiyse, o zaman $i(\mathbb{Q})$, R'de yoğundur, yani R'nin her $\alpha < \beta$ elemanı için, $\alpha \le i(q) \le \beta$ eşitsizliklerini sağlayan bir q kesirli sayısı vardır.*

Kanıt: q kesirli sayısı için, $i(q)$ yerine q yazacağız.

Eğer $\alpha \le 0 \le \beta$ ise $q = 0$ işi görür. Eğer $0 < \alpha < \beta$ için önsavı kanıtlarsak, $\alpha < \beta < 0$ için de kanıtlamış oluruz, çünkü $\alpha < \beta < 0$ ise, $0 < -\beta < -\alpha$'dır ve eğer $-\beta < q < -\alpha$ ise, $\alpha < -q < \beta$'dır. Bundan böyle $0 < \alpha < \beta$ eşitsizliklerini varsayalım.

$\beta - \alpha > 0$ olduğundan, Arşimet özelliğine göre, $n(\beta - \alpha) > 1$ eşitsizliğini sağlayan bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. Demek ki $1/n < \beta - \alpha$.



Bir kez daha Arşimet özelliğini kullanalım: $1/n\beta > 0$ olduğundan, $m/n\beta > 1$ eşitsizliğini sağlayan bir $m \in \mathbb{N}$ vardır. Dolayısıyla

$$m/n > \beta$$

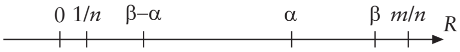
olur. m'yi, bu eşitsizliği sağlayan en küçük doğal sayı olarak alalım. Demek ki,

$$\frac{m-1}{n} \le \beta < \frac{m}{n}$$

eşitsizlikleri geçerli. Şimdi,

$$\alpha < \frac{m-1}{n}$$

eşitsizliğini kanıtlayacağız.



Hesapları yukardaki şekilden takip edebilirsiniz:

$$\frac{m-1}{n} = \frac{m}{n} - \frac{1}{n} > \beta - (\beta - \alpha) = \alpha.$$

Böylece $\alpha < q \le \beta$ eşitsizliklerini sağlayan bir $q \in \mathbb{Q}$ bulduk. Kanıtımız bitmiştir. □

Şimdi de $i(\mathbb{Q})$ ile R arasındaki yakın ilişkiyi görelim.

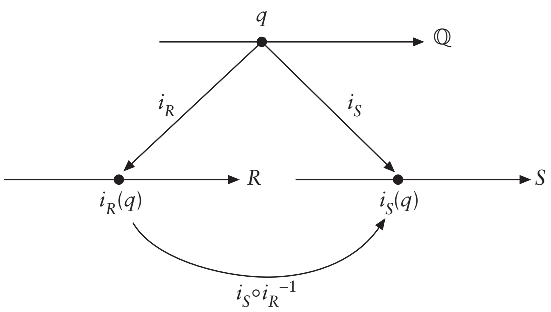
Önsav 21.4. *R'nin her elemanı, terimleri $i(\mathbb{Q})$'den olan bir dizinin limitidir.*

Kanıt: Kolaylık açısından, $i(\mathbb{Q})$ yerine $\mathbb{Q}$ yazacağız. $r \in R$ olsun. Yukardaki önsava göre, her pozitif n doğal sayısı için, $r - 1/n$ ile $r + 1/n$ arasında bir $q_n \in \mathbb{Q}$ vardır. R Arşimet özelliğini sağladığından, $(1/n)_n$ dizisinin limiti 0'dır (Teorem 20.4). O zaman Sandviç Teoremi'ne göre (Teorem 9.10), $(q_n)_n$ dizisinin limiti r'dir. □

Şimdi ana teoremin kanıtına girişebiliriz. R ve S, teoremde söylendiği gibi iki cisim olsun. i_R ve i_S, Önsav 1'deki $\mathbb{Q}$'nün sırasıyla R'ye ve S'ye gömmeleri olsun. R ve S'nin içinde bulunan "kesirli sayı kümelerine" sırasıyla $\mathbb{Q}_R$ ve $\mathbb{Q}_S$ adını verelim: $i_R(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}_R$ ve $i_S(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}_S$.

$\mathbb{Q}_R$ ile $\mathbb{Q}_S$ arasında bir eşyapı eşlemesi vardır:

$$i_S \circ i_R^{-1} : \mathbb{Q}_R \to \mathbb{Q}_S.$$



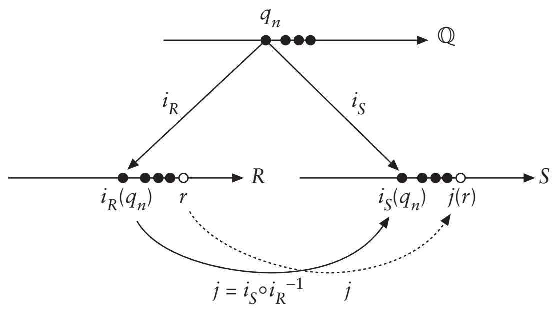
Bu eşyapı eşlemesine kısaca j adını verelim. Şimdi j'yi R'den S'ye giden bir eşyapı eşlemesine genişleteceğiz.

$r \in R$ olsun. Önsav 3'e göre, bir $(q_n)_n$ kesirli sayı dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} i_R(q_n) = r$$

dir. $j(r) \in S$ şöyle tanımlansın:

$$j(r) = \lim_{n\to\infty} j(i_R(q_n)) = \lim_{n\to\infty} i_S(q_n).$$



Tabii bu tanımın geçerli olması için şunların kanıtlanması gerekiyor:

1) $\lim_{n\to\infty} i_S(q_n)$ gerçekten vardır.

2) Eğer bir başka $(p_n)_n$ kesirli sayı dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} i_R(p_n) = r$$

ise, o zaman,

$$\lim_{n\to\infty} i_S(q_n) = \lim_{n\to\infty} i_S(p_n)$$

olmalıdır.

Birincisinin kanıtı kolay, çünkü i_R^{-1} ve i_S fonksiyonları $\mathbb{Q}_R$ ve $\mathbb{Q}_S$ arasında eşyapı eşlemeleridir ve elbette $\mathbb{Q}_R$'nin temel dizisini $\mathbb{Q}_S$'nin temel dizisine götürürler. $(i_R(q_n))_n$ dizisi $\mathbb{Q}_R$'de yakınsak olduğundan temeldir, dolayısıyla $(i_S(q_n))_n$ dizisi $\mathbb{Q}_S$'de temeldir. Ve S tam olduğundan, bu dizinin S'de bir limiti vardır.

İkincisinin kanıtı da zor değil, $(i_R(q_n–p_n))_n$ dizisi 0_R'ye yakınsadığından, bu dizinin j imgesi olan $(i_S(q_n–p_n))_n$ dizisi de 0_S'ye yakınsar çünkü ne de olsa j, $\mathbb{Q}_R$ ile $\mathbb{Q}_S$ arasında bir eşyapı eşlemesidir.

Şimdi j'nin R'den S'ye giden bir eşyapı eşlemesi olduğunu kanıtlamak gerekir: j toplamaya ve çarpmaya saygı duyan bir fonksiyondur. Bunların kanıtı zor değildir. Örneğin j'nin toplamaya saygı duyduğunu gösterelim.

r ve $s \in R$ olsun. $(q_n)_n$ ve $(p_n)_n$ kesirli sayı dizileri

$$\lim_{n\to\infty} i_R(q_n) = r$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} i_R(p_n) = s$$

eşitliklerini sağlasınlar. O zaman,

$$\lim_{n\to\infty} i_R(q_n + p_n) = r + s$$

eşitliği sağlanır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} j(r + s) &= \lim_{n\to\infty} i_S(q_n + p_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} (i_S(q_n) + i_S(p_n)) \\ &= \lim_{n\to\infty} i_S(q_n) + \lim_{n\to\infty} i_S(p_n)) \\ &= j(r) + j(s). \end{aligned}$$

Çarpma için de aynı akıl yürütme yapılır.

j'nin sıralamaya saygı duyduğunu doğrudan kanıtlayabiliriz ama biz çok daha ekonomik olan bir başka yöntem izleyeceğiz. Teorem 19A.5'i analım: Arşimet özelliği olan her tam cisimde, negatif olmayan elemanlar tam tamına karelerdir. Dolayısıyla böyle bir cisimde şu doğrudur:

$$\begin{aligned} x \le y &\Leftrightarrow y - x \ge 0 \Leftrightarrow \exists z\ (y - x = z^2) \\ &\Leftrightarrow \exists z\ (y = x + z^2). \end{aligned}$$

Demek ki Arşimet özelliği olan bir tam cisimde, sıralama toplama ve çarpmayla ifade edilir. Dolayısıyla, Arşimet özelliği olan tam cisimler arasındaki toplamaya ve çarpmaya saygı duyan her eşleme, aynı zamanda sıralamaya da saygı duyar.

Ve j örtendir çünkü S'nin her elemanı bir $\mathbb{Q}_S$-dizisinin limitidir ve her $\mathbb{Q}_S$ dizisi j yoluyla bir $\mathbb{Q}_R$-dizisinden gelmektedir.

Şimdi son olarak R ve S arasındaki bu eşyapı eşlemesinin biricik olduğunu kanıtlayalım. Eğer φ ve ψ, R'den S'ye giden iki eşyapı eşlemesi olsaydı, $\theta = \varphi^{-1} \circ \psi$, R'den R'ye giden bir eşyapı eşleşmesi (otomorfizma) olurdu. $\theta = \mathrm{Id}_R$ eşitliğini kanıtlamak yeterli.

$\theta(0) = \theta(0 + 0) = \theta(0) + \theta(0)$ olduğundan, $\theta(0) = 0$ olmak zorundadır. $\theta(1) = \theta(1{\cdot}1) = \theta(1){\cdot}\theta(1)$ olduğundan, $\theta(1)$, ya 0 ya da 1 olmak zorundadır. Ama $\theta(0) = 0$ olduğundan, $\theta(1)$ de 0 olamaz. Demek ki $\theta(1) = 1$. Bundan, her n doğal sayısı için (tümevarımla) $\theta(n) = n$ çıkar. Ayrıca,

$$0 = \theta(0) = \theta(n + (-n)) = \theta(n) + \theta(-n)$$

olduğundan, her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\theta(-n) = -\theta(n)$$

olur. Demek ki, her $z \in \mathbb{Z}$ için,

$$\theta(z) = z.$$

Şimdi $m, n \in \mathbb{Z}$ ve $n \neq 0$ için,

$$m = \theta(m) = \theta(n{\cdot}m/n) = \theta(n){\cdot}\theta(m/n) = n{\cdot}\theta(m/n)$$

dolayısıyla,

$$\theta(m/n) = m/n.$$

θ'nın $\mathbb{Q}$ üzerine özdeşlik fonksiyonu olduğunu kanıtladık. θ'nın R üzerine de bir özdeşlik fonksiyonu olduğunu kanıtlayacağız. $r \in R$ olsun. Diyelim $\theta(r) \neq r$, örneğin $r < \theta(r)$ olsun. $\mathbb{Q}$, R'de yoğun olduğundan (Önsav 3), $r \leq q \leq \theta(r)$ eşitsizliklerini sağlayan bir q vardır. Şimdi $r \leq q$ eşitsizliğine θ'yı uygulayalım. $\theta(r) \leq \theta(q) = q$ elde ederiz. Bir çelişki.

Teoremimiz kanıtlanmıştır. □

Sonuç 21.5. ℝ'*den* ℝ'*ye giden ve toplamayla çarpmaya saygı duyan iki fonksiyon vardır*: *sabit* 0 *ve özdeşlik fonksiyonları.*

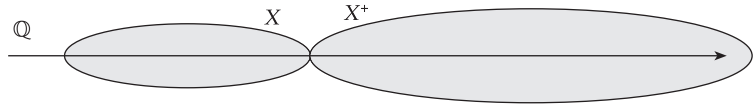
Kanıt: Sabit 0 olmayan bir θ fonksiyonu 1'i 1'e götürmek ve sıralamaya saygı duymak zorundadır (çünkü pozitif elemanlar karelerdir.) Kanıt aynen yukardaki gibidir. □

$(\mathbb{R}, +, \times)$ gibi özdeşlikten başka eşyapı eşlemesi olmayan yapılara matematikte ***eğilmez bükülmez yapılar*** (İngilizcesi rigid) denir.

22. Dedekind Kesitleri

Geçen bölümlerde gerçel sayıları, $\mathbb{Q}$'den hareketle ve temel $\mathbb{Q}$-dizilerini kullanarak yarattık. $\mathbb{Q}$'den hareketle gerçel sayıları yaratmanın Dedekind tarafından bulunmuş daha şık bir yöntemi vardır.

Tanımın Gerekçesi. Dedekind'in yöntemi şu düşünceden kaynaklanır: Üstten sınırlı ve boş olmayan bir kesirli sayılar kümemiz olsun. X diyelim bu kümeye. X'in en küçük üstsınırını yaratmak istiyoruz. Böyle bir üstsınır $\mathbb{Q}$'de olsa da olmasa



da... X'in üstsınrları kümesine bakalım. Bu kümeyi yukardaki şekildeki gibi X^+ olarak gösterelim:

$$X^+ = \{s \in \mathbb{Q} : \text{her } x \in X \text{ için } x \leq s\}.$$

Örneğin,

$$(0, 1)^+ = [1, \infty) \cap \mathbb{Q},$$
$$(0, 1]^+ = (1, \infty) \cap \mathbb{Q}.$$

Üstten sınırlı ve boş olmayan bir X kümesi için X^+ kümesinin hangi özellikleri var?

1) $X^+ \neq \emptyset$ çünkü X'in en az bir üstsınırı var,
2) $X^+ \neq \mathbb{Q}$ çünkü X boşküme değil,
3) Eğer $s \in X^+$ ve $s \leq t$ ise, $t \in X^+$.

Eğer bir $Y \neq \emptyset, \mathbb{Q}$ kümesi
$$\forall s\ \forall t\ ((s \in Y \wedge t \in \mathbb{Q} \wedge s \leq t) \to t \in Y) \qquad (*)$$
özelliğini sağlıyorsa, o zaman
$$X = \{x \in \mathbb{Q} : \text{her } y \in Y \text{ için } x \leq y\}$$
kümesi için $X^+ = Y$ eşitliği doğru olur. (Alıştırma.)

X'in en küçük üstsınırı olarak X^+ kümesini aday göstermek istiyoruz. Yani üstten sınırlı ve boş olmayan her $X \subseteq \mathbb{Q}$ için X^+ kümesini bir gerçel sayı olarak tanımlamak istiyoruz. Daha açık yazalım:
$$\mathbb{R} = \{Y \subseteq \mathbb{Q} : Y \neq \emptyset, \mathbb{Q} \text{ ve } (*)\}$$
tanımını yapmak istiyoruz.

Yalnız burada küçük bir sorun var. O da şu: $(0, 1)$ ve $(0, 1]$ aralıklarının aynı en küçük üstsınırları var, her ikisi de 1. Oysa bu aralıkların üstsınırları kümesi $(0, 1)^+$ ve $(0, 1]^+$ kümeleri değişik, biri 1'i içeriyor, diğeri içermiyor. Bu iki kümeden birini tercih etmemiz lazım, yoksa $\mathbb{R}$'de iki değişik 1 elemanı olurdu! R'nin tanımına bir koşul daha ekleyelim: Y'nin en küçük elemanı yoktur, yani en büyük altsınırını (eğer varsa bu altsınır) içermez. (Böylece $(0, 1)^+$ ve $(0, 1]^+$ kümelerinden ikincisini seçeriz.)

En büyük altsınırını içermeyen ve (*) özelliğini sağlayan $\mathbb{Q}$'nün $Y \neq \emptyset, \mathbb{Q}$ altkümelerine ***Dedekind kesiti*** adı verilir. Örneğin, her $a \in \mathbb{Q}$ için,
$$\{q \in \mathbb{Q} : a < q\}$$
kesirli sayı aralığı bir Dedekind kesitidir. Bir Dedekind kesiti sonsuza kadar giden bir aralığa çok benzer ama kesirli sayılarda en büyük altsınırı yoksa kesirli sayılar kümesinde bir aralık değildir. Örneğin,
$$\{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ ve } x^2 > 2\}$$
bir Dedekind kesitidir ama $\sqrt{2}$ kesirli bir sayı olmadığından, ke-

sirli sayılar kümesinde bir aralık değildir. Öte yandan bir Dedekind kesitinin en büyük altsınırı varsa ve bu en büyük altsınır a ise, o zaman Dedekind kesiti (a, ∞) aralığı olmalıdır.

Dedekind, ***gerçel sayılar kümesi*** $\mathbb{R}$'yi Dedekind kesitleri kümesi olarak tanımlayacağız.

$\mathbb{Q}$'nün (*) özelliğini sağlayan bir $Y \neq \emptyset$, $\mathbb{Q}$ altkümesinden, varsa en küçük altsınırını çıkarırsak bir Dedekind kesiti, yani bir gerçel sayı buluruz. Bu kolay olguyu sık sık kullanacağız bu bölümde.

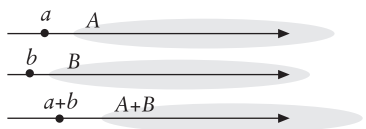
İşlemler, Sıralama ve Her Şeyin Kanıtı

Şimdi bu tanımdan hareketle, böylece tanımlanmış $\mathbb{R}$ kümesi üzerine toplamayı, çarpmayı ve sıralamayı tanımlayalım.

Kanıtların birçoğunu alıştırma olarak okura bırakacağız.

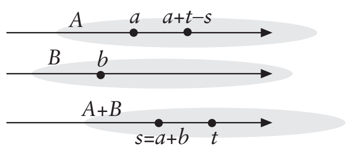
Önsav 22.1. *Eğer* $A, B \in \mathbb{R}$ *ise*, $A + B \in \mathbb{R}$*'dir*.

Kanıt: A ve B boşküme olmadıklarından, $A + B$ de boşküme değildir elbette. (2)'yi kanıtlayalım. (3)'ten dolayı her Dedekind kesiti alttan sınırlıdır. a, A'nın tüm elemanlarından daha küçük bir kesirli sayı olsun. b de B'nin tüm elemanlarından daha küçük bir kesirli sayı olsun. O zaman $A + B$'nin tüm eleman-



ları $a + b$'den daha büyüktür ve $a + b$ sayısı $A + B$ kümesinde değildir. Demek ki $A + B \neq \mathbb{Q}$. (2) de kanıtlandı.

(3)'ü kanıtlayalım. $s \in A + B$ ve $s \leq t \in \mathbb{Q}$ olsun. t'nin de $A + B$ kümesinde olduğunu kanıtlayacağız.

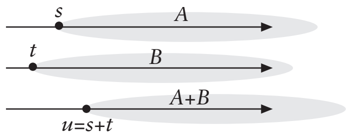


$a \in A$ ve $b \in B$ için $s = a + b$ olsun. O zaman,

$$t = s + t - s = a + b + t - s = (a + t - s) + b.$$

Ama $a \leq a + t - s$ olduğundan, $a + t - s \in A$. Demek ki, $t = (a + t - s) + b \in A + B$. (3) de kanıtlandı.

Gelelim (4)'e... $A + B$'nin bir en büyük altsınırı olduğunu ve bu en büyük altsınırın $A + B$'de olduğunu varsayalım. Bu en büyük altsınıra u adını verelim. Demek ki $s \in A$ ve $t \in B$ için $u = s + t$.



Ama o zaman s, A'nın en büyük altsınırı olur. Çünkü $s > a \in A$ olsa,

$$u = s + t > a + t \in A + B$$

olur, ki bu da u'nun $A + B$'nin en büyük altsınırı olmasıyla çelişir. Demek ki s, A'nın bir altsınırı. s, A'da olduğundan, s, A'nın en büyük altsınırıdır. □

Demek ki iki gerçel sayının toplamı da bir gerçel sayıdır. Bu iyi bir haber.

Önsav 22.2. $(\mathbb{R}, +, 0_\mathbb{R})$ *değişmeli bir gruptur, yani*

a. *Her* $A, B, C \in \mathbb{R}$ *için*, $A + (B + C) = (A + B) + C$.

b. $\{q \in \mathbb{Q} : q > 0\}$ *bir gerçel sayıdır ve toplamanın etkisiz elemanıdır. Bu elemanı* $0_\mathbb{R}$ *olarak gösterelim.*

c. *Her* $A \in \mathbb{R}$ *için,* $A + B = B + A = 0_\mathbb{R}$ *eşitliğini sağlayan bir* $B \in \mathbb{R}$ *vardır.*

d. *Her* $A, B \in \mathbb{R}$ *için*, $A + B = B + A$.

Kanıt: İlk iki önermenin kanıtı kolay, yukarda sözünü etmiştik. Sonuncusu daha da kolay. Üçüncüsünü kanıtlayalım. Aşağıdaki resimden izleyebilirsiniz. $A \in \mathbb{R}$ verilmiş.

$$A + B = B + A = 0_\mathbb{R}$$

eşitliğini sağlayan bir $B \in \mathbb{R}$ bulmaya çalışıyoruz.

$$B = (-A)^+ \setminus \{\inf (-A)^+\}$$

olsun. Eğer $\inf (-A)^+$ yoksa, tanıma göre, $B = (-A)^+$ olmak zorundadır. Ayrıca, burada $-A$ şu anlama gelmektedir:

$$-A = \{q \in \mathbb{Q} : -q \in A\}.$$

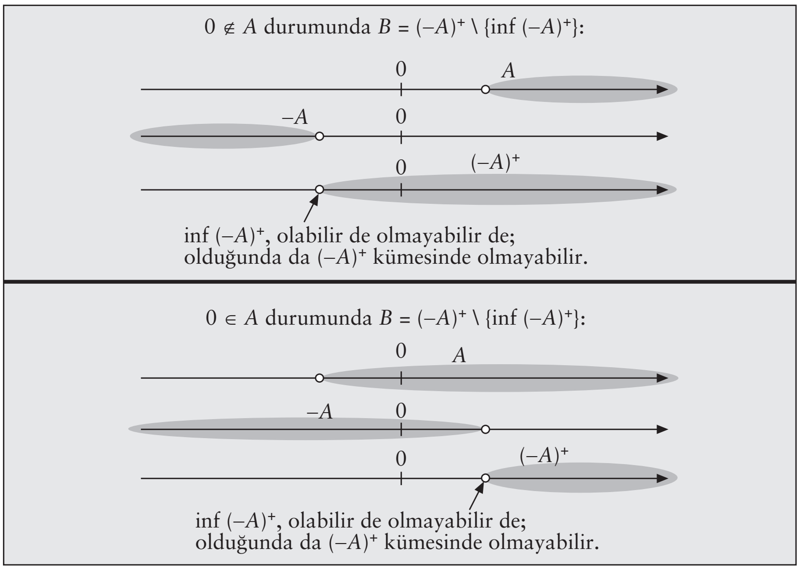
(Yani buradaki $-A$, gerçel sayı A'nın değil, küme olarak A'nın eksisidir. Gerçel sayı A'nın eksisini tanımlamak üzereyiz.) B'nin bir Dedekind kesiti olduğunu, yani bir gerçel sayı olduğunu ve $A + B = B + A = 0_{\mathbb{R}}$ eşitliğinin sağlandığını göstermeyi okura bırakıyoruz. □

Aşağıda c maddesinde varlığı gösterilen $B \in \mathbb{R}$, $-A$ olarak yazılır. Ancak bu $-A$, yukardaki kanıttaki $-A$ ile karıştırılmamalıdır. Kanıttaki $-A$ hiçbir zaman bir gerçel sayı olamaz. Bundan böyle $-A$ hep gerçel sayı $-A$ anlamına gelecek.

Her değişmeli grupta olduğu gibi $B - A$ elemanı, $B + (-A)$ anlamına gelecek.

$$A - (B - C) = A - B + C$$

gibi her değişmeli grupta geçerli olan cambazlıkları kanıtlamayı okura bırakıyoruz.



Çarpmaya gelmeden önce sıralamayı tanımlayalım. Eğer A, $B \in \mathbb{R}$ ise, $\leq$ ikili ilişkisini altküme ilişkisi olarak tanımlayalım:

$$A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B.$$

Örneğin, tanımdan dolayı max $\{A, B\} = A \cap B$. Ama dikkat, sonsuz tane gerçel sayının kesişimi boşküme olmasa bile bir gerçel sayı olmak zorunda değildir, çünkü sonsuz kesişim en küçük üstsınırı içerebilir, örneğin,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\{q \in Q : q > -1/n\} = \{q \in Q : q \geq 0\},$$

ve solda kesişimi alınan kümelerin her biri bir gerçel sayı olmasına karşın, sağdaki - en büyük altsınırı olan 0'ı içerdiğinden - bir gerçel sayı (yani Dedekind kesiti) değildir. Ama böyle bir kesişimden - eğer boşküme değilse - içinde olma ihtimaline karşı, en büyük altsınırı atarsak, o zaman bir gerçel sayı elde ederiz. Bu, birazdan önemli olacak

Önsav 22.3. *Yukarda tanımlanan $\leq$ ilişkisi, $\mathbb{R}$ üzerine bir tamsıralamadır, yani her A, B, $C \in \mathbb{R}$ için,*

a. $A \leq B$ *ve* $B \leq C$ *ise* $A \leq C$.

b. $A \leq B$ *ve* $B \leq A$ *ise* $A = B$.

c. $A \leq A$.

d. *Ya* $A \leq B$ *ya da* $B \leq A$.

Kanıt: Tamamıyla okura bırakılmıştır. □

Bu arada,

$$0_{\mathbb{R}} < A \Leftrightarrow 0 \in B$$

önermesinin doğruluğuna da dikkatinizi çekeriz.

Şimdi çarpmayı tanımlayalım. Çarpmanın tanımı ne yazık ki toplamanın tanımı kadar sade değil.

A, $B \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer $A \geq 0_{\mathbb{R}}$ ve $B \geq 0_{\mathbb{R}}$ ise,

$$AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$$

olarak tanımlansın. Diğer durumlarda tanım şöyle:

Eğer $A \leq 0_{\mathbb{R}}$ ve $B \geq 0_{\mathbb{R}}$ ise, $AB = -((-A)B)$.
Eğer $A \geq 0_{\mathbb{R}}$ ve $B \leq 0_{\mathbb{R}}$ ise, $AB = -(A(-B))$.
Eğer $A \geq 0_{\mathbb{R}}$ ve $B \leq 0_{\mathbb{R}}$ ise, $AB = (-A)(-B)$.

Önsav 22.4. *Eğer $A, B \in \mathbb{R}$ ise, $AB \in \mathbb{R}$'dir.*

Kanıt: Önsavı sadece $A \geq 0_{\mathbb{R}}$ ve $B \geq 0_{\mathbb{R}}$ durumu için kanıtlamak gerekiyor; diğer durumlar bundan çıkar. Bu durumu da okura alıştırma olarak bırakıyoruz. Kesirli sayılar hakkında her şeyi bildiğinizi varsayabilirsiniz elbet. □

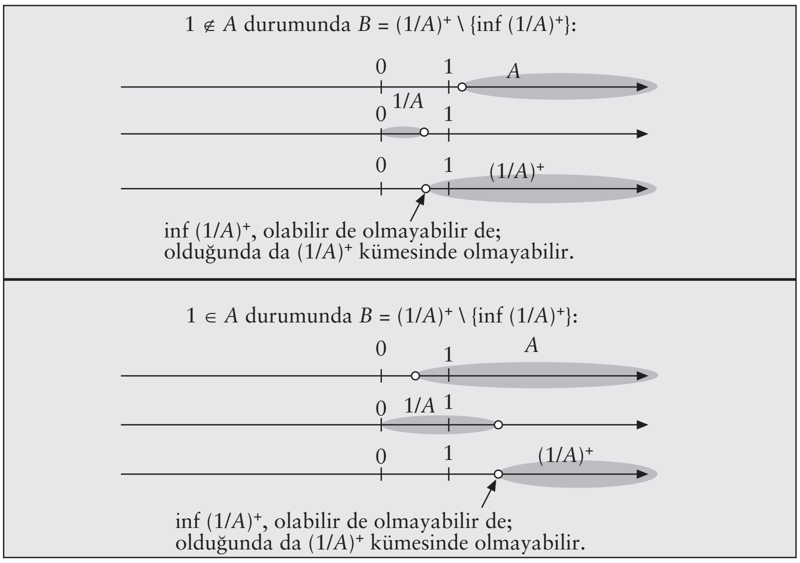
Önsav 22.5. a) *Her $A, B, C \in \mathbb{R}$ için, $A(BC) = (AB)C$.*

b) *$\{q \in \mathbb{Q} : q > 1\}$ bir gerçel sayıdır ve çarpmanın etkisiz elemanıdır. Bu elemanı $1_{\mathbb{R}}$ olarak gösterelim.*

c) *Her $A \in \mathbb{R} \setminus \{0_{\mathbb{R}}\}$ için, $AB = BA = 1_{\mathbb{R}}$ eşitliğini sağlayan bir $B \in \mathbb{R} \setminus \{0_{\mathbb{R}}\}$ vardır.*

d) *Her $A, B \in \mathbb{R}$ için, $AB = BA$.*

Kanıt: İlk iki ve sonuncu önermelerin kanıtı oldukça kolay. Üçüncü önermeyi ise $A > 0_{\mathbb{R}}$ için kanıtlamak yeterli. (Neden?) Kanıtlayalım. $A > 0_{\mathbb{R}}$ bir gerçel sayı olsun. $AB = BA = 1_{\mathbb{R}}$ eşit-



liğini sağlayan bir $B \in \mathbb{R}$ bulmaya çalışıyoruz.

$$B = (1/A)^+ \setminus \{\inf (1/A)^+\}$$

olsun. (Bkz. yukardaki şekil.) Burada $1/A$ şu anlama gelmektedir:

$$1/A = \{q \in \mathbb{Q} : 1/q \in A\}.$$

(Yani gerçel sayı A'nın değil, küme olarak A'nın tersini alıyoruz. Gerçel sayı A'nın tersini tanımlamak üzereyiz.) B'nin bir Dedekind kesiti olduğunu, yani bir gerçel sayı olduğunu ve $AB = BA = 1_{\mathbb{R}}$ eşitliğinin sağlandığını göstermeyi okura bırakıyoruz. □

Sonuç 22.6. $(\mathbb{R} \setminus \{0_{\mathbb{R}}\}, \times, 1_{\mathbb{R}})$ *değişmeli bir gruptur.*

Şimdi de toplamayla çarpma arasındaki yegâne ilişki olan dağılma özelliği:

Önsav 22.7. *Her* $A, B, C \in \mathbb{R}$ *için,*

$$A(B + C) = AB + AC.$$

Kanıt: Son derece basit. Bir kümeden bir eleman alıp bu elemanın diğer kümede olduğunu göstermek gerekiyor. Bu da $\mathbb{Q}$'deki dağılma özelliğinden hemen çıkar. □

Sonuç 22.8. $(\mathbb{R} \setminus \{0_{\mathbb{R}}\}, +, \times, 0_{\mathbb{R}}, 1_{\mathbb{R}})$ *bir cisimdir.*

Beklenildiği gibi $\mathbb{R}$ cismi sıralıdır:

Önsav 22.9. $(\mathbb{R}, +, \times, \leq, 0_{\mathbb{R}}, 1_{\mathbb{R}})$ *sıralı bir cisimdir, yani her* $A, B, C \in \mathbb{R}$ *için,*

a) $A \leq B$ *ise* $A + C \leq B + C$.

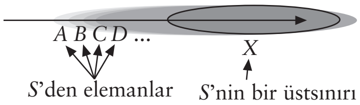
b) $A \leq B$ *ve* $0_{\mathbb{R}} \leq C$ *ise* $AC \leq BC$.

Kanıt: Okura bırakılmıştır. □

Şimdi $\mathbb{R}$'nin en önemli özelliğini görelim:

Önsav 22.10. *Eğer $\varnothing \neq S \subseteq \mathbb{R}$ ise ve S'nin bir üstsınırı varsa, o zaman S'nin en küçük üstsınırı vardır.*

Kanıt: Önsav 3'ten hemen önce gelen tartışma bu kanıtta önemli olacak. $S \subset \mathbb{R}$, boş olmayan ve üstsınırı olan bir altkü-



me olsun. $X \in \mathbb{R}$, S'nin bir üstsınırı olsun. Demek ki her $A \in S$ için, $X \subseteq A$. Dolayısıyla

$$X \subseteq \bigcap_{A \in S} A.$$

Soldaki ifadeye U diyelim:

$$U = \bigcap_{A \in S} A.$$

X'i içerdiğinden, U boşküme değil. Ama gene de U bir Dedekind kesiti, yani gerçel sayı olmayabilir, çünkü en büyük altsınırını içerebilir. $V = U \setminus \{\inf U\}$ olsun. V bir gerçel sayıdır. V'nin sup S olduğunun kanıtını okura bırakıyoruz. □

Demek ki Teorem 20.15'e göre $\mathbb{R}$ tamdır ve Arşimet özelliğini sağlar. Dolayısıyla Teorem 21.1'e göre geçen yazılarda tanımlanan $\mathbb{R}$'yle eşyapısaldır.