20*. Sıralı Halkalarda Yakınsaklık ve Tamlık

Terimleri bir X kümesinden gelen bir diziye X-dizisi adını verelim. X-dizilerinden oluşan kümeyi $\mathscr{D}(X)$ ile gösterelim.

Sıralı bir halkanın bir r elemanı için, $|r|$ elemanı, $\max\{r, -r\}$ olarak tanımlanır ve adına r'nin ***mutlak değeri*** denir. Mutlak değer tahmin edilen tüm özellikleri sağlar.

Tanım. *R sıralı bir halka olsun. $(x_n)_n \in \mathscr{D}(R)$ ve $a \in R$ olsun. Eğer her pozitif $\varepsilon \in R$ için,*

$$n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

*önermesini sağlayan bir N doğal sayısı varsa, o zaman, $(x_n)_n$ dizisi (n sonsuza giderken) a'ya **topolojik yakınsar** ya da a, $(x_n)_n$ dizisinin **topolojik limitidir** denir.*

Eğer $R = \mathbb{Q}$ ya da $\mathbb{R}$ ise, bu ders notlarında daha önce tanımlanandan değişik bir kavram elde etmeyiz. Bu yüzden "topolojik" nitelemesini kullanmayacağız.

Aslında x_n terimleri ve a elemanı bir başka halkada da olabileceklerinden, "yakınsar" yerine "R'de yakınsar" dememiz daha doğru olur. İlerde bu ufacık ayrımın önemi olacak.

Demek ki $(x_n)_n$ dizisinin a'ya yakınsaması için, her pozitif $\varepsilon \in R$ elemanı için öyle bir N doğal sayısı bulmalıyız ki, N'den büyük her n göstergeci için,

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

eşitsizliği doğru olsun. Bir başka deyişle, $(x_n)_n$ dizisinin a'ya yakınsaması demek, her $\varepsilon > 0$ için,

$$\{n \in \mathbb{N} : |x_n - a| \geq \varepsilon\}$$

kümesinin sonlu olması demektir.

Bir elemana yakınsayan dizilere ***yakınsak*** diziler denir. Yakınsak olmayan dizilere de ***ıraksak*** diziler denir. Ama dikkat: Bir dizinin yakınsaklığı R halkasına göre değişir. Öte yandan $R \leq S$ ise ve x_n, $a \in R$ ise, S'de yakınsaklık R'de yakınsaklığı gerektirir.

Bundan böyle R herhangi bir sıralı cismi simgeleyecek[1]. Birçoğunu $\mathbb{Q}$ sıralı cismi için kanıtladığımız sonuçları bu bölümde herhangi bir sıralı cisme genelleştireceğiz. Genel kanıt, $\mathbb{Q}$ için yaptığımız özel kanıta çok benzediğinde özel kanıta gönderme yapıp genel kanıtı okura paslama hakkını saklı tutacağız. İşte bu hakkı kullandığımız örnek bir önerme:

Olgu 20.1. *Zamanla sabitleşen bir dizi zamanla sabitleştiği elemana yakınsar.*

Şimdi iki doğal ve önemli soru soralım:

1) Sıralı bir cisimde bir dizinin limiti (eğer varsa tabii) biricik midir?

2) R'nin $(1/n)_n$ dizisi illa 0'a yakınsar mı? (R'deki n'nin anlamı için bkz. Bölüm 6A.5: $n = n_R$.)

Birinci sorunun yanıtı olumlu:

Önsav 20.2. *Sıralı bir cisimde bir dizinin limiti, eğer varsa, biriciktir.*

1 Sıralı halkalarda sıfırbölen olamayacağından, sıralı halkaların bölüm cisimleri vardır (bkz. Ek 1) ve bölüm cisimleri de (tahmin edileceği biçimde) sıralanabilirler. Yani sıralı halkalardan sözetmek yerine sıralı cisimlerden sözetmekle herhangi bir genellik kaybetmeyiz. Sıralı halkalar için kanıtlanmak istenen önerme, halkanın bölüm cismine geçip orada kanıtlanır ve sonra halkaya geri dönülmeye çalışılır.

Kanıt: Sıralı cisme R diyelim. Hem a hem de b elemanlarına yakınsayan bir $(x_n)_n$ dizisi ele alalım. $a = b$ eşitliğini kanıtlayacağız. $a \neq b$ eşitsizliğini varsayalım. $\varepsilon = |a - b|/2$ olsun. $(x_n)_n$ dizisi a'ya yakınsadığından, öyle bir N_1 vardır ki, her $n > N_1$ doğal sayısı için,

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

eşitsizliği doğrudur. Aynı nedenden, öyle bir N_2 vardır ki, her $n > N_2$ doğal sayısı için,

$$|x_n - b| < \varepsilon$$

eşitsizliği doğrudur. Şimdi n hem N_1'den hem de N_2'den büyük herhangi bir doğal sayısı olsun. Şu hesabı yapalım:

$$\begin{aligned} |a - b| &= |(a - x_n) + (x_n - b)| \leq |a - x_n| + |x_n - b| \\ &= |a - x_n| + |b - x_n| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |a - b|, \end{aligned}$$

yani $|a - b| < |a - b|$. Bu da bariz bir çelişkidir, bir eleman kendinden küçük olamaz! □

Bu önsava dayanarak, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ yazılımını herhangi bir karmaşaya neden olmadan kullanabiliriz.

Arşimet Cisimleri. İkinci sorumuzu olumlu yanıtlamaya çalışalım. Bakalım başarabilecek miyiz?

R'den herhangi bir $\varepsilon > 0$ alalım. Öyle bir N doğal sayısı bulmak istiyoruz ki, her $n \geq N$ için

$$|1/n - 0| < \varepsilon$$

olsun, yani $1/n < \varepsilon$, yani $n\varepsilon > 1$ olsun. Sıralı bir cisimde olduğumuzdan $N\varepsilon > 1_R$ eşitsizliğini sağlayan bir N bulmak yeterli, çünkü öyle bir n bulundu mu, her $n \geq N$ için,

$$\varepsilon < 1/N \leq 1/n$$

olur. Demek ki soru şu:

Verilmiş herhangi bir pozitif $\varepsilon \in R$ *için*, $N\varepsilon > 1$ *eşitsizliğini sağlayan bir* N *doğal sayısı var mıdır*?

Bu özelliği anımsıyor olmalısınız. $\mathbb{Q}$'nün bu özelliği sağladığını Teorem 6.11'de kanıtlamıştık. Ama her sıralı cismin bu özelliği sağlamadığını Ek 3'te göreceğiz.

Tanım. *R sıralı bir cisim olsun. Eğer her pozitif* $\varepsilon \in R$ *için,* $N\varepsilon > 1$ *eşitsizliğini sağlayan bir N doğal sayısı varsa R'ye* ***Arşimet cismi*** *adı verilir.* (Bu durumda, bir N doğal sayısı için $N\varepsilon$ biçiminde yazılan elemanlar sadece 1'i değil, R'nin her elemanını aşarlar. Neden?)

Farkına varmışsınızdır, yukarda şu teoremi kanıtladık.

Teorem 20.3. *Sıralı bir cisimde* $(1/n)_n$ *dizisinin limitinin* 0 *olması için gerek ve yeter koşul cismin Arşimet cismi olmasıdır.*

Arşimet olmayan bir R cisminde öyle ε elemanları vardır ki, her n doğal sayısı için $n|\varepsilon| < 1$'dir, yani $|\varepsilon|$ ve katları hiçbir zaman 1'i geçemez. Bu tür elemanlara ***sonsuz küçük elemanlar*** ya da ***enfinitezimaller*** denir. 0 bir sonsuz küçüktür. 1 sonsuz küçük değildir. Sonsuz küçük elemanlar kümesi toplama, çıkarma ve çarpma altında kapalıdır (neden?) ama bölme altında kapalı değildir elbet.

Peki, sıralı bir cisimde $(1/n)_n$ dizisi 0'dan başka bir elemana yakınsayabilir mi? Bakalım... Diyelim dizi α'ya yakınsadı. Demek ki $\varepsilon > 0$ ne olursa olsun, öyle bir N vardır ki, her $n > N$ için,

$$|1/n - \alpha| < \varepsilon$$

olur, demek ki

$$\alpha - \varepsilon < 1/n < \alpha + \varepsilon. \tag{1}$$

n yerine $n + 1$ alırsak,

$$\alpha - \varepsilon < 1/(n+1) < \alpha + \varepsilon$$

buluruz. Bundan da

$$-\alpha - \varepsilon < -1/(n+1) < -\alpha + \varepsilon. \tag{2}$$

eşitsizlikleri de geçerlidir. (1) ve (2)'yi altalta toplarsak,

$$-\varepsilon < \frac{1}{2n(n+1)} < \varepsilon$$

buluruz. Son eşitsizlikten de ε'un sonsuz küçük olamayacağı çıkar. Demek ki ε'u pozitif bir sonsuz küçük seçemeyiz, yani

R'de tek sonsuz küçük 0_R'dır. Yani R Arşimet cismidir. Dolayısıyla Teorem 3'e göre $(1/n)_n$ dizisi 0'a yakınsar ve Önsav 2'ye göre $\alpha = 0$'dır. Şu teoremi kanıtladık.

Teorem 20.4. *Sıralı bir cisimde* $(1/n)_n$ *dizisinin limitinin olması için gerek ve yeter koşul, cismin Arşimet cismi olmasıdır. Bu durumda dizinin limiti* 0 *olmak zorundadır.*

Yakınsak Diziler Halkası. Bu paragrafta yakınsak dizilerle neler neler yapabileceğimizi göreceğiz.

Terimleri sıralı bir R cisminden alınan yakınsak diziler kümesini $\mathcal{Y}(R)$ ile gösterelim. Standart işlemler $\mathcal{Y}(R)$ kümesi üzerine de tanımlıdır.

Olgu 20.5 [Teorem 9.1, 9.2, 9.3, 9.8]. $\mathcal{Y}(R)$ *kümesi toplama, çıkarma ve çarpma altında kapalıdır, yani iki yakınsak dizinin toplamı, farkı ve çarpımı da yakınsaktır. Sabit* 0 *dizisi* $s(0)$ *ve sabit* 1 *dizisi* $s(1)$ *de* $\mathcal{Y}(R)$*'de olduklarından,* $\mathcal{Y}(R)$, $\mathcal{D}(R)$*'nin bir althalkasıdır. Dahası,*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n,$$
$$\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = (\lim_{n\to\infty} x_n)(\lim_{n\to\infty} y_n),$$

olur. Ayrıca eğer $(y_n)_n$ *dizisinin her terimi* 0*'dan değişikse ve* $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$ *ise, o zaman* $(x_n/y_n)_n$ *dizisi de yakınsaktır ve*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n/y_n) = (\lim_{n\to\infty} (x_n))/(\lim_{n\to\infty} (y_n))$$

olur.

Yukardaki olguyu, "limit alma işlemi toplamaya, çıkarmaya, çarpmaya ve bölmeye saygı duyar" olarak da ifade edebiliriz.

Limit alma işlemi sıralamayla da uyumludur:

Olgu 20.6 [Önsav 9.6]. $(x_n)_n$ *ve* $(y_n)_n$ *dizileri sırasıyla* a *ve* b*'ye yakınsasınlar. Eğer belli bir göstergeçten sonra hep (ya da sonsuz defa)* $x_n \geq y_n$ *eşitsizliği sağlanıyorsa, o zaman* $a \geq b$*'dir.*

Bir sonraki sonuç uygulamada çok yararlı olan ve sık sık başvurulan bir teoremdir.

Teorem 20.7 [Sandviç Teoremi, Teorem 9.10]. *$(x_n)_n$, $(y_n)_n$ ve $(z_n)_n$ üç dizi olsun. $x_n \leq y_n \leq z_n$ eşitsizlikleri belli bir M göstergecinden sonra doğruysa (aslında sonsuz defa doğruysa) ve $(x_n)_n$ ve $(z_n)_n$ dizileri aynı elemana yakınsıyorsa, $(y_n)_n$ dizisi de bu elemana yakınsar.*

0'a Yakınsayan Diziler. 0'a yakınsayan diziler kümesine $\mathcal{Y}_0(R)$ adını verelim.

Sonuç 20.8. *$\mathcal{Y}_0(R)$ kümesi toplama, çıkarma ve çarpma altında kapalıdır. Sabit* 0 *dizisi* $s(0)$*'yi içerir ama sabit* 1 *dizisi* $s(1)$*'yi içermez.*

Kanıt: Olgu 20.5'in doğrudan bir sonucudur. □

$\mathcal{Y}_0(R)$ kümesi çarpmanın etkisiz elemanı olan $s(1)$'yi içermediğinden bir halka olmaz. Ama $\mathcal{Y}_0(R)$'nin birkaç paragraf sonra sözedeceğimiz bir başka önemli özelliği vardır.

Sınırlı Diziler Halkası. Sınırlı R-dizileri kümesini $\mathcal{B}(R)$ simgesiyle göstereceğiz. $\mathcal{B}(R)$ kümesi toplama, çıkarma ve çarpma altında kapalıdır ve bunun kanıtı oldukça kolaydır.

Olgu 20.9 [Önsav 7.1]. *$\mathcal{B}(R)$, $\mathcal{D}(R)$'nin bir althalkasıdır, yani $\mathcal{B}(R)$ kümesi toplama, çıkarma ve çarpma altında kapalıdır ve $s(0)$ ve $s(1)$ sabit dizilerini içerir.*

Olgu 20.10 [Teorem 9.4]. *Yakınsak bir dizi sınırlıdır. Yani $\mathcal{Y}(R) \subseteq \mathcal{B}(R)$. Dolayısıyla $\mathcal{Y}(R)$, $\mathcal{B}(R)$'nin bir althalkasıdır.*

Şimdilik

$$\mathcal{Y}_0(R) \subseteq \mathcal{Y}(R) \leq \mathcal{B}(R) \leq \mathcal{D}(R)$$

ilişkilerini kanıtladık. Daha neler neler olacak.

Temel *R*-Dizileri Halkası. Kesirli temel dizileri de genelleştirebiliriz:

Tanım. $(x_n)_n$ *bir R-dizisi olsun. Eğer R'nin her pozitif* $\varepsilon > 0$ *elemanı için,*

$$\textit{her } n, m > N \textit{ için } |x_n - x_m| < \varepsilon$$

eşitsizliğinin sağlandığı bir N doğal sayısı varsa, o zaman $(x_n)_n$ *dizisine **temel** R-**dizisi** denir.*

Temel diziler kümesine $\mathcal{C}(R)$ adını verelim.

Olgu 20.11 [Teorem 11.1 ve 11.2]. *Yakınsak diziler temel dizilerdir ve temel diziler sınırlıdır. Yani* $\mathcal{Y}(R) \subseteq \mathcal{C}(R) \subseteq \mathcal{B}(R)$.

Ama yukarda örneğini verdiğimiz gibi, her temel dizi yakınsak değildir. (Öte yandan ilerde göreceğimiz üzere, gerçel sayılarda her temel dizi yakınsaktır.) Ve elbette her sınırlı dizi temel değildir.

$\mathcal{C}(R)$ de aynen $\mathcal{Y}(R)$, $\mathcal{B}(R)$, $\mathcal{D}(R)$ gibi toplama, çıkarma, çarpma, ve çıkarma altında kapalıdır:

Olgu 20.12 [Teorem 11.3, 11.4 ve 11.5]. $\mathcal{C}(R)$ *kümesi toplama, çıkarma ve çarpma altında kapalıdır, yani iki temel dizinin toplamı, farkı ve çarpımı da temeldir. Demek ki,* $s(0)$ *ve* $s(1)$ *dizileri de* $\mathcal{C}(R)$*'de olduğundan,* $\mathcal{C}(R)$ *bir halkadır,* $\mathcal{B}(R)$*'nin bir althalkasıdır.*

Böylece artık
$$\mathcal{Y}_0(R) \subseteq \mathcal{Y}(R) \leq \mathcal{C}(R) \leq \mathcal{B}(R) \leq \mathcal{D}(R)$$
ilişkilerini biliyoruz.

$\mathcal{C}(R)$ halkası bölme altında da "olabildiğince" kapalıdır. Birazdan geleceğiz bu konuya. Önce altdizi kavramını işleyelim.

Olgu 20.13. [Teorem 12.1, 12.2, 12.3]
a) *Temel bir dizinin her altdizisi temeldir.*
b) *Yakınsak bir dizinin her altdizisi yakınsaktır ve her iki dizi de aynı limite yakınsarlar.*
c) *Temel bir dizinin bir altdizisi yakınsaksa dizinin kendisi de yakınsaktır ve her iki dizi de aynı limite yakınsarlar.*

Temel Dizilerde Bölme. $\mathcal{C}(R)$ halkasının bölme altında "olabildiğince" kapalı olduğunu kanıtlamak için birkaç temel olguya ihtiyacımız var.

Olgu 20.14 [Teorem 11.11]. $(x_n)_n \in \mathcal{C}(R)$ *ise ve her* x_n *terimi* 0'*dan farklı ise ve* $(x_n)_n$ *dizisi* 0'*a yakınsamıyorsa*, *o zaman* $(1/x_n)_n$ *dizisi de* $\mathcal{C}(R)$'*dedir. Bir başka deyişle*, $\mathcal{C}(R)$'*nin tersinir elemanları kümesi*,
$$\mathcal{C}(R)^* = \{(x_n)_n \in \mathcal{C}(R) \setminus \mathcal{Y}_0(R) : \textit{her } n \textit{ için } x_n \neq 0\}$$
dir.

Her temel dizinin yakınsak olduğu sıralı halkalara (ya da cisimlere) ***tam halka*** (ya da ***tam cisim***) denir.

Teorem 20.15. *R sıralı bir cisim olsun ve şu özelliği sağlasın*:

> *Boş olmayan ve üstten sınırlı her altkümenin bir en küçük üstsınırı vardır.*

O zaman R Arşimet cismidir ve tamdır.

Kanıt: Benzer özellik en büyük altsınır için de geçerlidir. (Neden?) İlk olarak, üstten sınırlı her artan dizinin bir limiti olduğunu kanıtlayalım. $(a_n)_n$ böyle bir diziolsun. s bu dizinin en küçük üst sınırı olsun. $\varepsilon > 0$ olsun. s **en küçük** üstsınır olduğundan ve $s - \varepsilon < s$ olduğundan $s - \varepsilon$ bir üstsınır değildir. Demek ki bir N için,

$$s - \varepsilon < a_N$$

olur, yani her $n > N$ için,

$$s - \varepsilon < a_N < a_n \leq s$$

olur. Dolayısıyla her $n > N$ için $|s - a_n| < \varepsilon$ olur. İstediğimizi kanıtladık. Bundan, her sınırlı monoton dizinin yakınsadığı çıkar.

Şimdi herhangi bir $(a_n)_n$ temel dizisi alalım. Teorem 12.4'e göre bu dizinin monoton bir $(b_n)_n$ altdizisi vardır. Olgu 20.11'e göre $(a_n)_n$ dolayısıyla $(b_n)_n$ sınırlıdır. Yukardaki kanıtladığımıza göre $(a_n)_n$ yakınsaktır. Olgu 20.13.c'ye göre $(a_n)_n$ dizisi de yakınsaktır. Demek ki R bir tam halkadır.

$(1/n)_n$ dizisi azalan ve alttan sınırlı olduğundan, $(1/n)_n$ dizinin de limiti vardır. Teorem 20.3'e göre R bir Arşimet cismidir.

Teorem kanıtlanmıştır. □

Böylece Teorem 17.1'i bir kez daha kanıtlayabiliriz.

Sonuç 20.16. $\mathbb{R}$ *bir Arşimet cismidir ve tamdır.*

Kanıt: Teorem 20.15 ve 19.2'den çıkar. □

Temel dizi ile Cauchy dizisi arasında önemli bir fark vardır. $\mathbb{R}$'de (ve bir anlamda $\mathbb{Q}$'da da) bu fark kaybolur. Fark, metrik uzaylar konusu bilindiğinde daha iyi anlaşılacaktır. Cauchy dizisi kavramında, her zaman halka kavramının özünde olmayan ve $\mathbb{R}$'de değer alan bir "metrik" ya da "mesafe" kavramı vardır. Temel dizi kavramı için ise halkanın dışına çıkmak gerekmemektedir.