19B. Yakınsak Gerçel Dizi Örnekleri

Bu bölümde birkaç yakınsak dizi örneği daha göreceğiz. Verdiğimiz örneklerin her biri hem kendi başına hem de kullanılan yöntem açısından önemlidir.

Örnek 19B.1. $\lim_{n\to\infty} 2^{1/n} = 1$.

Kanıt: Elbette $2^{1/n} \geq 1$. Ayrıca $(2^{1/n})_n$ azalan bir dizidir. Demek ki limiti vardır ve limiti en az 1 olabilir. Bu limite ℓ diyelim. O zaman,

$$\ell = \lim_{n\to\infty} 2^{1/n} = \lim_{n\to\infty} 2^{2/2n} = (\lim_{n\to\infty} 2^{1/2n})^2 = \ell^2.$$

Bundan da, $\ell = 0$ olamayacağından, $\ell = 1$ çıkar.

Örnek 19B.2. $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$.

Kanıt: Elbette $n^{1/n} \geq 1$. $n \geq 3$ için bu dizinin azalan olduğunu göstereceğiz.

$$(n+1)^{1/(n+1)} \leq n^{1/n} \Leftrightarrow (n+1)^n \leq n^{n+1} \Leftrightarrow (1+1/n)^n \leq n$$

mantıksal denkliklerinden ve Örnek 18A.2'nin ikinci adımından dolayı, $n \geq 3$ için dizinin azalan olduğunu görürüz. Demek ki dizi Cauchy dizisidir ve dolayısıyla $\mathbb{R}$'de bir limiti vardır. Bu limite ℓ diyelim. O zaman, bildiğimiz teoremleri ve Örnek 19B.1'i kullanarak,

$$1 \le \ell = \lim_{n\to\infty} n^{1/n} = \lim_{n\to\infty} (2n)^{1/2n} = \lim_{n\to\infty} 2^{1/2n} n^{1/2n}$$
$$= (\lim_{n\to\infty} 2^{1/n})^{1/2} (\lim_{n\to\infty} n^{1/n})^{1/2} = 1\cdot\sqrt{\ell} = \sqrt{\ell}$$

buluruz. Buradan da $\ell = 1$ çıkar.

Örnek 19B.3. *Eğer* $|x| < 1$ *ise* $\lim_{n\to\infty} nx^n = 0$. *Aksi halde dizi ıraksaktır.*

Kanıt: $|x| < 1$ olsun. x yerine $|x|$ alarak, x'in negatif olmadığını varsayabiliriz. Eğer $x = 0$ ise sorun yok. Bundan böyle $0 < x < 1$ olsun.

$\lim_{n\to\infty} n/(n + 1) = 1$ olduğundan, öyle bir N vardır ki, her $n > N$ için,

$$x < n/(n+1)$$

olur. Şimdi $n > N$ için,

$$(n + 1)x^{n+1} = (n + 1)xx^n < nx^n.$$

Demek ki dizi zamanla azalıyor. Dolayısıyla bir limiti vardır. Bu limite ℓ diyelim. Eğer $\ell \ne 0$ ise,

$$\begin{aligned}\ell &= \lim_{n\to\infty} nx^n = \lim_{n\to\infty} (n+1)x^{n+1}\\ &= \lim_{n\to\infty} (nx^{n+1} + x^{n+1})\\ &= \lim_{n\to\infty} nx^{n+1} + \lim_{n\to\infty} x^{n+1}\\ &= \lim_{n\to\infty} nx^n x = x\cdot\lim_{n\to\infty} nx^n = x\cdot\ell.\end{aligned}$$

Demek ki $\ell = 0$.

Eğer $|x| \ge 1$ ise, dizi sınırlı olmadığından yakınsak da olamaz.

Örnek 19B.4. $x_0 = 1$ *olsun.* $x_{n+1} = \sqrt{(2x_n)}$ *olsun. Dizinin limitini bulun.*

Yanıt: Dizinin ilginçliğini görmek için ilk birkaç terimi yazalım:

$$1, \sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots$$

Eğer limit varsa, $x_{n+1} = \sqrt{(2x_n)}$ eşitliğinin her iki tarafın da limitini alarak, $x = \sqrt{(2x)}$ buluruz. Bunun karesini alalım: $x^2 = 2x$ çıkar. Bundan da $x = 0$ ya da 2 bulunur.

Dizinin artan olduğunu kanıtlayalım. $x_n < x_{n+1} = \sqrt{(2x_n)}$ eşitsizliğini kanıtlamalıyız, yani (dizi bariz biçimde pozitif olduğundan) $x_n{}^2 < 2x_n$ eşitsizliğini, yani $x_n \le 2$ eşitsizliğini kanıtlamalıyız. Bunu tümevarımla kanıtlayalım. $x_0 = 1 < 2$ eşitsizliği belli. Şimdi $x_n < 2$ eşitsizliğini varsayalım. O zaman,

$$x_{n+1} = \sqrt{(2x_n)} < \sqrt{(2\cdot 2)} = \sqrt{4} = 2.$$

İstediğimiz kanıtlandı. Demek ki dizi artıyor ve üstten 2 tarafından sınırlı. Demek ki dizinin bir limiti var: 0 ya da 2. Dizi pozitif olduğundan ve arttığından, dizi 2'ye yakınsar.

Alıştırmalar

1. Yukardaki örneği 2 yerine herhangi bir $a \ge 0$ için yapın. Örneğin,

$$1, \sqrt{3}, \sqrt{3\sqrt{3}}, \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}, \ldots$$

dizisinin akibeti nedir?

2. $x_0 = 1$ olsun. $x_{n+1} = (2x_n)^{1/3}$ olsun. Dizinin limiti var mıdır, varsa limiti bulun.

19C. Yakınsak Gerçel Dizi Alıştırmaları

1. $a, b > 0$ iki gerçel sayıysa, $\lim_{n\to\infty} (a^n + b^n)^{1/n} = \max\{a, b\}$ eşitliğini kanıtlayın.

2. Limiti 0 olan ama $(a_n/a_{n+1})_n$ dizisinin yakınsak olmadığı bir $(a_n)_n$ dizisi bulun.

3. $-1 < r \le 1$ ise $\lim_{n\to\infty} r^n/n = 0$ eşitliğini kanıtlayın. Eğer r bu aralıkta değilse dizi hakkında ne diyebilirsiniz?

4. $p(X), q(X) \in \mathbb{R}[X]$ iki polinom olsun. $q(X) \neq 0$ olsun. Eğer $\deg p < \deg q$ ise

$$\lim_{n\to\infty} p(n)/q(n) = 0$$

eşitliğini, eğer $\deg p = \deg q$ ise ve a ve b sırasıyla p ve q polinomlarının başkatsayısıysa,

$$\lim_{n\to\infty} p(n)/q(n) = a/b$$

eşitliğini kanıtlayın. Eğer $\deg p > \deg q$ ise dizinin ıraksak olduğunu kanıtlayın.

5. Aşağıdaki limitleri bulun ve limitin gerçekten limit olduğunu limitin tanımından hareketle kanıtlayın.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{5n+2}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{-n+2},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{-n^2+2}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{-n^2-2n-1}{3n^2+2}.$$

6. Aşağıdaki limitleri hesaplayın:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^n, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-n}-n\right).$$

7. Aşağıdaki eşitlikleri gösterin:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n^2+n-5}\right)^n = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n^2+n-5}\right)^{\frac{n-1}{3n+2}} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^3-n-5}\right)^{\frac{n^2-1}{3n+2}} = 0.$$

(Son iki eşitlik için gerçel sayılarda kök almayı bilmelisiniz.)

8. $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ iki gerçel sayı dizisi olsun. $y \in \mathbb{R}$ olsun. $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ ve her n için $|y_n - y| \leq |x_n|$ olsun. $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ eşitliğini kanıtlayın.

9. $(x_n)_n$ yakınsak bir gerçel sayı dizisi olsun.

$$y_n = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

olsun. $(y_n)_n$ dizisinin yakınsak olduğunu ve

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$$

eşitliğini kanıtlayın.

10. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ olsun. $n > 2$ için,

$$x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}$$

olsun.

10a. Her n için $1 \leq x_n \leq 2$ eşitsizliklerini kanıtlayın.

10b. $x_n - x_{n+1} = (-1)^n/2^{n-1}$ eşitliğini kanıtlayın.

10c. Eğer $m > n$ ise, $|x_n - x_m| < 1/2^{n-1}$ eşitsizliğini kanıtlayın.

10d. $(x_n)_n$ dizisinin Cauchy olduğunu kanıtlayın.

10e. $x_{n+2} - x_1 = 1 - 1/2 + 1/4 - \cdots + (-1)^n/2^n$ eşitliğini kanıtlayın ve buradan $\lim_{n\to\infty} x_n$'yi bulun.

11. $x_n = 1/1^2 + \cdots + 1/n^2$ olsun. **11a.** Her $n \geq 1$ için,

$$x_n \leq 1 - 1/n$$

eşitsizliğini kanıtlayın. Buradan $(x_n)_n$ dizisinin yakınsaklığını çıkarın.

11b. Yeterince büyük n doğal sayısı için, $n^2 \leq 2^n$ eşitsizliğini kanıtlayın. Buradan,

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq 1 + 1/4 + 1/9 + 1/8 = 107/72$$

eşitsizliğini kanıtlayın.

12. x bir gerçel sayı, $x_0 = x$ ve $x_{n+1} = 1/(4 - x_n)$ olsun. $(x_n)_n$ dizisi varsa ve yakınsaksa, limitin $2 \pm \sqrt{3}$ olması gerektiğini kanıtlayın. Eğer $x \in [2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}]$ ise limitin $2 + \sqrt{3}$ olması gerektiğini kanıtlayın. Başka x değerleri için dizinin limitini tartışın.

13. Eğer her n için,

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq c|x_{n+1} - x_n|$$

eşitsizliğinin sağlandığı bir $c \in [0, 1)$ varsa, o zaman $(x_n)_n$ dizisine ***büzülen dizi*** adı verilir. Büzülen bir dizinin Cauchy dizisi olduğunu, dolayısıyla yakınsadığını kanıtlayın.

14. Öyle bir $\mathbb{Q}$-dizisi bulun ki, sayılamaz sonsuzlukta Cauchy altdizisi olsun.

15. 0'a yakınsayan $\mathbb{Q}$-dizilerinin kardinalitesi kaçtır?