15. Gerçel Sayılarda Sıralama

Matematiği bir iki sayfa erteleyerek, gerçel sayılarda sıralamayı nasıl tanımlayabileceğimizi tartışacağız önce. Doğal ve basit gibi görünen tanım denemelerinin zorluklarından sözettikten sonra ℝ'de sıralamanın matematiksel tanımını verip özelliklerini irdeleyeceğiz.

15.1. Cebirsel Tanım Tartışması

Gerçel sayılar kümesinde sıralamayı cebirsel olarak tanımlamak mümkündür ve cebirsel tanım olabilecek en basit düzeydedir: $r \leq s$ ilişkisini "$s - r$ gerçel sayısı ℝ'de bir karedir" (yani bir gerçel sayının kendisiyle çarpımıdır) olarak tanımlayalım.

Tanım basit ama sadece tanımı vermek yetmiyor, tanımın istenen özellikleri sağladığını da göstermek gerekiyor. Örneğin, bu tanımı kabul ederek,

$$r \leq s \text{ ve } s \leq t \text{ ise } r \leq t$$

önermesini kanıtlamak isterseniz, düşünmeye başladıktan çok kısa bir süre sonra,

Her a ve b için, $a^2 + b^2$ bir karedir

önermesini kanıtlamak zorunda olduğunuzu görürsünüz. Oysa bu son ifade her cisimde doğru olmadığından, bunu kanıtlamak için gerçel sayıların tanımına inmemiz gerekiyor. Bu sorunu yoketmenin bir yolu, gerçel sayılarda $\leq$ eşitsizliğini, belki biraz daha karmaşık bir biçimde,

$$r \leq s \Leftrightarrow s - r \text{ karelerin toplamıdır}$$

olarak tanımlamaktır. Nitekim bu yeni tanımla,

$$r \leq s \text{ ve } s \leq t \text{ ise } r \leq t$$

önermesini kanıtlamak çok kolaydır, gerçel sayıların tanımına gitmeden kanıtlanabilir, çünkü bu her halkada ve cisimde doğrudur (karelerin toplamının toplamı da bir kare toplamıdır). Bunu kanıtlamak kolay ama bu sefer de

$$r \leq s \text{ ve } s \leq r \text{ ise } r = s$$

önermesini kanıtlarken sorun çıkar. Bu önermeyi kanıtlamak için, kolayca görülebileceği gibi

karelerin toplamı 0'*sa*, *toplanan her kare* 0'*dır*

önermesini kanıtlamak gerekiyor. Bu da pek o kadar kolay bir şey değildir ve gene gerçel sayıların tanımına inmek gerekir. (Sonlu cisimlerde ve $\mathbb{C}$'de bu önerme yanlıştır örneğin.)

Önerdiğimiz bu yöntemi izleyebilirdik. Biz analize daha yakın bir tanımı tercih edeceğiz.

Sıralamayı tanımlamak için pozitif sayıları tanımlamanın yeterli olduğunu görelim. Nitekim, eğer $r \geq 0$ eşitsizliğini tanımlamışsak, o zaman, $r \leq s$ eşitsizliğini $s - r \geq 0$ olarak tanımlayabiliriz. Dwemek ki hangi gerçel sayıların 0'dan büyükeşit olarak tanımlanması gerektiğini anlamalıyız.

Ama tabii biz yukardaki gibi 0 yazamayız, 0 henüz bir gerçel sayı değil, sadece bir kesirli sayı. 0 yerine şimdilik $0_{\mathbb{R}}$, yani $[s(0)]$ yazmamız gerekir. İlerde, küçük bir hileye başvurarak

$$0 = 0_{\mathbb{R}} = [s(0)]$$

varsayımını yapabileceğiz.

Bütün bunların aslında bu kadar zor olmaması gerekiyor, çünkü ileride kanıtlayacağımız üzere, $\mathbb{R}$ üzerine tek bir sıralama vardır.

15.2. Analitik Tanım Tartışması

r, herhangi bir gerçel sayı olsun. Diyelim $(a_n)_n \in \mathcal{C}$ için

$$r = [(a_n)_n].$$

Sezgimizi artırmak için söyleyelim: r'yi ilerde $(a_n)_n$ dizisinin limiti olarak görmeyi başaracağız. $(a_n)_n$ kesirli sayı dizisi aslında r'ye yakınsamak amacıyla yola çıkıyor ama r orada olmadığı için yakınsayamıyor.

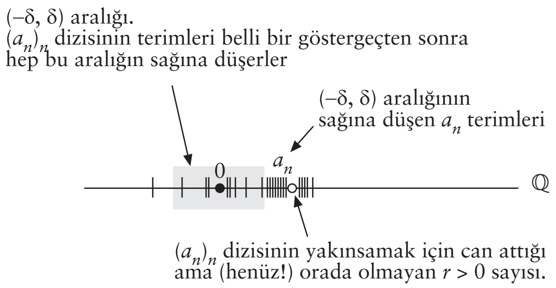
r gerçel sayısı ilerde burada olacak ve $(a_n)_n$ dizisi r'ye yakınsayacak.

r'nin $0_\mathbb{R}$'den büyük eşit olmasının ne demek olması gerektiğini anlamaya çalışıyoruz. a_n'ler kesirli sayı olduklarından ve kesirli sayılarda sıralamayı bildiğimizden, a_n'nin 0'dan büyük eşit olmasının ne demek olduğunu biliyoruz. Buradan hareketle $r \geq 0_\mathbb{R}$ eşitsizliğinin bir tanımını vermeliyiz.

"$r \geq 0_\mathbb{R}$ eşitsizliğinin geçerli olması için her n için $a_n \geq 0$ olmalı" demek, ilk deneme için fena olmasa da başarısızdır, çünkü örneğin ilk birkaç a_i terimi -1'e ve diğerleri de 1'e eşitse, o zaman $r = 1_\mathbb{R} > 0_\mathbb{R}$ olur, ve r'nin pozitif olması gerekir. Yani önerilen koşul yeterlidir ama illa gerekli değildir.

"$r \geq 0_\mathbb{R}$ eşitsizliğinin geçerli olması için belli bir göstergeçten sonra hep $a_n \geq 0$ olmalıdır" demek biraz daha doğru olur ama bu da başarıya ulaşmaz, çünkü $a_n = -1/n$ alırsak, o zaman her n için $a_n < 0$ olur ama $r = 0_\mathbb{R} \geq 0_\mathbb{R}$ olur, yani bu koşul da yukardaki gibi $r \geq 0_\mathbb{R}$ koşulu için yeterlidir ama gerekli değildir.

$r \geq 0_\mathbb{R}$ eşitsizliğinin tanımını vermek yerine $r > 0_\mathbb{R}$ eşitsizliğinin tanımını vermek görece daha kolaydır, çünkü pozitif bir sayıya yakınsayan bir dizinin terimleri (0'a yakınsayan bir dizinin terimlerinin aksine) **bir zaman sonra** 0'dan uzak durmak zorundadır, belli bir pozitif kesirli sayının altına inemez, yani 0'a iste-



nildiği kadar yaklaşamaz. Tabii bizim $(a_n)_n$ dizimiz aslında r'ye yakınsamıyor (şimdilik en azından) ama hiç olmazsa yakınsarmış gibi yapıyor ve yakın gelecekte gerçekten yakınsayacak.

$(a_n)_n$ dizisi 0'a yakınsamayan bir temel dizi olsun. Sonuç 11.10.i'e göre bu dizi zamanla 0'dan uzak durur, yani öyle bir $\delta > 0$ kesirli sayısı ve N göstergeci vardır ki, her $n > N$ için

$$\delta < |a_n|$$

olur. Ayrıca r de pozitif olduğundan a_n bir zaman sonra pozitif olmalı ve $\delta < |a_n|$ eşitsizliğinden öte,

$$\delta < a_n$$

eşitsizliği geçerli olmalı. İşte bizi tanıma götüren bu fikir olacak.

15.3. Matematiksel Tanım

Tanım. *a bir gerçel sayı olsun. Bir $(a_n)_n$ temel dizisi için*

$$a = [(a_n)_n]$$

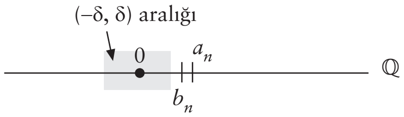
yazalım. Eğer her $n > N$ için,

$$\delta < a_n$$

*eşitsizliğinin sağlandığı bir $\delta > 0$ kesirli sayısı ve bir N göstergeci varsa, o zaman, a'nın **pozitif** olduğunu söyleyeceğiz. Yani a'nın **pozitif** olması için bir $\delta > 0$ kesirli sayısı için, sonlu tanesi hariç a_n'lerin hepsi δ'dan büyük olmalıdır.*

Her zaman olduğu gibi bu tanımın geçerli olması için kontrol etmemiz gereken önemli bir nokta var; o da şu: Ola ki bir başka $(b_n)_n$ temel dizisi için $a = [(b_n)_n]$ olur ve yukardaki tanımı $(a_n)_n$'ye uyguladığımızda a pozitif çıkar da, aynı tanımı $(b_n)_n$'ye uyguladığımızda a pozitif çıkmaz. (Acele etmeyin, henüz negatiflik kavramını tanımlamadık!) Bu durumun olamayacağını kanıtlamamız gerekiyor. Kanıtlayalım hemen.

Önsav 15.1. *$(a_n)_n$ ve $(b_n)_n$ aynı gerçel sayıyı temsil eden iki temel dizi olsun, yani $[(a_n)_n] = [(b_n)_n]$ olsun. Eğer her $n > N_a$ için $\delta_a < a_n$ eşitsizliğinin sağlandığı bir $\delta_a > 0$ kesirli sayısı ve bir N_a göstergeci varsa, o zaman, her $n > N_b$ için $\delta_b < a_n$ eşitsizliğinin sağlandığı bir $\delta_b > 0$ kesirli sayısı ve bir N_b göstergeci vardır.*



Kanıt: Kanıtın fikri açık olmalı: Eğer $(a_n)_n$ dizisi 0'dan uzaksa ve $(b_n)_n$ dizisi $(a_n)_n$ dizisine çok "yakınsa", o zaman $(b_n)_n$ dizisi de 0'dan uzaktır. Bu fikri kullanmak için önce şu eşitsizliğin farkına varalım:

$$b_n = (b_n - a_n) + a_n \geq -|b_n - a_n| + a_n = a_n - |b_n - a_n|.$$

Eğer n göstergeci, $a_n > \delta_a$ ve $|b_n - a_n| < \delta_a/2$ olacak şekilde seçilirse, bu eşitsizliğe göre,

$$b_n \geq a_n - |b_n - a_n| > \delta_a - \delta_a/2 = \delta_a/2$$

olur ve önsav kanıtlanır. Daha biçimsel olalım:

δ_a ve N_a önsavda söylendiği gibi olsun. Varsayıma göre,

$$(b_n - a_n)_n$$

dizisi 0'a yakınsıyor. Demek ki belli bir M göstergeci için, eğer $n > M$ ise

$$|b_n - a_n| < \delta_a/2$$

olur. Şimdi $N_b = \max\{N_a, M\}$ olsun. O zaman her $n > N_b$ için,

$$\begin{aligned} b_n &= (b_n - a_n) + a_n > -|b_n - a_n| + a_n \\ &= a_n - |b_n - a_n| > \delta_a - \delta_a/2 = \delta_a/2 \end{aligned}$$

olur. Demek ki $\delta_b = \delta_a/2$ olarak alabiliriz. □

Şimdi artık gönül rahatlığıyla yukardaki "pozitiflik" tanımını kabul edebiliriz ve buradan hareketle gerçel sayılarda sıralamayı tanımlayabiliriz. Eğer a ve b iki gerçel sayıysa ve $a - b$ pozitifse, a'nın b'den ***daha büyük*** olduğunu söyleyeceğiz ve bunu $a > b$ olarak kısaltacağız. Demek ki,

$$a > b \Leftrightarrow a - b \text{ pozitifse.}$$

Bu tanımda $b = 0_{\mathbb{R}}$ olarak alırsak, beklenildiği gibi,

$$a > 0_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow a \text{ pozitifse}$$

önermesini elde ederiz. Eğer tanımda $a = 0_{\mathbb{R}}$ alırsak,

$$0_{\mathbb{R}} > b \Leftrightarrow -b \text{ pozitifse}$$

önermesini elde ederiz.

Demek ki tanıma göre, $(a_n)_n$ ve $(b_n)_n$ temel dizileri için, $[(a_n)_n] > [(b_n)_n]$ ancak ve ancak

her $n > N$ için $\delta < a_n - b_n$ eşitsizliğinin sağlandığı bir $\delta > 0$ kesirli sayısı ve bir N göstergeci varsa.

Gelenek olduğu üzere, $a < b$ yerine kimileyin $b > a$ yazacağız ve b'nin a'dan ***daha büyük*** olduğunu söyleyeceğiz.

Gerçel sayılarda tanımladığımız > ilişkisini, kesirli sayılarda tanımlanan > sıralamasıyla karıştırmamak gerekir. Şimdilik ikisi ayrı şeyler, aralarındaki tek ilişki yukarda verdiğimiz tanımda verilmiş. $[(a_n)_n] > [(b_n)_n]$ yazdığımızda, biraz önce tanımladığımız gerçel sayılardaki > ilişkisinden sözediyoruz. Oysa $\delta < a_n - b_n$ ya da $n > N$ yazdığımızda δ, a_n, b_n, n ve N sayıları kesirli sayılardır ve buradaki < simgesi kesirli sayılar kümesinde geçmişte tanımladığımız ve burada her şeyini bildiğimizi varsaydığımız olağan sıralamadır. Gerçel sayılarda tanımlanan > ilişkisinin bir sıralama olup olmadığını henüz bilmiyoruz ama sanki birazdan bileceğiz gibi bir his var içimde:

15.4. < İlişkisi Bir Tamsıralamadır

Yukarda tanımladığımız ilişkinin bir tamsıralama olduğunu kanıtlayalım, yani

S1. Hiçbir r için, $r < r$ ilişkisi doğru olamaz;
S2. Her r, s ve t için, eğer $r < s$ ve $s < t$ ise $r < t$'dir;
S3. Her r ve s için, ya $r < s$ ya $r = s$ ya da $s < r$
önermelerini doğru olduğunu gösterelim.

Teorem 15.2. *Yukarda tanımlanan < ilişkisi* $\mathbb{R}$*'yi tamsıralar.*

S1'in Kanıtı: $r < r$ önermesi ancak ve ancak $0_{\mathbb{R}} > 0_{\mathbb{R}}$ ise doğru olabileceğinden, $0_{\mathbb{R}}$'nin pozitif olamayacağını kanıtlamamız gerekiyor. Her n için $a_n = 0$ alırsak, $0_{\mathbb{R}} = [(a_n)_n]$ olduğundan, pozitifliğin tanımında $a_n = 0$ alabiliriz. Sorumuz şu: Her $n > N$ için, $\delta < a_n = 0$ eşitsizliğinin sağlandığı bir $\delta > 0$ kesirli sayısı ve bir N göstergeci var mı? Yok tabii! Demek ki $0_{\mathbb{R}}$ pozitif olamaz.

S2'nin Kanıtı: $r < s$ ve $s < t$ olsun. Demek ki $s - r$ ve $t - s$ gerçel sayıları pozitif. Eğer iki pozitif sayının toplamının da pozitif olduğunu kanıtlarsak, o zaman bu iki sayının toplamı olan
$$(s - r) + (t - s) = t - r$$
sayısının da pozitif olduğunu, yani $t > r$ ilişkisini kanıtlamış oluruz.

Şimdi iki pozitif sayının toplamının pozitif olduğunu kanıtlayalım. $a > 0$ ve $b > 0$ olsun. $a = [(a_n)_n]$, $b = [(b_n)_n]$, $\delta_a > 0$ N_a, $\delta_b > 0$ ve N_b de önsavda söylendiği gibi olsun. Ayrıca $N = \max\{N_a, N_b\}$ ve $\delta = \delta_a + \delta_b > 0$ olsun. O zaman $n > N$ için,
$$a_n + b_n > \delta_a + \delta_b = \delta$$
olur. Gerçel sayılarda toplamanın tanımına göre,
$$a + b = [(a_n)_n] + [(b_n)_n] = [(a_n + b_n)_n]$$
olduğundan, $a + b$'nin pozitif olduğu böylece kanıtlanmış oldu.

S3'ün Kanıtı: Bu biraz daha zor. $s - r$ yerine a yazarsak, her a gerçel sayısı için,
$$a > 0_{\mathbb{R}},\ a = 0_{\mathbb{R}},\ 0_{\mathbb{R}} > a$$
önermelerinden birinin doğru olduğunu kanıtlamamız gerektiğini anlarız. (O1 ve O2'ye göre bu üç önermeden sadece ve sadece biri doğru olabilir.)

Bu üç önermeden ikisinin yanlış olduğunu varsayıp üçüncüsünü kanıtlamak gerekir. Birinciyle üçüncünün yanlış olduğunu varsayıp $a = 0_{\mathbb{R}}$ eşitliğini kanıtlayalım. (En simetrik olanını seçtik.)

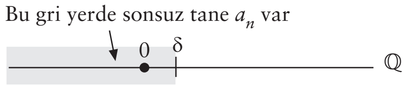
$a = [(a_n)_n]$ yazalım. $a = 0_{\mathbb{R}}$ eşitliğini yani

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

eşitliğini kanıtlamak istiyoruz.

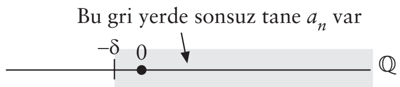
Varsayıma göre $a > 0_{\mathbb{R}}$ önermesi yanlış olduğundan, > ilişkisinin tanımına göre,

> Hangi $\delta > 0$ kesirli sayısı ve N göstergeci seçilirse seçilsin, $a_n \le \delta$ eşitsizliğinin sağlandığı bir $n > N$ vardır. Bir başka deyişle $\delta > 0$ kesirli sayısı ne olursa olsun, $a_n \le \delta$ eşitsizliğinin sağlayan sonsuz tane n vardır.



$0_{\mathbb{R}} > a$ önermesi, > ilişkisinin tanımına göre, $-a > 0_{\mathbb{R}}$ anlamına geldiğinden ve $-a = [(-a_n)_n]$ olduğundan,

> Hangi $\delta > 0$ kesirli sayısı ve N göstergeci seçilirse seçilsin, $-a_n \le \delta$ eşitsizliğinin sağlandığı bir $n > N$ vardır. Bir başka deyişle $\delta > 0$ kesirli sayısı ne olursa olsun, $a_n \ge -\delta$ eşitsizliğinin sağlayan sonsuz tane n vardır.



Bu bilgilerin dışında bir de $(a_n)_n$ dizisinin bir temel dizi olduğunu biliyoruz. Bütün bunlardan $(a_n)_n$ dizisinin limitinin 0 olduğunu kanıtlamalıyız.

Yukardaki bilgilere dayanarak, öyle bir mutlak artan

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k < n_{k+1} < \ldots$$

doğal sayısı dizisi bulacağız ki, her k için,

$$-1/k < a_{n_k} < 1/k$$

olacak. Bu da Sandviç Teoremi'ne göre (Teorem 9.10), $(a_{n_k})_k$ altdizisinin 0'a yakınsadığı anlamına gelir. Ama o zaman da

Teorem 12.3'e göre $(a_n)_n$ dizisi de 0'a yakınsar ve böylece istediğimiz kanıtlanmış olur.

Mutlak artan $(n_k)_k$ doğal sayı dizisini bulalım.

Önce n_1'i bulalım. Aşağıdaki şekilden takip edebilirsiniz. $(a_n)_n$ bir temel dizi olduğundan öyle bir N vardır ki, $n, m > N$ için,

$$|a_n - a_m| < 1/2$$

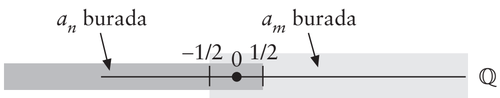
olur. Varsayımlara göre öyle $n, m > N$ var ki,

$$a_n \leq 1/2 \text{ ve } a_m \geq -1/2$$

olur. Şimdi

$$-1 < -\frac{1}{2} \leq a_m = a_m - a_n + a_n \leq |\, a_m - a_n \,| + a_n < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

olur, yani $-1 < a_m < 1$. Demek ki $n_1 = m$ seçersek istediğimiz olur.



ve a_n ile a_m arasındaki fark en fazla 1/2

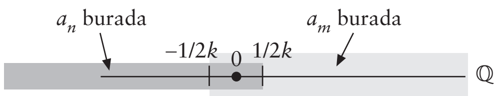
Şimdi, her $i = 1, 2, \ldots, k-1$ için,

$$-1/i < a_{n_i} < 1/i$$

olacak biçimde $n_1 < n_1 < \ldots < n_{k-1}$ göstergeçlerini bulduğumuzu varsayalım.

$$-1/k < a_{n_k} < 1/k$$

eşitsizliğini sağlayan ve n_{k-1}'den büyük bir n_k göstergeci bulacağız. Aşağıdaki şekilden takip edebilirsiniz. $(a_n)_n$ bir temel di-



ve a_n ile a_m arasındaki fark en fazla $1/2k$

zi olduğundan öyle bir N vardır ki, $n, m > N$ için,

$$|a_n - a_m| < 1/2k$$

olur. Varsayımlara göre öyle $n, m > \max\{N, n_{k-1}\}$ vardır ki,

$$a_n \leq 1/2k \text{ ve } a_m \geq -1/2k$$

olur. Şimdi

$$-\frac{1}{k} < -\frac{1}{2k} \le a_m = a_m - a_n + a_n \le |\, a_m - a_n \,| + a_n < \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{k}$$

olur, yani $-1/k < a_m < 1/k$. Demek ki $n_k = m$ seçersek istediğimiz olur. Teorem kanıtlanmıştır. □

Her zaman olduğu gibi, α, β gerçel sayıları için, "$\alpha \le \beta$", "ya $\alpha < \beta$ ya da $\alpha = \beta$" anlamına gelecek. Elbette, Teorem 15.2'ye göre, $\alpha \le \beta$ ifadesi ancak ve ancak $\beta < \alpha$ ifadesi yanlışsa doğrudur.

Sıralamayla işimiz bitmedi. Toplama ve çarpmanın sıralamayı koruduğunu da kanıtlamamız gerekiyor.

Teorem 15.3. *a, b ve c üç gerçel sayı olsun.*
i. *Eğer $a < b$ ise $a + c < b + c$'dir.*
ii. *Eğer $a < b$ ve $c > 0$ ise $ac < bc$'dir.*
Kanıt: i) Çok kolay.
ii) Bu da oldukça kolay. $b - a$ yerine d yazarsak,

$$d > 0 \text{ ve } c > 0 \text{ ise } cd > 0$$

önermesini kanıtlamamız gerektiğini anlarız. Kanıtlayalım.

$$d = [(d_n)_n] \text{ ve } c = [(c_n)_n]$$

olsun. Varsayıma göre, her $n > N_d$ için $\delta_d < d_n$ eşitsizliğinin sağlandığı bir $\delta_d > 0$ kesirli sayısı ve bir N_d göstergeci vardır. Ve her $n > N_c$ için $\delta_c < c_n$ eşitsizliğinin sağlandığı bir $\delta_c > 0$ kesirli sayısı ve bir N_c göstergeci vardır.

Şimdi, $\delta = \delta_c\delta_d$ ve $N = \max\{N_c, N_d\}$ alalım. Her $n > N$ için,

$$c_n d_n > \delta_c\delta_d = \delta$$

olur. □

Sonuç 15.4. $\mathbb{R}$, *aynen* $\mathbb{Q}$ *gibi, sıralı bir cisimdir.*

Alıştırmalar

15.4.1. Her $n, m \in \mathbb{R}$ için "$n_\mathbb{R} \le m_\mathbb{R} \Leftrightarrow n \le m$" önermesini kanıtlayın. ($n_\mathbb{R}$'nin tanımı için bkz Bölüm 14'ün sonundaki alıştırma ya da Bölüm 6A.5.)

15.4.2. Her sıralı halkada olduğu gibi $\mathbb{R}$'de de mutlak değer fonksiyonunu tanımlayabiliriz:

$$|x| = \max\{x, -x\}.$$

Her $x, y \in \mathbb{R}$ için, şu özellikleri kanıtlayın:

i. $|x| \geq 0$.
ii. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
iii. $|-x| = |x|$.
iv. $|xy| = |x||y|$.
v. [Üçgen Eşitsizliği] $|x + y| \leq |x| + |y|$.
vi. $||x| - |y|| \leq |x - y|$.
vii. $|x| = x \Leftrightarrow x \geq 0$.

15.5. Gerçel Sayılarda Tek bir Sıralama Vardır

Okur, matematiksel olmasa da, dayatmayla da olsa, gerçel sayılarda her pozitif sayının bir karekökü olduğunu biliyordur, yani her pozitif gerçel sayı bir karedir. Dolayısıyla gerçel sayılarda sıralamayı toplama ve çarpmanın yardımıyla tanımlayabiliriz:

$$x \leq y \Leftrightarrow y = z^2 + x \text{ eşitliğini sağlayan bir } z \text{ varsa}$$

ya da,

$$x < y \Leftrightarrow \begin{cases} y = z^2 + x \ ve \ z \neq 2z \\ \text{ilişkilerini sağlayan bir } z \text{ varsa} \end{cases}$$

Kesirli sayılarda ise her sayı bir kare değildir, örneğin 2'nin karekökü kesirli bir sayı değildir ama her kesirli sayı dört kesirli sayının karelerinin toplamıdır. (Üç kare yetmez. Neden dört karenin yettiğinin kanıtını sayılar kuramıyla ilgili bir başka ders notlarında görürüz.) Dolayısıyla kesirli sayılarda da sıralama toplama ve çarpmanın yardımıyla tanımlanabilir:

$$x \leq y \Leftrightarrow \begin{cases} y = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + x \\ \text{eşitliğini sağlayan bir } z_1, z_2, z_3, z_4 \text{ varsa} \end{cases}$$

Bu, daha genel bir olgunun tezahürüdür. Bir cismin olası sıralamaları büyük ölçüde cismin kareleri ve karelerin sonlu toplamları tarafından belirlenir. Anlatalım.

Sıralı bir cisim, her şeyden önce bir cisimdir. Sıralı bir cisimde ayrıca bir de bir tamsıralama, yani,

O1. Hiçbir r için, $r < r$ ilişkisi doğru olamaz;

O2. Her r, s ve t için, eğer $r < s$ ve $s < t$ ise $r < t$'dir;

O3. Her r ve s için ya $r < s$ ya $r = s$ ya da $s < r$

özelliklerini sağlayan ikili bir < ilişkisi olmalıdır ve bu tamsıralama toplama ve çarpmayla uyum içinde olmalıdır, yani,

TO. Her r, s ve t için, eğer $r < s$ ise $r + t < s + t$'dir;

ÇO. Her r, s ve t için, eğer $r < s$ ise ve $t > 0$ ise, $rt < st$'dir

özelliklerini sağlamalıdır.

Bir cisim üzerine değişik sıralamalar olabilir. Örneğin,

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$$

kümesi, gerçel sayılardan oluşan bir cisimdir. (Neden bir cisimdir? Toplama, çarpma, çıkarma kolay da, cisimde bölme yapılabileceğini kontrol etmek gerek) ve bildiğimiz sıralama dışında bir de,

$$a + b\sqrt{2} \prec c + d\sqrt{2} \Leftrightarrow a - b\sqrt{2} < c - d\sqrt{2}$$

formülüyle tanımlanan $\prec$ sıralaması vardır. (Alıştırma. Bir cismin her eşyapı dönüşümü cisim üzerindeki bir sıralamayı bir başka sıralamaya dönüştürür. Bir cismin olası sıralama sayısı ilginç bir problemdir.)

Sıralı bir K cisminde $x > 0$ eşitsizliğini sağlayan elemanlara ***pozitif elemanlar*** denir. Pozitif elemanlar kümesine P dersek, K'nin P altkümesi şu özellikleri sağlar:

a) P toplama ve çarpma altında kapalıdır,

b) $0, -1 \notin P$,

c) $K = P \cup \{0\} \cup -P$.

(Kolayca görüleceği üzere, c koşulu, P'yi, K'nin, ilk iki koşulu sağlayan en büyük altkümesi yapıyor.)

Bu özellikleri sağlayan her $P \subseteq K$ altkümesi K cisminde bir sıralama belirler ve P, bu sıralamanın negatif olmayan elemanları kümesi olur. Nitekim, P verilmişse, sıralamayı

$$x < y \Leftrightarrow y - x \in P$$

olarak tanımlamak yeterlidir.

Bir başka deyişle, K üzerine bir sıralama vermekle K'nin yukardaki özelliklerini sağlayan bir P altkümesini vermek arasında bir ayrım yoktur.

Sıralı bir cisimde her kare negatif olmayan bir elemandır. Nitekim eğer $x > 0$ ise ÇO'ya göre $x^2 > 0$; eğer $x < 0$ ise, TO'ya göre, $-x > 0$ ve

$$x^2 = (-1)^2x^2 = ((-1)x)^2 = (-x)^2 > 0.$$

Dolayısıyla sıralı bir cisimde karelerin toplamı da TO'ya göre negatif olamaz, yani karelerin toplamı P'dedir. Karelerin sonlu toplamlarından oluşan kümeye A dersek, her sıralama için, $A \subseteq P$ olur. Eğer bir cisimde A, yukardaki a, b ve c özelliklerini sağlıyorsa, yani P'yi A'ya eşit alabiliyorsak, o zaman bu cisimde tek bir sıralama vardır ve o sıralama da şöyle verilir:

$$a < b \Leftrightarrow b - a \text{ sonlu sayıda karenin toplamıysa.}$$

Demek ki $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ cisimleri üzerinde tek bir sıralama vardır. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$'de iki değişik sıralama olduğundan, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$'nin her $\alpha > 0$ sayısı gene $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$'den sonlu tane elemanın karesinin toplamı değildir. Eğer T bağımsız bir değişkense, T'nin sırasını kesirli olmayan herhangi bir gerçel sayıyla ya da $+\infty$ ya da $-\infty$'da belirleyerek, $\mathbb{Q}(T)$ cismini sayılamaz sonsuzlukta farklı biçimlerde sıralayabiliriz.