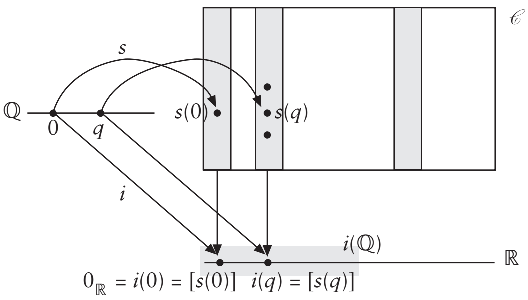
16. $\mathbb{Q}$'yü $\mathbb{R}$'ye Gömmek

Her kesirli sayı bir gerçel sayı olmalı, öyle öğrendik. Ama şimdilik hiçbir kesirli sayı bir gerçel sayı değil. Nitekim, bir gerçel sayı, temel bir kesirli sayı dizisinin sınıfı ve dolayısıyla hiçbir zaman bir kesirli sayı olamaz.

Kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}$'den gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$'ye giden $i : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu şu kuralla tanımlayalım: $q \in \mathbb{Q}$ için,

$$i(q) = [s(q)].$$

($s(q)$'nün sabit q dizisi olduğunu anımsayın.)

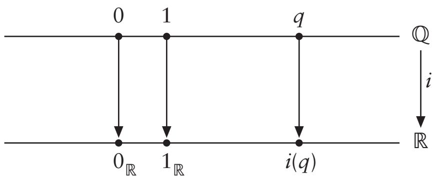


$i(\mathbb{Q})$, $\mathbb{Q}$'nün $\mathbb{R}$'de bir "kopyası" olduğunu kanıtlayacağız. Yani $i(\mathbb{Q})$, $\mathbb{R}$'nin $\mathbb{Q}$'ye çok benzeyen bir althalkası olacak ve i, dört işleme ve sıralamaya saygı duyan birebir bir fonksiyon olacak. Ayrıca $i(\mathbb{Q})$, $\mathbb{R}$'de yoğun olacak. Bütün bunları yavaş yavaş kanıtlamaya başlayalım.

Önsav 16.1. *$i : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ dört işleme ve sıralamaya saygı duyan birebir bir fonksiyondur: $q, q' \in \mathbb{Q}$ için,*

$$i(q + q') = i(q) + i(q'),$$
$$i(q - q') = i(q) - i(q'),$$
$$i(qq') = i(q)i(q'),$$
$$i(q/q') = i(q)/i(q') \text{ (eğer } q' \neq 0 \text{ ise)},$$
$$q < q' \Leftrightarrow i(q) < i(q'),$$
$$i(0) = 0_{\mathbb{R}},$$
$$i(1) = 1_{\mathbb{R}}.$$

Yani (matematiksel deyişle) i sıralı bir halka gömmesidir.



$i(q) = [s(q)]$

Kanıt: Birebirlik: $q, q' \in \mathbb{Q}$ için, $i(q) = i(q')$ olsun. Demek ki, $[s(q)] = [s(q')]$, yani

$$s(q - q') = s(q) - s(q') \in \mathcal{Y}_0$$

ve

$$0 = \lim_{n\to\infty} (s(q - q')) = q - q'$$

ve $q = q'$.

Toplamaya Saygı: $i(q + q') = [s(q + q')] = [s(q) + s(q')] = [s(q)] + [s(q')] = i(q) + i(q')$.

Çarpmaya Saygı: $i(qq') = [s(qq')] = [s(q)s(q')] = [s(q)][s(q')] = i(q)i(q')$.

Etkisiz Elemanlara Saygı: $i(0) = [s(0)] = 0_{\mathbb{R}}$ ve $i(1) = [s(1)] = 1_{\mathbb{R}}$.

Yukardakilerden i'nin çıkarmaya ve bölmeye de saygı duyduğu çıkar. Bunların kanıtını okura bırakıyoruz.

Sıralamaya Saygı: $q < q'$ olsun ve $i(q) < i(q')$ eşitsizliğini kanıtlayalım. i çıkarmaya saygı duyduğundan, $q' - q$ yerine t yazarak,

$$t > 0 \text{ ise } i(t) > 0_{\mathbb{R}},$$

yani,

$$t > 0 \text{ ise } [s(t)] > 0_{\mathbb{R}}$$

önermesini kanıtlamamız gerektiğini görürüz. $t > 0$ bir kesirli sayı olsun. Bölüm 15'teki $<$ sıralaması tanımında $\delta = t/2$ ve $N = 0$ (ya da başka bir şey) alırsak, $[s(t)]$'nin pozitif olduğunu görürüz.

Şimdi $i(q) < i(q')$, yani $[s(q)] < [s(q')]$ olsun ve $q < q'$ eşitsizliğini kanıtlayalım. $<$ sıralamasının tanımına göre, bir $\delta > 0$ kesirli sayısı için $q + \delta < q'$. Demek ki $q < q'$. □

Alıştırma. Her $n \in \mathbb{Z}$ için, $i(n) = n_{\mathbb{R}}$ eşitliğini kanıtlayın. $n_{\mathbb{R}}$'nin tanımı için bkz Bölüm 14'ün sonundaki alıştırma ya da Bölüm 6A.5.

Sonuç 16.2. *$q \in \mathbb{Q}$ için, $i(-q) = -\, i(q)$ ve $i(|q|) = |i(q)|$.*

Kanıt: Önsav 16.1'den, $q \in \mathbb{Q}$ için,

$$i(-q) = i(0 - q) = i(0) - i(q) = 0_{\mathbb{R}} - i(q) = -\, i(q),$$

yani $i(-q) = -\, i(q)$ çıkar. i'nin mutlak değere saygı duyduğu da çıkar:

$$\begin{aligned} i(|q|) &= i(\max\{q, -q\}) = \max\{i(q), i(-q)\} \\ &= \max\{i(q), -i(q)\} = |i(q)|. \end{aligned}$$

(Bkz. Alıştırma 15.2. İkinci eşitlik i'nin sıralamaya saygı duymasının bir sonucudur.) □

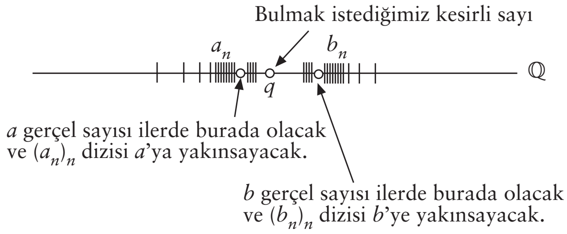
Sonuç 16.3. $i(\mathbb{Q})$, *$\mathbb{R}$'nin bir althalkasıdır ve i, $\mathbb{Q}$ ve $i(\mathbb{Q})$ halkaları arasında bir (sıralı halka) eşyapı eşlemesidir.*

Eşyapı eşlemesinin ne demek olduğunu bilmeyen okura: Aynen Önsav 16.1'de söylenenleri sağlayan bir eşleme demektir.

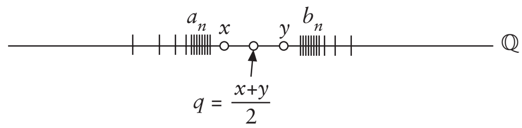
Bölümün bundan sonrasında $i(\mathbb{Q})$ althalkasının $\mathbb{R}$'de ***yoğun*** olduğunu kanıtlayacağız.

Teorem 16.4. *$i(\mathbb{Q})$ althalkası ℝ'de yoğundur, yani herhangi iki gerçel sayı arasında $i(\mathbb{Q})$ althalkasından bir eleman vardır.*

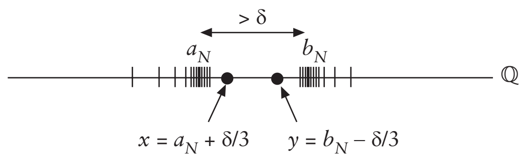
Kanıt: $a < b$ iki gerçel sayı olsun. $a < i(q) < b$ eşitsizliklerini sağlayan kesirli bir q sayısı bulmak istiyoruz. $a = [(a_n)_n]$ ve $b = [(b_n)_n]$ olacak biçimde iki kesirli temel sayı dizisi seçelim. Kanıtın nasıl olması gerektiği konusunda bir fikir sahibi olabilmek için, hayal gücümüzü kullanarak a'yı b'yi sırasıyla $(a_n)_n$ ve $(b_n)_n$ dizilerini limiti olarak görelim.



Şu planı öneriyoruz. 1) Öyle bir x kesirli sayısı bulalım ki, bir zaman sonra a_n'ler x'ten küçük olsunlar. 2) Öyle bir y kesirli sayısı bulalım ki, bir zaman sonra b_n'ler y'den büyük olsunlar. 3) $x < y$ olsun. 4) $q = (x + y)/2$ alalım (x'le y'nin orta noktası) ve $a < i(q) < b$ eşitsizliklerini kanıtlayalım.



Aşağıdaki resim kanıtın fikrini resimlemeye çalışıyor, o resimden kanıtı takip etmeye çalışın.

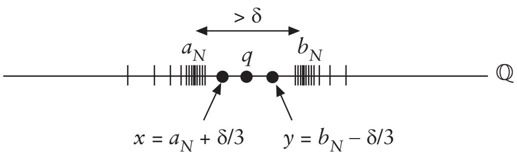


$a < b$ olduğundan, öyle bir $\delta > 0$ kesirli sayısı ve N_1 göstergeci vardır ki, $n > N_1$ için $a_n + \delta < b_n$ olur.

$(a_n)_n$ temel bir dizi olduğundan, öyle bir N_2 göstergeci vardır ki, $n, m > N_2$ için $|a_n - a_m| < \delta/3$ olur.

$(b_n)_n$ temel bir dizi olduğundan, öyle bir N_3 göstergeci vardır ki, $n, m > N_3$ için $|b_n - b_m| < \delta/3$ olur.

Şimdi $N = \max\{N_1, N_2, N_3\} + 1$ ve $x = a_N + \delta/3$, $y = b_N - \delta/3$ olsun. Elbette x ve y birer kesirli sayıdırlar.



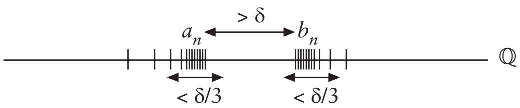
$n > N$ için, $a_n < x$ eşitsizliğini kanıtlayalım:

$$a_n = a_N + a_n - a_N \leq a_N + |a_n - a_N| < a_N + \delta/3 = x.$$

Ve $n > N$ için, $y < b_n$ eşitsizliğini kanıtlayalım.

$$b_n = b_N + b_n - b_N \geq b_N - |b_n - b_N| > b_N - \delta/3 = y.$$

Şimdi de $x < y$ eşitsizliğini kanıtlayalım. Daha iyisini bile



yapabiliriz: $x + \delta/3 < y$ eşitsizliğini bile kanıtlayabiliriz:

$$\begin{aligned} y - x &= (b_N - \delta/3) - (a_N + \delta/3) \\ &= b_N - a_N - 2\delta/3 > \delta - 2\delta/3 = \delta/3 > 0. \end{aligned}$$

Şimdi $q = (x + y)/2$ olsun, yani x'le y'nin orta noktası. $a < i(q) < b$ eşitsizliklerini kanıtlamamız gerekiyor. Sadece $a < i(q)$ eşitsizliğini kanıtlayacağız, diğeri çok benzer.

Öyle bir $\delta_1 > 0$ ve M bulmalıyız ki, her $n > M$ için $a_n + \delta_1 < q$ olmalı.

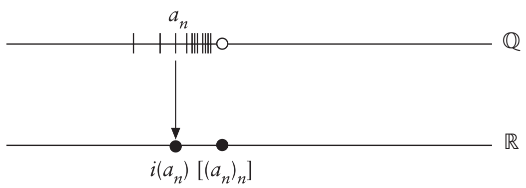
Önce $q - x = (y - x)/2 > (\delta/3)/2 = \delta/6$ eşitliğinin farkına varalım. Şimdi $\delta_1 = \delta/6$ ve $N = M$ alırsak istediğimizi buluruz: Her $n > N$ için,

$$a_n + \delta_1 < x + \delta_1 = x + \delta/6 < q.$$

İstediğimizi kanıtladık. □

Son olarak, daha sonra ihtiyaç duyacağımız bir sonuç kanıtlayalım.

Önsav 16.5. *Eğer $(a_n)_n$ azalmayan bir temel diziyse o zaman her n için $i(a_n) \leq [(a_n)_n]$.*



Bu sonuç aşağıdaki daha genel önsavın bir sonucudur. (Neden? Not: Önsav 16.5'in ifadesindeki $i(a_n)$ terimindeki n ile $[(a_n)_n]$ terimindeki n'lerin işlevleri ayrı. Birincisindeki n sabit bir göstergeç, ikincisindeki ise bir değişken. Birincisini m yaparsanız rahat edersiniz.)

Önsav 16.6. *Eğer $(a_n)_n$ ve $(b_n)_n$ temel dizilerse ve belli bir göstergeçten sonra $a_n \leq b_n$ ise o zaman $[(a_n)_n] \leq [(b_n)_n]$ olur.*

Kanıt: Eğer $c_n = a_n - b_n$ alınırsa, aşağıdaki önsavın kanıtlanmasının yeterli olduğu görülür. □

Önsav 16.7. *Eğer $(c_n)_n$ bir temel diziyse ve belli bir göstergeçten sonra $c_n \leq 0$ ise o zaman $[(c_n)_n] \leq 0_{\mathbb{R}}$ olur.*

Kanıt: $[(c_n)_n] > 0_{\mathbb{R}}$ varsayımını yapalım. O zaman öyle bir $\delta > 0$ kesirli sayısı vardır ki, belli bir göstergeçten sonra $\delta < c_n$ olur ki bu da $c_n \leq 0$ varsayımıyla çelişir. □

17. $\mathbb{R}$'nin Tamlığı ve $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

Bu bölümde, $\mathbb{R}$'de bir sayıya yakınsamaya meyilli her $\mathbb{R}$-dizinin gerçekten bir gerçel sayıya yakınsadığını göstereceğiz.

$\mathbb{Q}$ cisminde bunun doğru olmadığını görmüştük, örneğin $\sqrt{2}$'ye yakınsamak isteyen, ama $\sqrt{2}$ kesirli bir sayı olmadığı için yakınsayamayan kesirli bir sayı dizisinin varlığını göstermiştik: Terimleri pozitif kesirli sayılar olan öyle bir $(a_n)_n$ temel dizisi bulmuştuk ki, karelerin limiti 2'ydi, yani $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = 2$ idi ama $\sqrt{2}$ kesirli bir sayı olmadığından dizinin kendisi hiçbir kesirli sayıya yakınsamıyordu.

"$\mathbb{R}$'de yakınsamaya meyilli dizi" demek, temel $\mathbb{R}$-dizisi demektir. Alışılmış tanım şöyle: $(x_n)_n$ bir $\mathbb{R}$-dizisi olsun. Eğer $\mathbb{R}$'nin her pozitif ε sayısı için, N'den büyük her n, $m > N$ sayısının

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

eşitsizliğini sağladığı bir N doğal sayısı varsa, o zaman $(x_n)_n$ dizisine ***temel*** $\mathbb{R}$***-dizisi*** denir. ($\mathbb{R}$'de mutlak değerin tanımı ve özellikleri için bkz. Bölüm 15.4, Alıştırma 2.) Yani bir $(x_n)_n$ gerçel sayı dizisinin temel $\mathbb{R}$-dizisi olması için, her pozitif ε gerçel sayısı için, öyle bir N göstergeci olmalı ki, her n, $m > N$ için,

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanmalı. Eğer bu tanımda $\mathbb{R}$ yerine $\mathbb{Q}$ alınırsa, temel $\mathbb{Q}$-dizisinin tanımı elde edilir.

Temel $\mathbb{R}$-dizilerine de matematikte geleneksel olarak ***Cauchy dizileri*** denir ve biz de bu terminolojiyi kullanacağız, ama temel $\mathbb{Q}$-dizilerine temel $\mathbb{Q}$-dizileri demeye devam edeceğiz.

$\mathbb{R}$'de bir dizinin limitinin ne demek olduğunu da tanımlayalım: $(x_n)_n$ bir gerçel sayı dizisi ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer her pozitif $\varepsilon \in \mathbb{R}$ için,

$$n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

önermesini sağlayan bir N doğal sayısı varsa, o zaman, $(x_n)_n$ dizisi (n sonsuza giderken) a'ya ***yakınsar*** ya da a, $(x_n)_n$ dizisinin ***limitidir*** denir. Böyle bir diziye ***yakınsak dizi*** denir, aksi halde diziye ***ıraksak*** denir.

Alıştırmalar

17.1. $(x_n)_n$, x'e yakınsayan bir gerçel sayı dizisiyse, $(|x_n|)_n$ dizisinin $|x|$'e yakınsadığını gösterin.

17.2. Bir gerçel sayı dizisinin en fazla bir gerçel sayıya yakınsayabileceğini kanıtlayın. (Dolayısıyla $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ hakkı doğar.)

17.3. Kesirli sayı dizileriyle ilgili teoremleri gerçel sayı dizilerine uyarlayıp kanıtlayın.

17.4. "$\lim_{n\to\infty} |x_n| = |x| \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x$" önermesini kanıtlayın.

Şu önemli ve sık sık kullanılacak kanıtlarda: $i(\mathbb{Q})$, $\mathbb{R}$'de yoğun olduğundan (Teorem 16.4), tanımlardaki ε'u $i(\mathbb{Q})$ althalkasından seçebiliriz. Nitekim eğer $(x_n)_n$ gerçel sayı dizisi, her $\varepsilon > 0_{\mathbb{R}}$ gerçel sayısı için,

öyle bir N vardır ki her $n, m > N$ için,
$|x_n - x_m| < \varepsilon$ olur

özelliğini sağlıyorsa, o zaman elbette $(x_n)_n$ dizisi, her $q > 0$ kesirli sayısı için,

öyle bir N vardır ki her $n, m > N$ için,
$|x_n - x_m| < i(q)$ olur

özelliğini de sağlar. Tersine, eğer $(x_n)_n$ dizisi yukardaki ikinci özelliği sağlıyorsa ve $\varepsilon > 0_{\mathbb{R}}$ herhangi bir gerçel sayıysa, $i(\mathbb{Q})$, $\mathbb{R}$'de yoğun olduğundan, $0 < i(q) < \varepsilon$ eşitsizliklerini sağlayan pozitif bir $q \in \mathbb{Q}$ vardır ve ikinci özelliğe göre her $n, m > N$ için, $|\alpha_n - \alpha_m| < i(q) < \varepsilon$ eşitsizliklerinin sağlandığı bir N vardır.

Aynı şey yakınsaklık kavramı için de geçerlidir.

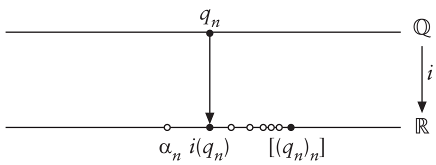
İşte bu bölümde kanıtlayacağımız ana teorem:

Teorem 17.1. *$\mathbb{R}$'de her Cauchy dizisinin bir limiti vardır. Matematiksel jargonla söylemek gerekirse, $\mathbb{R}$* ***tamdır****.*

Bu teorem sayesinde, bir gerçel sayı dizisinin yakınsak olduğunu anlamak için illa dizinin limitini bulmaya gerek kalmayacak.

Kanıtımızın planı şöyle: Bir $(\alpha_n)_n$ Cauchy dizisi verilmiş olsun.

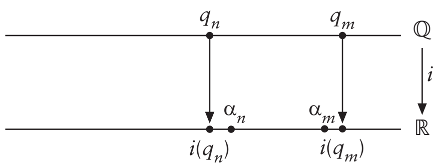
Birinci Adım: Teorem 16.4'e göre $i(\mathbb{Q})$, $\mathbb{R}$'de yoğundur. Demek ki her α_n gerçel sayısının "çok çok yakınında" $i(\mathbb{Q})$'den bir



eleman bulabiliriz. Bu elemana $i(q_n)$ diyelim. $q_n \in \mathbb{Q}$ elbette. $i(q_n)$, α_n gerçel sayısına $i(1/n)$ kadar yakın olsun, yani,

$$|\alpha_n - i(q_n)| < i(1/n)$$

olsun. $(\alpha_n)_n$ dizisiyle uğraşacağımıza, çok daha makul bir gerçel sayı dizisi olan $(i(q_n))_n$ dizisiyle uğraşacağız.



$(\alpha_n)_n$ dizisi yerine ona çok yakın olan $(q_n)_n$ dizisiyle ilgileneceğiz

İkinci Adım: $i(q_n)$ sayısı α_n'ye de çok yakın olduğundan, $(i(q_n))_n$ dizisinin de aynen $(\alpha_n)_n$ dizisi gibi bir Cauchy dizisi olduğunu kolaylıkla kanıtlayacağız.

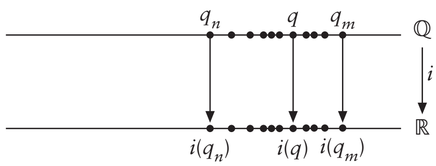
Üçüncü Adım: Bir önceki adımdan $(q_n)_n$ dizisinin temel bir $\mathbb{Q}$-dizisi olduğu çıkacak. Demek ki $[(q_n)_n]$ bir gerçel sayıdır.

Dördüncü Adım: Ardından $(i(q_n))_n$ dizisinin $[(q_n)_n]$ gerçel sayısına yakınsadığını kanıtlayacağız.

Beşinci Adım: Dördüncü adımdan $(\alpha_n)_n$ dizisinin $[(q_n)_n]$ gerçel sayısına yakınsadığı çıkacak ve teorem kanıtlanacak.

Kanıtta bir yerde $(i(1/n))_n$ gerçel sayı dizisinin $0_{\mathbb{R}}$ sayısına yakınsadığını kanıtlamamız gerekecek. Bunu hemen yapalım, hatta daha genel bir şey kanıtlayalım.

Önsav 17.2. $(q_n)_n$ *kesirli sayı dizisi* q *kesirli sayısına yakınsıyorsa*, $(i(q_n))_n$ *gerçel sayı dizisi* $i(q)$ *gerçel sayısına yakınsar.*



Kanıt: $\varepsilon > 0_{\mathbb{R}}$ herhangi bir gerçel sayı olsun. Teorem 16.4'e göre, $0_{\mathbb{R}} < i(e) < \varepsilon$ eşitsizliklerini sağlayan bir e kesirli sayısı vardır. Önsav 16.1'e göre $e > 0$'dır. $(q_n)_n$ kesirli sayı dizisi q kesirli sayısına yakınsadığından, öyle bir N göstergeci vardır ki, her $n > N$ için, $|q_n - q| < e$ olur. Her iki tarafın da i-imgesini alırsak, Önsav 16.2'den, $|i(q_n) - i(q)| < i(e) < \varepsilon$ bulunur. □

Sonuç 17.3. $\lim_{n\to\infty} i(1/n) = 0_{\mathbb{R}}$.

Kanıt: Kanıttan ziyade açıklamalara ihtiyacımız var. Önsava göre,

$$\lim_{n\to\infty} i(1/n) = i(\lim_{n\to\infty} 1/n) = i(0) = 0_{\mathbb{R}}.$$

İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

Teorem 1'in Kanıtı: İlk adımdan başlayalım: $n > 0$ bir doğal sayı olsun. Demek ki $1/n > 0$ ve $i(1/n) > 0_{\mathbb{R}}$'dir. $i(\mathbb{Q})$, $\mathbb{R}$'de yoğun olduğundan (Teorem 16.4), $\alpha_n - i(1/n)$ ile $\alpha_n + i(1/n)$ arasında $i(\mathbb{Q})$'den bir eleman vardır. Bu elemana, $q_n \in \mathbb{Q}$ için, $i(q_n)$ diyelim. Demek ki,

$$\alpha_n - i(1/n) < i(q_n) < \alpha_n + i(1/n),$$

yani $-i(1/n) < i(q_n) - \alpha_n < i(1/n)$, dolayısıyla $|i(q_n) - \alpha_n| < i(1/n)$.

Birinci adım tamamlandı. (Eksikliğini hissediyorsanız $q_0 = 0$ alabilirsiniz.) Sıra ikinci adımda.

İkinci Adım: $(i(q_n))_n$ *bir Cauchy dizisidir.*

$\varepsilon > 0_{\mathbb{R}}$ olsun. Öyle bir N göstergeci bulacağız ki, her $n, m > N$ için, $|i(q_n) - i(q_m)| < \varepsilon$ olacak. Bunun için, $(\alpha_n)_n$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu ve $i(q_n)$'yi de istediğimiz kadar α_n'ye yaklaştıracağımızı kullanacağız. $|i(q_n) - i(q_m)|$ ifadesiyle oynayıp

$$|i(q_n) - i(q_m)| < \varepsilon$$

eşitliğinin geçerli olması için n ve m'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulacağız. $|i(q_n) - i(q_m)|$ ifadesiyle oynayalım:

$$\begin{aligned}|i(q_n) - i(q_m)| &< |i(q_n) - \alpha_n + \alpha_n - \alpha_m + \alpha_m - i(q_m)|\\ &\le |i(q_n) - \alpha_n| + |\alpha_n - \alpha_m| + |\alpha_m - i(q_m)|\\ &\le i(1/n) + |\alpha_n - \alpha_m| + i(1/m).\end{aligned}$$

(İkinci satırdaki eşitsizlik için bkz. Bölüm 15.4, Alıştırma 2.) Demek ki, $i(1/n)$, $|\alpha_n - \alpha_m|$, $i(1/m)$ ifadelerinin her birini $\varepsilon/3$'ten küçük yaparsak istediğimiz olur. N_1, her $n, m > N_1$ için,

$$|\alpha_n - \alpha_m| < \varepsilon/3$$

eşitsizliğinin sağlandığı göstergeç olsun. $(\alpha_n)_n$ bir Cauchy dizisi olduğundan böyle bir göstergeç vardır. Sonuç 3'e göre, $(i(1/n))_n$ gerçel sayı dizisinin $0_{\mathbb{R}}$ sayısına yakınsadığından, öyle bir N_2 göstergeci vardır ki, her $n > N_2$ için,

$$i(1/n) < \varepsilon/3$$

olur. Şimdi N, hem N_1'den hem de N_2'den büyükeşit herhangi bir doğal sayı olsun, mesela $N = \max\{N_1, N_2\}$ olsun. O zaman, her $n, m > N$ için,

$$\begin{aligned}|i(q_n) - i(q_m)| &< i(1/n) + |\alpha_n - \alpha_m| + i(1/m)\\ &< i(1/N) + |\alpha_n - \alpha_m| + i(1/N)\\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon\end{aligned}$$

olur ve istediğimiz kanıtlanmış olur.

Üçüncü Adım: $(q_n)_n$ *temel bir dizidir.*

$\varepsilon > 0$ herhangi bir kesirli sayı olsun. O zaman $i(\varepsilon) > 0_\mathbb{R}$'dir. İkinci adıma göre $(i(q_n))_n$ bir Cauchy dizisi olduğundan, öyle bir N vardır ki, her n, $m > N$ için, $|i(q_n) - i(q_m)| < i(\varepsilon)$ olur. Buradan ve Önsav 16.1'den $|q_n - q_m| < \varepsilon$ çıkar.

Üçüncü adımdan, $[(q_n)_n]$ diye bir gerçel sayının varlığı çıkar.

Dördüncü Adım: $(i(q_n))_n$ *dizisi* $[(q_n)_n]$ *gerçel sayısına yakınsar.*

Herhangi bir $e > 0$ kesirli sayısı seçelim. Öyle bir M bulmak istiyoruz ki, her $m > M$ için

$$|[(q_n)_n] - i(q_m)| < i(e)$$

olsun. ($\varepsilon > 0_\mathbb{R}$ gerçel sayısı yerine $e > 0$ kesirli sayısı seçebileceğimizi bölümün başında göstermiştik.) Öte yandan,

$$\begin{aligned}|[(q_n)_n] - i(q_m)| &= |[(q_n)_n] - [s(q_m)]|\\ &= |[(q_n - q_m)_n]|\\ &= [(|q_n - q_m|)_n]\end{aligned}$$

eşitlikleri geçerlidir ve

"$[(|q_n - q_m|)_n] < i(e)$"

ifadesi,

"öyle bir N göstergeci ve $d > 0$ kesirli sayısı vardır ki, $n > N$ için, $|q_n - q_m| + d < e$"

anlamına gelir. Demek ki verilmiş herhangi bir $e > 0$ kesirli sayısı için, öyle M ve N göstergeçleri ve $d > 0$ kesirli sayısı bulmak istiyoruz ki, her $n > N$ ve her $m > M$ için

$$|q_n - q_m| + d < e$$

olsun. N'yi M'ye eşit bulmanın bir sakıncası olamaz elbet. İşimiz bayağı kolaylaştı: $(q_n)_n$ dizisi temel bir dizi olduğundan, öyle bir N vardır ki, her $n, m > N$ için,

$$|q_n - q_m| < e/2$$

olur. Şimdi $d = e/2$ seçelim. Her $n, m > N$ için

$$|q_n - q_m| + d < e/2 + e/2 = e$$

olur.

Beşinci Adım: $(\alpha_n)_n$ *dizisi* $[(q_n)_n]$ *gerçel sayısına yakınsar.*

Birinci adıma göre, her n için, $|i(q_n) - \alpha_n| < i(1/n)$. Ayrıca Önsav 17.2'ye (ya da Sonuç 17.3'e göre)

$$\lim_{n\to\infty} i(1/n) = 0_{\mathbb{R}}.$$

Bu iki olgudan ve Sandviç Teoremi'nden (Teorem 9.10),

$$\lim_{n\to\infty} |i(q_n) - \alpha_n| = 0_{\mathbb{R}}$$

çıkar.

Şimdi $[(q_n)_n]$ gerçel sayısını α ile gösterelim ve bildiklerimizi yazalım:

a) $\lim_{n\to\infty} i(q_n) = \alpha$. (Dördüncü adım.)

b) $\lim_{n\to\infty} |i(q_n) - \alpha_n| = 0_{\mathbb{R}}$.

Sonucumuz bu iki olgudan çıkacak: $\varepsilon > 0_{\mathbb{R}}$, herhangi bir pozitif sayı olsun.

$$|\alpha_n - \alpha|$$

sayısını belli bir göstergeçten sonra ε'dan küçük yapmaya çalışacağız.

$$\begin{aligned}|\alpha_n - \alpha| &= |\alpha_n - i(q_n) + i(q_n) - \alpha| \\ &\leq |\alpha_n - i(q_n)| + |i(q_n) - \alpha|\end{aligned}$$

eşitsizliğinden, $|\alpha_n - i(q_n)|$ ve $|i(q_n) - \alpha|$ sayılarını $\varepsilon/2$'den küçük yapmak gerektiği anlaşılır. Varsayımlardan dolayı her ikisi de mümkün. Ana teorem kanıtlanmıştır. □

$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

Kesirli sayılar kümesi gerçel sayılar kümesinin bir altkümesidir... diye öğretilmiştir bize. Oysa burada inşa edildiği şekilde, hiçbir kesirli sayı bir gerçel sayı olamaz, çünkü, burada tanımlandığı biçimiyle, her gerçel sayı bir kesirli sayı kümesidir.

Kesirli sayıları gerçel sayı olarak görmenin birçok yolu vardır. Bu yolların en kestirmesi, kesirli sayılar kümesinin eski tanımını unutup yeni tanım olarak $i(\mathbb{Q})$'yü kabullenmektir. Bir başka yöntem, $\mathbb{R}$'nin tanımını değiştirmektir: Eğer eski $\mathbb{R}$'den $i(\mathbb{Q})$'yü çıkarıp yerine $\mathbb{Q}$'yü koyarsak, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$'nin bir altkümesi olur:

$$\text{yeni } \mathbb{R} = (\text{eski } \mathbb{R} \setminus i(\mathbb{Q})) \cup \mathbb{Q}$$

Bölüm 5.15'te bu yöntemi ayrıntılarıyla açıklamıştık. Bundan böyle $\mathbb{Q}$'nün $\mathbb{R}$'nin altkümesi olduğunu varsayacağız.