11. Kesirli Temel Diziler

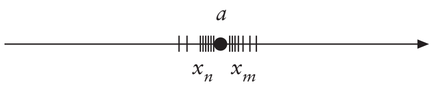
Kesirli sayı dizileriyle çalışmaya devam ediyoruz. Geçmişte (henüz var olmayan) √2'ye yakınsamak isteyen bir kesirli sayı dizisi örneği verdik. Eğer √2 orada olsaydı, bu dizi **kesirli sayılar kümesinde** √2'ye yakınsayacaktı, ama √2 kesirli sayı olmadığından bu dizinin **kesirli sayılar kümesinde** √2'ye yakınsadığını söyleyemeyiz.

İlerde, gerçel sayıları yarattığımız zaman, √2'yi de yaratmış olacağız ve o zaman bu dizi **gerçel sayılar kümesinde** gerçekten √2'ye yakınsayacak. Ama şimdilik bunu söylemek için çok erken.

Dizinin √2'ye yakınsamamasının suçu dizide değil. Dizi, √2'ye yakınsamak için elinden gelen her şeyi yapıyor ama √2 olmadığından hüsrana uğruyor ve √2'ye yakınsamıyor.

Bir sayıya yakınsamak için elinden gelen her şeyi yapan kesirli sayılar dizisine ***temel dizi*** denir. Matematiksel tanımı birazdan vereceğiz.

Yakınsak bir $(x_n)_n$ dizisi alalım. Diyelim bu dizi a (kesirli) sayısına yakınsıyor. Demek ki x_n terimlerini istediğimiz kadar a'ya yaklaştırabiliriz. Dolayısıyla giderek daha fazla a'ya yaklaşan bu terimler giderek birbirlerine yaklaşırlar, safları sıklaştırırlar, birbirlerine daha daha sokulurlar...



Bu fikri daha matematiksel olarak ifade edelim. $\varepsilon > 0$, herhangi bir (kesirli) sayı olsun. O zaman, belli bir N göstergecinden sonra, x_n terimlerinin a'ya uzaklığı en fazla $\varepsilon/2$ olur. Dolayısıyla bu göstergeçten sonra terimlerin birbirlerine uzaklığı en fazla ε olur. Nitekim, eğer n, $m > N$ ise,

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= |(x_n - a) + (a - x_m)| \\ &\le |x_n - a| + |a - x_m| \\ &= |x_n - a| + |x_m - a| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Bu özelliği sağlayan bir diziye ***temel dizi*** denir. Tam tanımı matematiksel olarak ifade edelim: $(x_n)_n$ bir kesirli sayılar dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için, her n, $m > N$ için,

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

eşitsizliğinin sağlandığı bir N göstergeci varsa, o zaman $(x_n)_n$ dizisine ***temel dizi*** denir. Yani $(x_n)_n$ dizisinin temel dizi olması için, her $\varepsilon > 0$ için, dizinin terimleri arasındaki mesafenin bir zaman sonra (yani belli bir göstergeçten sonra) **hep** ε'dan küçük olması gerekir.

Biraz yukarda şu teoremi kanıtladık:

Teorem 11.1. *Yakınsak diziler temel dizilerdir.*

Ama her temel dizi yakınsak değildir. Örneğin, "$\sqrt{2}$'ye Yakınsamak İsteyen Bir Dizi" yazısında tümevarımla tanımladığımız

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 2}{x_n + 1}$$

dizisi ($x_0 > -1$ ise örneğin) birazdan kanıtlayacağımız üzere temeldir ama bildiğimiz gibi hiçbir (kesirli) sayıya yakınsamaz.

Bu dizinin temel dizi olduğunu kanıtlayalım. Eğer $-1 \le x_0$ ise, tanımdan, her n için $1 \le x_n$ çıkar. Şimdi bunu ve "$\sqrt{2}$'ye Yakınsamak İsteyen Bir Dizi" yazısında kanıtladığımız

$$|x_n^2 - 2| \leq 1/4^n$$

eşitsizliğini kullanacağız. Eğer $n \geq m$ ise,

$$\begin{aligned}
|x_n - x_m| &\leq 2|x_n - x_m| = (1 + 1)|x_n - x_m| \\
&\leq (x_n + x_m)|x_n - x_m| \\
&= |x_n^2 - x_m^2| \\
&= |(x_n^2 - 2) + (2 - x_m^2)| \\
&\leq |x_n^2 - 2| + |x_m^2 - 2| \\
&\leq 1/4^n + 1/4^m = 2/4^m \\
&= 1/2^{2m-1}.
\end{aligned}$$

Eğer $1/2^{2m-1}$ sayısını dilediğimiz kadar küçültebilirsek, yukardaki hesap, $|x_n - x_m|$ sayısını da çok küçültebileceğimizi gösteriyor. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. m'yi $1/2^{2m-1} < \varepsilon$ olacak biçimde seçebilirsek, o zaman dizinin temel dizi olduğu kanıtlanmış olacak. Bunu da yapabiliriz, çünkü Teorem 10.2'de gördüğümüz üzere, $1/2^k = (1/2)^k$ sayılarının limiti k sonsuza giderken 0'dır, yani k'yi yeterince büyük seçersek $1/2^k$ sayıları ε'dan daha küçük yapabiliriz. N doğal sayısı, $1/2^N < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayacak kadar büyük seçilsin. O zaman, $n \geq m > N$ için,

$$|x_n - x_m| \leq 1/2^{2m-1} \leq 1/2^m < 1/2^N < \varepsilon$$

eşitsizliğini elde ederiz ve böylece $(x_n)_n$ dizisinin temel bir dizi olduğu kanıtlanmış olur.

Bu bölümde işte bu temel dizileri irdeleyeceğiz.

Not: Gerçel sayıları var etmiş olsaydık ve temel dizinin tanımındaki ε'u gerçel sayı alabilseydik, temel diziye ***Cauchy dizisi*** adını verecektik. Temel dizilerle Cauchy dizileri arasında çok ince ama önemli bir ayrım vardır.

Karekök Almak. $x_0 = 1$, $x_{n+1} = (x_n + 2/x_n)/2$ olarak tanımlansın. $(x_n)_n$, temel bir dizidir. (Alıştırma.) Aslında bu dizinin karesi 2'ye yakınsar, yani $(x_n)_n$ dizisi henüz icat etmediğimiz $\sqrt{2}$'ye yakınsamak için can atar. İşte kesirli bir sayı olmayan

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135623730...$$

sayısının bu dizi sayesinde elde edilen yaklaşık kesirli değerleri:

$x_0 = 1$
$x_1 = 32 = 1,5$
$x_2 = 17/12 = 1,41666...$
$x_3 = 577/408 = 1,41421568627451...$
$x_4 = 1,41421356237469...$
$x_5 = 1,41421356237309...$

Görüldüğü gibi dizi $\sqrt{2}$'ye oldukça çabuk yakınsıyor.

$\sqrt{S}$'ye her seferinde en az iki ondalık basamak yaklaşan bir dizi bulmak için, x_0'ı herhangi pozitif bir sayı alın. (x_0'ı $\sqrt{S}$'ye yakın olduğunu tahmin ettiğiniz bir sayı almanın bir sakıncası yoktur!) ve

$$x_{n+1} = (x_n + S/x_n)/2$$

olarak tanımlayın.

Temel diziler kümesine $\mathcal{C}$ adını verelim. (Cauchy'nin $\mathcal{C}$'si.) Teorem 11.1'e göre,

$$\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{C}.$$

Şimdi her temel dizinin sınırlı olduğunu kanıtlayalım. Nitekim temel dizilerin terimleri bir zaman sonra birbirlerine çok yakın olduklarından, temel dizilerin sınırlı olması akla yatkındır.

Teorem 11.2. *Her temel dizi sınırlıdır, yani* $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$.

Kanıt: $(x_n)_n$ bir temel dizi olsun. Tanımdaki ε'u, örneğin, 1 seçelim. Demek ki, öyle bir N göstergeci var ki, her n, $m > N$ için,

$$|x_n - x_m| < 1.$$

Demek ki, her $n > N$ için,

$$|x_n - x_{N+1}| < 1;$$

bir başka deyişle,

$$x_{N+1} - 1 < x_n < x_{N+1} + 1.$$

Şimdi

$$b = \max\{x_0, x_1, ..., x_N, x_{N+1} + 1\}$$

ve

$$a = \min\{x_0, x_1, ..., x_N, x_{N+1} - 1\}$$

olsun. O zaman, her n için,

$$a \le x_n \le b$$

olur. □

Bu bölümün bundan sonrasında, temel diziler kümesi $\mathcal{C}$'nin toplama, çıkarma ve çarpma altında kapalı olduğunu, yani bir halka olduğunu kanıtlayacağız ve bu halkanın birkaç temel özelliğini ortaya koyacağız.

Teorem 11.3. *$\mathcal{C}$ çıkarma altında kapalıdır.*

Kanıt: $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ iki temel dizi olsun. $\varepsilon > 0$ olsun. $(x_n)_n$ temel dizi olduğundan, öyle bir N_1 vardır ki, her $n, m > N_1$ için,

$$|x_n - x_m| < \varepsilon/2$$

dir. Benzer nedenden, öyle bir N_2 vardır ki, her $n > N_2$ için,

$$|y_n - y_m| < \varepsilon/2$$

dir. Şimdi $N = \max\{N_1, N_2\}$ olsun. Eğer $n, m > N$ ise, hem $n, m > N_1$ hem de $n, m > N_2$ olduğundan,

$$\begin{aligned} |(x_n - y_n) - (x_m - y_m)| &= |(x_n - x_m) + (y_m - y_n)| \\ &\le |x_n - x_m| + |y_m - y_n| \\ &= |x_n - x_m| + |y_n - y_m| \\ &\le \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Kanıt tamamlanmıştır. □

Sonuç 11.4. *$\mathcal{C}$ toplama altında kapalıdır.*

Kanıt: Bir önceki teorem gibi kanıtlayabiliriz. Ama çok daha genel bir sonuç vardır: Bir halkanın çıkarma altında kapalı olan her altkümesi toplama altında da kapalıdır:

$$x + y = x - ((x - x) - y).$$ □

Teorem 11.5. *$\mathcal{C}$ çarpma altında kapalıdır.*

Kanıt: $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ iki temel dizi olsun. $(x_n y_n)_n$ dizisinin temel dizi olduğunu kanıtlayacağız. $\varepsilon > 0$, herhangi bir kesirli sayı olsun. Öyle bir N göstergeci bulmalıyız ki, her $n, m > N$ için,

$$|x_n y_n - x_m y_m| < \varepsilon$$

olsun. Her zamanki gibi $|x_n y_n - x_m y_m|$ ifadesiyle oynayıp, bu ifadenin ε'dan küçük olması için n ve m sayılarının ne kadar büyük olmaları gerektiğini bulacağız. Elbette büyük n ve m'ler için,

$$|x_n - x_m| \text{ ve } |y_n - y_m|$$

ifadelerinin küçük olduklarını kullanacağız. Bu yüzden,

$$|x_n y_n - x_m y_m|$$

ifadesinde bir biçimde $|x_n - x_m|$ ve $|y_n - y_m|$ ifadelerini bulmalıyız. İşte o hesap:

$$\begin{aligned} |x_n y_n - x_m y_m| &= |(x_n y_n - x_n y_m) + (x_n y_m - x_m y_m)| \\ &\leq |x_n y_n - x_n y_m| + |x_n y_m - x_m y_m| \\ &= |x_n||y_n - y_m| + |x_n - x_m||y_m|. \end{aligned}$$

Dolayısıyla, $|x_n y_n - x_m y_m|$ ifadesini ε'dan küçük yapmak yerine,

$$|x_n||y_n - y_m| + |x_n - x_m||y_m|$$

ifadesini ε'dan küçük yapmaya çalışabiliriz. Bunun için,

$$|x_n||y_n - y_m| \text{ ve } |x_n - x_m||y_m|$$

ifadelerinin her birini $\varepsilon/2$'den küçük yapmaya çalışacağız. n ve m göstergeçlerini yeterince büyük seçerek $|y_n - y_m|$ ve $|x_n - x_m|$ terimlerini dilediğimiz kadar küçültebileceğimizi biliyoruz. Ama bu ifadelere, tehlikeli olabilecek $|x_n|$ ve $|y_m|$ ifadeleri yapışmış. Eğer bu ifadeler çok büyürse, $\varepsilon/2$'den küçük yapmaya çalıştığımız

$$|x_n||y_n - y_m| \text{ ve } |x_n - x_m||y_m|$$

ifadeleri küçülemeyebilir. Ama neyse ki Teorem 2'de temel dizilerin sınırlı olduklarını kanıtlamıştık. Demek ki, öyle A ve B sayıları vardır ki, her n için,

$$|x_n| < A \text{ ve } |y_n| < B$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Böylece,

$$|x_n||y_n - y_m| < A|y_n - y_m|$$

ve

$$|x_n - x_m||y_m| < B|x_n - x_m|$$

eşitsizliklerini buluruz. Şimdi

$$A|y_n - y_m| \text{ ve } |x_n - x_m|B$$

ifadelerini ε/2'den küçük yapmalıyız, yani

$$|y_n - y_m| \text{ ve } |x_n - x_m|$$

ifadelerini sırasıyla $\varepsilon/2A$ ve $\varepsilon/2B$ sayılarından küçük yapmalıyız, ki bu da o kadar zor değil. $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ temel dizi olduklarından, öyle N_1 ve N_2 göstergeçleri vardır ki, her n, $m > N_1$ için,

$$|x_n - x_m| < \varepsilon/2B$$

ve her n, $m > N_2$ için,

$$|y_n - y_m| < \varepsilon/2A$$

olur. Böylece $N = \max\{N_1, N_2\}$ alırsak kanıt biter ama yaptıklarımızı toparlamakta yarar var:

Kısa Kanıt: $\varepsilon > 0$ olsun. $(x_n)_n$ temel dizi olduğundan, Teorem 2'ye göre sınırlıdır, yani öyle bir A sayısı vardır ki, her n için,

$$|x_n| < A$$

eşitsizliği geçerlidir. Aynı nedenden, öyle bir B sayısı vardır ki, her n için,

$$|y_n| < B$$

eşitsizliği geçerlidir. $(x_n)_n$ temel dizi olduğundan, öyle bir N_1 göstergeci vardır ki, her n, $m > N_1$ için,

$$|x_n - x_m| < \varepsilon/2B$$

olur. Aynı nedenden, öyle bir N_2 göstergeci vardır ki, her

$$n, m > N_2$$

için,

$$|y_n - y_m| < \varepsilon/2A$$

olur. $N = \max\{N_1, N_2\}$ olsun. Şimdi, her n, $m > N$ için,

$$\begin{aligned}|x_ny_n - x_my_m| &= |(x_ny_n - x_ny_m) + (x_ny_m - x_my_m)|\\ &\le |x_ny_n - x_ny_m| + |x_ny_m - x_my_m|\end{aligned}$$

$$= |x_n||y_n - y_m| + |x_n - x_m||y_m|$$
$$< A|y_n - y_m| + B|x_n - x_m|$$
$$< A(\varepsilon/2A) + B(\varepsilon/2B) = \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

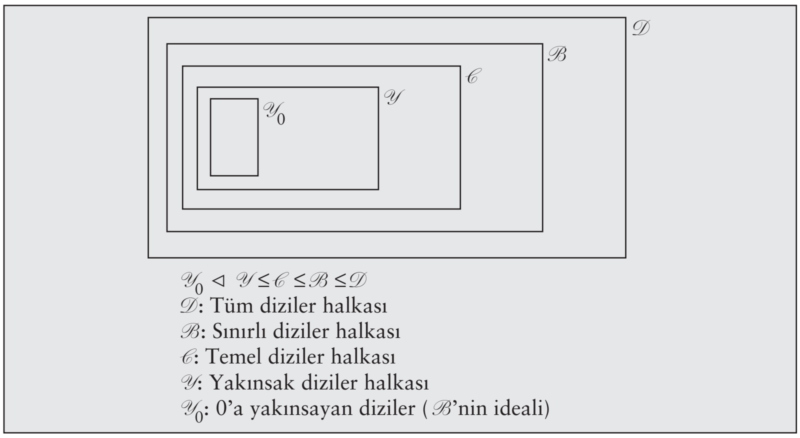
olur. Kanıtımız bitmiştir. □

Sonuç 11.6. *$\mathcal{C}$ bir halkadır.* □

Sonuç 11.7. *$\mathcal{Y}_0$, $\mathcal{C}$'nin bir idealidir. Yani*
i. $\varnothing \neq \mathcal{Y}_0 \subseteq \mathcal{C}$,
ii. $\mathcal{Y}_0 - \mathcal{Y}_0 \subseteq \mathcal{Y}_0$,
iii. $\mathcal{C}\mathcal{Y}_0 \subseteq \mathcal{Y}_0$.

Kanıt: (1) bariz. (2), Teorem 9.2'den çıkar. (3), Teorem 9.4'ten çıkar: $\mathcal{Y}_0 \subseteq \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{B}$. Demek ki, Önsav 9.7'ye göre, $\mathcal{C}\mathcal{Y}_0 \subseteq \mathcal{B}\mathcal{Y}_0 \subseteq \mathcal{Y}_0$. □

Durumu bir şemayla özetleyelim:



Temel Dizilerde Bölme. $\mathcal{C}$ halkasının bölme altında "olabildiğince" kapalı olduğunu kanıtlayalım son olarak. Önce üç hazırlık sonucuna ihtiyacımız olacak.

Önsav 11.8. *Eğer* $(x_n)_n \in \mathcal{C}(R)$ *ise* $(|x_n|)_n \in \mathcal{C}(R)$.

Kanıt: $\varepsilon > 0$ herhangi eleman olsun.

$$||x_n| - |x_m|| < \varepsilon$$

eşitsizliğinin her n, $m > N$ için doğru olduğu bir N arıyoruz. Varsayıma göre,

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

eşitsizliğinin her n, $m > N$ için doğru olduğu bir N doğal sayısı var. Böyle bir N doğal sayısı alalım. Şimdi $||x| - |y|| < |x - y|$ eşitsizliğinden, her n, $m > N$ için

$$||x_n| - |x_m|| < |x_n - x_m| < \varepsilon$$

çıkar ve önsav kanıtlanır. □

Şimdi sonuçlarına katlanmak zorunda kalacağımız tuhaf bir önerme sunalım:

Önsav 11.9. $(x_n)_n$ *bir temel dizi ve* $a \in R$ *olsun. Eğer*

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n < a\} \text{ ve } \{n \in \mathbb{N} : x_n > a\}$$

kümeleri sonsuzsa, o zaman $(x_n)_n$ *dizisi* a*'ya yakınsar.*

Kanıt: $\varepsilon > 0$ olsun. Eğer $\{n \in \mathbb{N} : x_n \leq a - \varepsilon\}$ kümesi sonsuzsa, o zaman $(x_n)_n$ dizisinin terimlerinin arası hiçbir zaman sürekli ε'dan küçük olamaz ve bu da dizinin temelliğiyle çelişir. Demek ki, belli bir N_1 göstergeci için, eğer $n > N_1$ ise, $x_n > a - \varepsilon$. Benzer nedenden, belli bir N_2 göstergeci için, eğer $n > N_2$ ise, $x_n < a + \varepsilon$. Demek ki $n > \max\{N_1, N_2\}$ için, $|x_n - a| < \varepsilon$. □

Sonuç 11.10. i. *Eğer* $(x_n)_n$ *bir temel diziyse ve* 0*'a yakınsamıyorsa, öyle bir* N *doğal sayısı ve* $\delta > 0$ *vardır ki, her* $n > N$ *için,* $|x_n| > \delta$ *olur.*

ii. *Eğer* $(x_n)_n$ *temel dizisi* 0*'a yakınsamıyorsa ve her terimi* 0*'dan değişikse, öyle bir* $\delta_1 > 0$ *vardır ki, her* n *için,* $|x_n| > \delta_1$ *olur.*

Kanıt: Önsav 11.8'e göre, $(x_n)_n$ dizisi yerine $(|x_n|)_n$ dizisini alarak, her n belirteci için $x_n \geq 0$ varsayımını yapabiliriz.

Dizi 0'a yakınsamadığından, öyle bir $\varepsilon > 0$ vardır ki,

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n > \varepsilon\}$$

kümesi sonsuzdur. Eğer sonucumuz yanlış olsaydı,

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n < \varepsilon\}$$

kümesi de sonsuz olurdu; ama bir önceki önsava göre, o zaman dizinin limiti ε olmak zorundadır ve bu durumda $\delta = \varepsilon/2$ elemanı ilk önermeyi doğrular. (Neden?) İkinci kısım için

$$\delta_1 = \min\{|x_0|/2, ..., |x_{N-1}|/2, \delta\} > 0$$

alalım. □

Alıştırmalar

1. Artan ve üstten sınırlı bir dizinin temel olduğunu kanıtlayın.

2. Kanıtlayın: Eğer $(x_n)_n$ bir temel diziyse ve 0'a yakınsamıyorsa, öyle bir N doğal sayısı ve $\delta > 0$ vardır ki, her $n > N$ için, $|x_n| > \delta$'dır.

3. $\mathcal{C}$ halkasının tersinir elemanlarını bulun.

4. Kanıtlayın: Eğer $(x_n)_n \in \mathcal{C}$ ise $(|x_n|)_n \in \mathcal{C}$.

Şimdi $\mathcal{C}$'de ne zaman bölme yapılabileceğini, yani

$$(x_n)_n \in \mathcal{C}$$

ise, $(1/x_n)_n$ dizisinin ne zaman $\mathcal{C}$'de olduğunu bulabiliriz. Her şeyden önce hiçbir x_n teriminin 0 olmaması gerekiyor, ki bu terimlerin tersini alabilelim. Ama bu yetmez, ayrıca bir de $(x_n)_n$ dizisinin limitinin 0 olmaması gerekir.

Teorem 11.11. $(x_n)_n \in \mathcal{C}$ *ise ve her* x_n *terimi* 0'*dan farklı ise ve* $(x_n)_n$ *dizisi* 0'*a yakınsamıyorsa, o zaman* $(1/x_n)_n$ *dizisi de*

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_m}\right| = \frac{|x_n - x_m|}{|x_n||x_m|}$$

$\mathcal{C}$'*dedir. Bir başka deyişle,* $\mathcal{C}$'*nin tersinir elemanları kümesi,*

$$\mathcal{C}^* = \{(x_n)_n \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{Y}_0 : \textit{her } n \textit{ için } x_n \neq 0\}$$

dir.

Kanıt: $\varepsilon > 0$ verilmiş bir eleman olsun. Öyle bir N bulacağız ki, her $n, m > N$ için,

$$|1/x_n - 1/x_m| < \varepsilon$$

olacak. $|1/x_n - 1/x_m|$ ifadesiyle oynayalım:

$$\frac{|x_n - x_m|}{|x_n||x_m|}$$

Sağdaki ifadeyi çok küçük (yani ε'dan küçük) yapmak istiyoruz. Payda bulunan $|x_n - x_m|$ ifadesini dilediğimiz kadar küçük yapabileceğimizi biliyoruz. Bu iyiye işaret. Ancak eğer paydada bulunan $|x_n||x_m|$ ifadesi de çok küçülürse, o zaman

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_m}\right| = \frac{|x_n - x_m|}{|x_n||x_m|} < \frac{|x_n - x_m|}{\delta^2}$$

ifadesini çok küçük yapamayız. Demek ki $|x_n|$ elemanlarının çok küçülemeyeceğini göstermeliyiz. Ama bu tam tamına Sonuç 16.ii... Bu sonuca göre öyle bir $\delta > 0$ elemanı vardır ki, her n için $|x_n| > \delta$'dır. O zaman,

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_m}\right| = \frac{|x_n - x_m|}{|x_n||x_m|} < \frac{|x_n - x_m|}{\delta^2} < \varepsilon$$

elde ederiz. En sağdaki terimi ε'dan küçük yapmak istiyoruz. Bundan daha kolay bir şey yok: Eğer n, m'yi yeterince büyük alırsak, diyelim N'den büyük, o zaman, $|x_n - x_m| < \varepsilon\delta^2$ olur ve böylece $n, m > N$ için,
buluruz. □

Alıştırma. Eğer $(x_n)_n$ dizisi temel bir diziyse, $(|x_n|)_n$ dizisinin de temel bir dizi olduğunu kanıtlayın.

12. Altdiziler

Herhangi bir kesirli sayı dizisi ele alalım:

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$$

ve bu dizinin içinden göstergeci çift olan terimleri seçelim:

$$x_0, x_2, x_4, x_6, \dots$$

Bu ikinci dizi, birincisinin ***altdizisidir***. Bir başka altdizi, göstergeci asal olan terimlerden seçilebilir:

$$x_2, x_3, x_5, x_7, x_{11}, \dots$$

Ya da dizinin ilk birkaç terimini silip ilk dizinin bir başka altdizisini elde edebiliriz:

$$x_3, x_4, x_5, x_6, \dots$$

Öte yandan,

$$x_3, x_2, x_5, x_7, x_{11}, \dots$$

dizisi yukardaki ilk dizinin bir altdizisi olmayabilir, çünkü göstergeçler artan bir biçimde seçilmemiş, ilk iki terimde terslik var.

$$x_3, x_3, x_5, x_7, x_{11}, \dots$$

de bir altdizi olmayabilir.

Tanımı hissettirdikten sonra matematikselleşelim. Bir $(x_n)_n$ dizisi ve sürekli artan, yani her k için $n_k < n_{k+1}$ eşitsizliğini sağlayan bir $(n_k)_k$ doğal sayı dizisi verilmiş olsun. O zaman, $(x_{n_k})_k$ dizisine $(x_n)_n$ dizisinin ***altdizisi*** adı verilir. Tanımı şöyle de verebiliriz: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mutlak artan bir fonksiyon olsun. $(x_{f(n)})_n$ dizisi $(x_n)_n$ dizisinin bir altdizisidir.

Eğer $y_k = x_{n_k}$ tanımını yaparsak, $(x_{n_k})_k = (y_k)_k$ olur ve böylece alışık olduğumuz $(y_k)_k$ yazılımına kavuşuruz.

Bir başka deyişle, bir altdizi, bir

$$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots$$

dizisinden bazı terimlerin atılmasıyla elde edilen bir dizidir. Örneğin, yukardaki diziden bazı terimleri silerek

$$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \ldots$$

altdizisini, yani $x_1, x_2, x_4, x_6, \ldots$ altdizisini elde ederiz.

Eğer şansımız yaver gider de, $x_3 = x_0$ ya da $x_3 = x_1$ olursa, o zaman,

$$x_3, x_2, x_5, x_7, x_{11}, \ldots$$

dizisi $(x_n)_n$ dizisinin bir altdizisi olur, yoksa olmaz.

Altdizilerde sık sık kanıtı çok basit olan (k üzerine tümevarım) şu olgu kullanılır: Sürekli artan bir $(n_k)_k$ doğal sayı dizisi için, $k \le n_k$. İlk teoremimizde bunu kullanacağız.

Teorem 12.1. *Temel bir dizinin her altdizisi temeldir.*

Kanıt: $(x_n)_n$, bir temel dizi, $(x_{n_k})_k$ dizisi de bu dizinin bir altdizisi olsun. $\varepsilon > 0$ herhangi bir (kesirli) sayı olsun. Öyle bir N var ki, her $n, m > N$ için,

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Şimdi eğer $k, \ell > N$ ise $N < k \le n_k$ ve $N < \ell \le n_\ell$ olduğundan,

$$|x_{n_k} - x_{n_\ell}| < \varepsilon$$

olur. Bu da kanıtlamak istediğimizdi. □

Teorem 12.2. *Yakınsak bir dizinin altdizisi de yakınsaktır ve iki dizi aynı limite yakınsarlar.*

Kanıt: $(x_n)_n$, bir a sayısına yakınsayan bir dizi olsun, $(x_{n_k})_k$ dizisi de bu dizinin bir altdizisi olsun. $\varepsilon > 0$ herhangi bir (kesirli) sayı olsun. Öyle bir N var ki, her $n > N$ için,

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Şimdi eğer $k > N$ ise $N < k \le n_k$ olduğundan,

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon$$

olur. Bu da kanıtlamak istediğimizdi. □

Teorem 12.3. *Temel bir dizinin bir altdizisi yakınsaksa dizinin kendisi de yakınsaktır ve her iki dizi de aynı limite yakınsarlar. Dolayısıyla* 0*'a yakınsamayan bir dizinin ancak sonlu sayıda terimi* 0 *olabilir.*

Kanıt: Bunun kanıtı biraz daha zor.

$(x_n)_n$, bir temel dizi, $(x_{n_k})_k$ dizisi de bu dizinin yakınsak bir altdizisi olsun, diyelim a'ya yakınsasın. $(x_n)_n$ dizisinin de a'ya yakınsadığını kanıtlayacağız.

$\varepsilon > 0$ herhangi bir (kesirli) sayı olsun. $|x_n - a|$ sayısının bir zaman sonra, yani belli bir göstergeçten sonra ε'dan küçük olduğunu kanıtlayacağız. Her zaman yaptığımız gibi,

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

eşitsizliğinin doğru olması için n'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulacağız. Bunun için, bir defa daha soldaki $|x_n - a|$ ifadesiyle oynayıp, bu ifadeyi bildiğimiz küçük ifadeler cinsinden üstten sınırlayacağız. k herhangi bir doğal sayı olsun. Üçgen eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} |x_n - a| &= |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - a)| \\ &\le |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| \end{aligned}$$

elde ederiz. En alttaki

$$|x_n - x_{n_k}| \text{ ve } |x_{n_k} - a|$$

ifadelerinin her birini küçültmeye çalışmalıyız. Birinci ifade $(x_n)_n$ bir temel dizi olduğundan, ikinci ifade ise $(x_{n_k})_k$ dizisi a'ya yakınsadığından küçülür. Ayrıntılar önemli, ayrıntıları yazalım. Her iki ifadeyi de $\varepsilon/2$'den küçük yapacağız.

Birinci ifadeden başlayalım. $(x_n)_n$ bir temel dizi olduğundan, öyle bir N vardır ki, her n, $m > N$ için, $|x_n - x_m| < \varepsilon/2$ olur. De-

mek ki eğer $k > N$ ise, $n_k \geq k > N$ olur ve
$$|x_n - x_{n_k}| < \varepsilon/2$$
eşitsizliği elde edilir.

İkinci ifadeye gelelim. $(x_{n_k})_k$ dizisi a'ya yakınsadığından, öyle bir N_1 vardır ki, her $k > N_1$ için,
$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon/2$$
olur. Şimdi k, hem N'den hem de N_1'den büyük herhangi bir sabit göstergeç olsun. Her $n > N$ için,
$$\begin{aligned} |x_n - a| &= |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - a)| \\ &\leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$
elde ederiz. □

Alıştırmalar

1. Her altdizisinin dizinin kendisine eşit olduğu diziler hangi dizilerdir?

2. Sadece iki altdizisi olan tüm dizileri bulun.

3. Tüm kesirli sayıları içeren bir dizi var mıdır?

4. Her diziyi altdizi olarak barındıran bir dizi var mıdır?

5. $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ dizileri sırasıyla a ve b sayılarına yakınsasın. Bu iki diziyi şu yöntemle karalım: A ve B, $\mathbb{N}$'nin $\mathbb{N} = A \cup B$ eşitliğini sağlayan iki ayrık ve sonsuz altkümesi olsun.
$$f : A \to \mathbb{N} \text{ ve } g : B \to \mathbb{N}$$
iki artan eşleme olsun. (f ve g biriciktirler.)
$$z_n = \begin{cases} x_{f(n)} & \text{eğer } n \in A \text{ ise} \\ y_{g(n)} & \text{eğer } n \in B \text{ ise} \end{cases}$$
olsun. Böylece $(z_n)_n$ dizisini elde ederiz. Örneğin,
$$x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4, \ldots$$
bu yöntemle elde edilmiş bir dizidir ve burada
$$A = 2\mathbb{N},\ B = 2\mathbb{N} + 1$$
alınmıştır. $(z_n)_n$ dizisinin yakınsak olması için $a = b$ eşitliğinin gerek ve yeter olduğunu kanıtlayın.

Monoton Diziler ve Altdiziler

X sıralı bir küme olsun. $(x_n)_n$ bir dizi olsun. Eğer her $n \leq m$ için $x_n \leq x_m$ oluyorsa, diziye ***artan*** adı verilir. Eğer her $n < m$ için $x_n < x_m$ oluyorsa, diziye ***mutlak artan*** adı verilir. Azalan ve mutlak azalan diziler benzer biçimde tanımlanır. Sabit diziler hem artan hem de azalan dizilerdir ve sadece sabit diziler hem artan hem de azalandır.

Artan ya da azalan dizilere ***monoton dizi*** denir.

Teorem 12.4. *Tamsıralı bir kümenin her dizisinin monoton bir altdizisi vardır.*

Kanıt: $(a_n)_n$, herhangi bir tamsıralı kümede herhangi bir dizi olsun. Eğer bir n göstergeci için, $a_n \leq a_m$ eşitsizliği n'den büyük her m göstergeci için sağlanıyorsa, n'ye, bu kanıtlık, "iyi göstergeç" diyelim. Eğer sonsuz tane iyi göstergeç varsa azalmayan bir altdizi seçmek kolaydır: $(a_k)_{k \text{ iyi}}$ artan bir altdizidir. Eğer sonlu tane iyi göstergeç varsa ve N bu göstergeçlerin sonuncusuysa, her $n > N$ için, $a_n > a_m$ eşitsizliğinin sağlandığı bir $m > n$ vardır. Bu durumda da azalan (dolayısıyla artmayan) bir altdizi kolaylıkla bulunur. □

12A. Onluk Tabanda Kesirli Sayılar (2)

Bu bölümde 0,99999... ifadesinin matematiksel olarak ne demek olduğunu göreceğiz. İfadenin anlamını öğrendiğimizde, genellikle şaşkınlıkla karşılanan ve kuşku duyulan

$$0,99999... = 1$$

eşitliğini matematiksel olarak kanıtlayabileceğiz.

0,99999... yerine daha tuhaf bir ifade ele alalım. Diyelim,

$$0,864269623810856...$$

ifadesini ele aldık. Rakamların virgülden sonra nasıl devam ettiklerini bilmiyoruz. Ama bir biçimde devam ediyorlar. Bunun yerine, rakamların nasıl devam ettiği bilinen

$$0,1234567891011121314...$$

ifadesini de ele alabilirdik. Bu ifadeler ne demek olabilir? İşte bu konuyu irdeleyeceğiz bu bölümde.

Eğer birinci ifadeyi belli bir basamaktan sonra kesersek, elde edilen sonlu ifadenin ne demek olduğunu biliyoruz:

$$0,8 = 8\times10^{-1}$$
$$0,86 = 8\times10^{-1} + 6\times10^{-2}$$
$$0,864 = 8\times10^{-1} + 6\times10^{-2} + 4\times10^{-3}$$
$$0,8642 = 8\times10^{-1} + 6\times10^{-2} + 4\times10^{-3} + 2\times10^{-4}$$
$$...$$

Ama sonsuza dek uzanan 0,864269623810856... ifadesinin ne anlama geldiğini henüz bilmiyoruz.

Elimizde bir $(a_n)_{n>0}$ rakam dizisi olsun. Yani her $n > 0$ için, bir

$$a_n \in \{0, 1, ..., 9\}$$

rakamı olsun.

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_1 10^{-1},\\
x_2 &= a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2},\\
x_3 &= a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2} + a_3 10^{-3},\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\ldots\\
x_n &= a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2} + \cdots + a_n 10^{-n},\\
&\qquad\qquad\qquad\ldots
\end{aligned}$$

tanımlarını yapalım. Daha ekonomik bir yazılımla:

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} a_i 10^{-i}.$$

Böylece bir $(x_n)_{n>0}$ kesirli sayı dizisi elde ederiz. Bu dizinin bir temel dizi olduğunu kanıtlayalım hemen.

Teorem 12A.1. *Her $(a_n)_{n>0}$ rakam dizisi için, yukarda tanımlanan $(x_n)_{n>0}$ kesirli sayı dizisi temel bir dizidir.*

Kanıt: $\varepsilon > 0$, herhangi bir sayı olsun. Öyle bir N bulacağız ki, her $n, m > N$ için,

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

olacak. Her zamanki gibi $|x_n - x_m|$ ifadesinin ε'dan küçük olması için n ve m'nin ne kadar büyük olmaları gerektiğini bulacağız.

$|x_n - x_m| = |x_m - x_n|$ olduğundan, $n \geq m$ eşitsizliğini varsayabiliriz. Bundan böyle bu eşitsizliği varsayacağız. $|x_n - x_m|$ ifadesiyle oynayalım:

$$\begin{aligned}
|x_n - x_m| &= \left|\sum_{i=1}^{n} a_i 10^{-i} - \sum_{i=1}^{m} a_i 10^{-i}\right|\\
&= \left|\sum_{i=m+1}^{n} a_i 10^{-i}\right| = \sum_{i=m+1}^{n} a_i 10^{-i}\\
&\leq \sum_{i=m+1}^{n} 9\cdot 10^{-i} = 9\cdot\sum_{i=m+1}^{n} 10^{-i}\\
&= 9\cdot 10^{-m-1}\sum_{i=m+1}^{n} 10^{-i+m+1}
\end{aligned}$$

$$= 9{\cdot}10^{-m-1}\sum\nolimits_{j=0}^{n-m-1} 10^{-j}$$
$$= 9{\cdot}10^{-m-1}\sum\nolimits_{j=0}^{n-m-1} (1/10)^{j}$$
$$= 9{\cdot}10^{-m-1}\,\frac{1-(1/10)^{n-m}}{1-(1/10)}$$
$$= 9{\cdot}10^{-m-1}\,\frac{1-(1/10)^{n-m}}{9/10}$$
$$= 10^{-m}(1-(1/10)^{n-m}) \le 10^{-m}.$$

Dördüncü satırdan beşinci satıra geçerken

$$j = i - m - 1$$

değişikliğini yaptık. Altıncı satırdan yedinci satıra geçerken, Bölüm 6B'de gri alanda kanıtlanan eşitliği $a = 1/10$ için kullandık. (Hesaptaki eşitsizliklerin her biri son derece ekonomiktir: Üçüncü satırdaki eşitsizlik zorunlu bir eşitsizliktir, çünkü a_i'lerin her biri bal gibi de 9 olabilirler. İkinci ve sonuncu eşitsizlik de zorunlu, çünkü m sabit kalıp n çok büyüdüğünde (sonsuza gittiğinde), $1 - (1/10)^{n-m}$ sayısı 1'e kadar dayanır.)

Şimdi 10^{-m}'yi ε'dan küçük yapmamız gerektiğini anlıyoruz.

$$-1 < 10^{-1} < 1$$

olduğundan, Teorem 10.2'ye göre, öyle bir N vardır ki, her $m > N$ için, $10^{-m} < \varepsilon$ olur. Aşağıdaki gri karede aynı şeyi Teorem 10.2'yi kullanmadan kanıtlıyoruz. □

Not: Yukardaki teoremde ve kanıtında 10'un hiçbir önemi yok, sabit herhangi bir $b > 1$ (kesirli ya da doğal) sayısı da alınabilirdi. Ayrıca a_i'ler de sınırlı herhangi bir sayı kümesinden seçilebilirdi. b'yi 10 almak gelenekten de öte bir alışkanlık haline gelmiştir, muhtemelen iki elimizde on parmağımızın olmasından kaynaklanır ve artık kültürümüzün nerdeyse ayrılmaz bir parçasıdır. Bir de b'yi 2 almak özellikle çağımızda önem kazandı.

Teorem. *Her k doğal sayısı için* $10^k > k$.

Kanıt: k üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. $k = 0$ için, $k = 0 < 1 = 10^0 = 10^k$. Bir de $k = 1$ için kanıtlayalım: $k = 1 < 10 = 10^1 = 10^k$. Şimdi $k \geq 1$ olsun ve eşitsizliğin k için geçerli olduğunu varsayalım. O zaman,

$$10^{k+1} = 10 \times 10^k > 10k \geq k + 1.$$

(Son eşitsizlik, kanıtın başında teoremi neden $k = 0$ **ve** $k = 1$ için kanıtladığımızı göstermektedir.

Sonuç. $\varepsilon > 0$ *hangi* (*kesirli*) *sayı olursa olsun öyle bir* N *doğal sayısı vardır ki*, *her* $n > N$ *için*, $10^{-n} < \varepsilon$.

Kanıt: N, $1/\varepsilon$'dan büyük bir doğal sayı olsun (Arşimet Özelliği, Teorem 6.11). O zaman, $10^N > N > 1/\varepsilon$, yani $10^{-N} < \varepsilon$. Her $n > N$ için, $10^{-n} < 10^{-N} < \varepsilon$ olur.

Şimdi, eğer $(a_n)_{n>0}$ dizisi ***zamanla devirleşiyorsa***, yani her

$$n > N$$

için,

$$a_{n+k} = a_n$$

eşitliğini sağlayan N ve $k > 0$ doğal sayıları varsa, o zaman yukarda tanımlanan $(x_n)_{n>0}$ kesirli sayı dizisinin bir limiti olduğunu kanıtlayalım.

Burada limitin kesirli bir sayı olduğunu söylemek istiyoruz. Gerçel sayıları tanımladığımızda, bu $(x_n)_{n>0}$ dizilerinin sadece zamanla devirleşen $(a_n)_{n>0}$ dizileri için değil, her $(a_n)_{n>0}$ dizisi için bir gerçel sayıya yakınsadığını kanıtlayacağız. Ancak şimdilik böyle bir önermeyi telaffuz bile edemeyiz. "Gerçel sayı" sözleri şimdilik bize yasak.

Örneğin,

$$3, 5, 7, 8, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, \ldots$$

dizisi zamanla devirleşen bir dizidir. Bunu görmek için $N = 4$, $k = 3$ almak yeterli. ($k = 6$ da alabilirdik. $k = 3$ en küçük devirdir.)

$$x_1 = 3\cdot 10^{-1} = 0{,}3,$$
$$x_2 = 3\cdot 10^{-1} + 5\cdot 10^{-2} = 0{,}35,$$
$$x_3 = 3\cdot 10^{-1} + 5\cdot 10^{-2} + 7\cdot 10^{-3} = 0{,}357,$$
$$x_4 = 3\cdot 10^{-1} + 5\cdot 10^{-2} + 7\cdot 10^{-3} + 8\cdot 10^{-4} = 0{,}3578,$$
$$\ldots$$

örneği üzerinde $(x_n)_{n>0}$ dizisinin bir kesirli sayıya yakınsadığını gösterelim.

Diziyi ilkokuldan beri alışık olduğumuz biçimde ve göze daha hoş görünsünler diye bazı terimleri atlayarak yazarsak ne yapılması gerektiğini daha kolay görürüz:

$$x_4 = 0{,}3578,$$
$$x_7 = 0{,}3578214,$$
$$x_{10} = 0{,}3578214214,$$
$$\ldots$$

$(x_n)_{n>0}$ dizisinin yakınsak olduğunu kanıtlamak yerine, Teorem 12.3'e göre, bu dizinin $(x_{4+3n})_n$ altdizisinin yakınsak olduğunu kanıtlamak yeterli. Biraz hesap yapalım:

$$\begin{aligned}
x_{4+3n} &= 0{,}3578 + \frac{214}{10^7} + \frac{214}{10^{10}} + \cdots + \frac{214}{10^{4+3n}} \\
&= 0{,}3578 + \frac{214}{10^7}\left(1 + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^{3(n-1)}}\right) \\
&= 0{,}3578 + \frac{214}{10^7}\,\frac{1 - \dfrac{1}{10^{3n}}}{1 - \dfrac{1}{10^3}} = 0{,}3578 + \frac{214}{10^4}\,\frac{1 - \dfrac{1}{10^{3n}}}{999}.
\end{aligned}$$

Demek ki, n sonsuza giderken $(x_{4+3n})_n$ ya da $(x_n)_{n>0}$ dizisinin limiti,

$$0{,}3578 + \frac{214}{10^4}\,\frac{1}{999}$$

kesirli sayısıdır.

Aşağıdaki teorem aynen yukardaki örnekteki gibi kolaylıkla kanıtlanabilir. Biçimsel kanıtı meraklı okura bırakıyoruz.

Teorem 12A.2. *Eğer* $(a_n)_{n>0}$ *rakamlar dizisi bir zaman sonra devirleşiyorsa, o zaman yukarda tanımlanan* $(x_n)_{n>0}$ *kesirli sayı dizisinin* $\mathbb{Q}$*'de bir limiti vardır.*

Bundan böyle, yukardaki teoremde varlığı söylenen bu limiti

$$0{,}a_1a_2a_3a_4...$$

olarak yazacağız:

$$0{,}a_1a_2a_3... = \lim_{n\to\infty} (a_1 10^{-1} + \cdots + a_n 10^{-n}).$$

Eğer bir de ayrıca a_0 herhangi bir doğal sayıysa, yukardaki teorem,

$$(a_0 + a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2} + \cdots + a_n 10^{-n})_n$$

dizisinin yani

$$(a_0{,}a_1a_2 \ldots a_n)_n$$

dizisinin bir limiti olduğunu söylüyor. Bu limiti bundan böyle

$$a_0{,}a_1a_2a_3a_4...$$

olarak yazacağız. Ama dikkat, burada rakam olanlar sadece a_1, a_2, a_3, a_4, ... katsayıları, a_0 bir rakam olmayabilir, a_0 bir doğal sayı. Öte yandan a_0'ın da rakamlarla ifade edilebileceğini gördük (Teorem 6B.1). a_0'ı, $t_k...t_1t_0$ olarak rakamlarla ifade edersek, her pozitif kesirli sayının, sonlu tane

$$t_0,\ t_1,\ ...,\ t_k$$

rakamı ve bir zaman sonra devirli olan

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ ...$$

rakamları için,

$$t_k...t_1t_0{,}a_1a_2a_3a_4...$$

biçiminde, yani, terimleri

$$x_n = t_k 10^k + \cdots + t_0 10^0 + a_1 10^{-1} + \cdots + a_n 10^{-n}$$

olan dizinin limiti olarak yazılabilir.

Şimdi artık 0,9999... ifadesinin ne demek olduğunu biliyoruz: Bu ifade, yukardaki tanıma göre,

$$x_n = 9\cdot 10^{-1} + \cdots + 9\cdot 10^{-n}$$

dizisinin limitidir. Hemen bulalım bu limiti:

eşitliğinin başının ve sonunun limitlerini alırsak,

$$0{,}99999... = 1$$

buluruz. Nihayet! Bu yaşa değin merak ettiğimiz eşitliği kanıtladık...

Tabii aynı şekilde, örneğin,

$$253{,}782149999... = 253{,}78215$$

eşitliği de geçerlidir. Kanıtı okura bırakıyoruz.

Teorem 12A.3. *Her pozitif kesirli sayı,* t_0, t_1, ..., t_k *rakamları ve zamanla devirleşen bir* $(a_n)_{n>0}$ *rakamlar dizisi için,*

$$t_k...t_0{,}a_1a_2a_3a_4...$$

biçiminde yazılabilir. Eğer $k > 0$ *ise* $t_k \neq 0$ *alınabilir.*

Peki, yukardaki $t_k...t_0{,}a_1a_2a_3a_4...$ yazılımı ne kadar biriciktir? Yani, t_k, ..., t_0 ve s_ℓ, ..., s_0 rakamları ve zamanla devirleşen $(a_n)_{n>0}$ ve $(b_n)_{n>0}$ rakamlar dizisi için,

$$t_k...t_0{,}a_1a_2a_3a_4... = s_\ell...s_0{,}b_1b_2b_3b_4...$$

ise, $k = \ell$ ve her i için $t_i = s_i$ ve $a_i = b_i$ olmalı mıdır?

Yukarda kanıtladığımız $0{,}99999... = 1$, daha doğrusu

$$0{,}99999... = 1{,}00000...$$

eşitliğinden $a_i = b_i$ eşitliğinin her zaman doğru olmadığını biliyoruz.

$$9{,}99999... = 10{,}00000...$$

eşitliğinden de $k = \ell$ eşitliğinin her zaman doğru olmadığını biliyoruz. Ayrıca bir de sayının soluna istediğimiz kadar 0 koyabileceğimizi biliyoruz. Ama bu istisnalar dışında yukardaki yazılım biriciktir. Yani a ve s doğal sayıları için, $a/10^s$ biçiminde yazılamayan her kesirli sayı, $t_k \neq 0$ olmak üzere, tek bir biçimde

$$t_k...t_0{,}a_1a_2a_3a_4...$$

olarak yazılabilir. $a/10^s$ biçiminde yazılan sayılar için ise iki değişik yazım biçim vardır: Biri hep 9'la diğeri hep 0'la biter... Konuyu daha fazla uzatmak istemediğimizden kanıtı es geçiyoruz.

Teorem 12A.3'ün tersi de doğrudur. Bunun da kanıtını okura bırakıyoruz.

Teorem 12A.4. *Eğer* $(a_n)_{n>0}$ *rakamlar dizisi bir zaman sonra devirleşmiyorsa*, o *zaman yukarda tanımlanan* $(x_n)_n$ *kesirli sayı dizisinin* $\mathbb{Q}$*'de limiti olamaz.*