10. Yakınsaklık/Iraksaklık Örnekleri

Bu bölümde birçok yakınsak ve ıraksak dizi örneği vereceğiz. En kolay ıraksak dizilerden başlayalım.

$$0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

dizisi elbette ıraksaktır, yani hiçbir kesirli sayıya yakınsamaz, çünkü dizi sınırlı değildir (Teorem 9.4). Ama bunu tanımı kullanarak kanıtlayalım, faydasını göreceğiz.

Önce yakınsaklığın tanımını anımsayalım: $(x_n)_n$ dizisinin bir a (kesirli) sayısına yakınsaması için, her $\varepsilon > 0$ için,

$$\{n : |x_n - a| \geq \varepsilon\}$$

kümesi sonlu olması gerekir. Demek ki dizinin ıraksak olması için yukardaki özelliğin **her** $a \in \mathbb{Q}$ için yanlış olması gerekir, yani her $a \in \mathbb{Q}$ için, öyle bir $\varepsilon > 0$ olmalı ki,

$$\{n : |x_n - a| \geq \varepsilon\}$$

kümesi sonsuz olsun.

Iraksaklığın tanımını böylece daha matematikselleştirdikten sonra, 0, 1, 2, 3, ... doğal sayı dizisinin ıraksak olduğunu matematiksel olarak kanıtlayalım. Burada, $x_n = n$ olarak almalıyız elbette. Herhangi bir a ve $\varepsilon > 0$ alalım. Aslında ε rastgele olmak zorunda değil ama bu örnekte rastgele bir ε işimizi görür. Dileyen okur $\varepsilon = 1$ alabilir. Bir N doğal sayısı için $N \geq a + \varepsilon$ eşitsizliği doğrudur (Arşimet Özelliği, Teorem 6.11). Demek ki, her $n \geq N$ için,

$$x_n = n \geq N \geq a + \varepsilon,$$

yani

$$x_n - a \geq \varepsilon > 0.$$

Dolayısıyla,

$$N,\ N+1,\ N+2,\ N+3,\ \ldots$$

sayılarının hepsi $\{n : |x_n - a| \geq \varepsilon\}$ kümesindedir ve bu küme sonsuzdur. Doğal sayı dizisinin ıraksak olduğu kanıtlanmıştır.

Şimdi de

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$$

dizisinin ıraksak olduğunu kanıtlayalım. Bu dizi, $x_n = (-1)^n$ formülüyle tanımlanabilir. Herhangi bir a alalım. Eğer $a = 1$ ise $\varepsilon = 1$ alalım, o zaman bütün çift sayıların $\{n : |x_n - a| \geq \varepsilon\}$ kümesinde olduğu görülür. Eğer $a = -1$ ise gene $\varepsilon = 1$ alalım, bu kez bütün tek sayılar $\{n : |x_n - a| \geq \varepsilon\}$ kümesindedir. Eğer $a \neq \pm 1$ ise, o zaman ε, $|a + 1|/2$ ve $|a - 1|/2$ sayılarının en küçüğü olsun. Bu sefer her doğal sayı $\{n : |x_n - a| \geq \varepsilon\}$ kümesindedir.

Alıştırmalar

10.1. $A \subseteq \mathbb{Q}$ sonlu bir küme olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için, $x_n \in A$ olsun. $(x_n)_n$ dizisinin yakınsak olması için dizinin zamanla sabitleşmesi gerektiğini kanıtlayın.

10.2. Her $n \in \mathbb{N}$ için, $x_n \in \mathbb{Z}$ olsun. $(x_n)_n$ dizisinin yakınsak olması için dizinin zamanla sabitleşmesi gerektiğini kanıtlayın.

Şimdi verilmiş bir x_0 için,

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 2}{x_n + 1}$$

formülüyle tanımlanan dizinin kesirli sayılarda yakınsak olamayacağını kanıtlayalım. Diyelim dizi a kesirli sayısına yakınsıyor. Dizinin karesinin 2'ye yakınsadığını "√2'ye Yakınsamak İsteyen Bir Dizi" yazısında görmüştük. Demek ki,

$$a^2 = (\lim x_n)^2 = \lim x_n^2 = 2.$$

Ama karesi 2 olan bir kesirli sayı yoktur. Çelişki. Demek ki bu dizi kesirli sayılarda yakınsamaz.

Dikkat ederseniz, bu örnekte dizinin yakınsak olmadığını daha önceki örneklerdeki gibi göstermedik, Teorem 9.3 gibi güçlü bir sonuç kullandık. Çünkü bu dizi yakınsak dizilere çok benzer ve dizinin ıraksaklığının daha önceki gibi doğrudan bir kanıtı yoktur.

Yakınsak dizi örneklerine geçelim.

Geçmişte $(1/n)_n$ dizisinin limitinin 0 olduğunu kanıtlamıştık. (Ama dikkat! $(1/n)_n$ dizisinin $\mathbb{Q}$'de limiti 0'dır. $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ kümesinde bu dizinin limiti yoktur!) Çok daha genel bir sonuç geçerlidir:

Teorem 10.1. $p(X), q(X) \in \mathbb{Q}[X]$ *iki polinom olsun.* $q(X) \neq 0$ *olsun. Eğer* $\deg p \leq \deg q$ *ise* $(p(n)/q(n))_n$ *dizisi yakınsaktır. Eğer* $\deg p < \deg q$ *ise*

$$\lim_{n\to\infty} p(n)/q(n) = 0$$

olur. Eğer $\deg p = \deg q$ *ise ve* a *ve* b *sırasıyla* p *ve* q *polinomlarının başkatsayısıysa,*

$$\lim_{n\to\infty} p(n)/q(n) = a/b$$

olur. Eğer $\deg p > \deg q$ *ise dizi ıraksaktır.*

Kanıt: $\deg p = d$, $\deg q = e$ olsun. p ve q polinomlarını,

$$p(X) = p_0 + p_1X + p_2X^2 + \cdots + p_dX^d,$$
$$q(X) = q_0 + q_1X + q_2X^2 + \cdots + q_eX^e$$

olarak yazalım. Burada $p_d = a \neq 0$ ve $q_e = b \neq 0$'dır.

$d \leq e$ varsayımı altında $p(n)/q(n)$ ifadesinin payını ve paydasını n^e'ye bölelim:

$$\frac{p(n)}{q(n)} = \frac{p_0 + p_1n + \ldots + p_dn^d}{q_0 + q_1n + \ldots + q_en^e}$$
$$= \frac{p_0/n^e + p_1/n^{e-1} + \ldots + p_d/n^{e-d}}{q_0/n^e + q_1/n^{e-1} + \ldots + q_{e-1}/n + q_e}.$$

Eğer $e > d$ ise payın tüm p_i/n^{e-i} terimlerinin limiti 0'dır; paydanın limiti ise q_e'dir; dolayısıyla limit $0/q_e = 0$'dır.

Eğer $e = d$ ise payın limiti $p_d = a$'dır; paydanın limiti ise gene $q_e = b$'dir; dolayısıyla limit a/b'dir.

Eğer $e < d$ ise, o zaman yukarda görüldüğü gibi,

$$\lim_{n\to\infty} q(n)/p(n) = 0$$

olmalı. ($(q(n)/p(n))_n$ dizisini $p(n)$'nin artık 0 olamayacağı n'den başlatalım, açık açık söylemedik ama $(p(n)/q(n))_n$ dizisi de $q(n)$'nin 0 olamayacağı n'den başlıyor.) Eğer $(p(n)/q(n))_n$ dizisinin limiti olsaydı, 0'la bu dizinin çarpımı 1 olmak zorunda olurdu! Demek ki $(p(n)/q(n))_n$ dizisinin limiti olamaz. □

$(r^n)_n$ biçiminde yazılan bir diziye ***geometrik dizi*** denir. Geometrik dizilerin yakınsaklığına karar vermek oldukça kolay:

Teorem 10.2. *r bir kesirli sayıysa $(r^n)_n$ dizisi ancak $r \in (-1, 1]$ iken yakınsak olabilir. Eğer $r = 1$ ise limit* 1'*dir. Eğer $r \in (-1, 1)$ ise limit* 0'*dır.*

Kanıt: Eğer limit varsa, limitin 0 ya da 1 olması gerektiği şöyle anlaşılır: Öncelikle $(r^n)_n$ ve $(r^{n+1})_n$ dizilerinin kuyrukları aynı olduğundan, ikisinin de limiti aynıdır, dolayısıyla limite a dersek,

$$a = \lim_{n\to\infty} r^n = \lim_{n\to\infty} r^{n+1} = r \lim_{n\to\infty} r^n = ra.$$

olur. Demek ki $a = ra$ ve eğer $a \neq 0$ ise $r = 1 = r$. Ama bu akıl yürütme limitin olduğunu göstermez.

Teoremin kanıtında şu önsava gereksinim duyacağız:

Önsav 10.3 *Eğer $s > -1$ ise, her n doğal sayısı için,*

$$(1 + s)^n \geq 1 + ns.$$

Önsavın Kanıtı: Eğer $n = 0$ ise eşitsizlikten de öte bir eşitlik sözkonusu. Şimdi eşitsizliği n için varsayıp $n + 1$ için kanıtlayalım. Aşağıdaki kanıtta $1 + s > 0$ eşitsizliğini kullandığımıza dikkat etmelisiniz:

$$\begin{aligned}(1 + s)^{n+1} &= (1 + s)^n(1 + s) \geq (1 + ns)(1 + s)\\ &= 1 + (n+1)s + ns^2 \geq 1 + (n+1)s.\end{aligned}$$

Olgu kanıtlanmıştır. Eğer $s \geq 0$ ise aynı olguyu binom açılımını kullanarak, çok daha basit olarak

$$(1+s)^n = 1 + ns + \binom{n}{2}s^2 + \cdots + s^n \geq 1 + ns$$

tek satırda da kanıtlayabilirdik.

Teoremin kanıtına devam edelim. $r \in (-1, 1)$ olsun.

$$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$$

eşitliğini kanıtlayacağız. Eğer $r = 0$ ise, kanıtlayacak fazla bir şey kalmıyor, bundan böyle r'nin 0 olmadığını varsayalım. $\varepsilon > 0$ olsun. $s = -1 + 1/|r|$ olsun. Tabii ki $s > -1$. (Hatta $s > 0$.) Buradan

$$|r| = 1/(1 + s)$$

çıkar. N doğal sayısı,

$$1/s < N\varepsilon$$

eşitsizliğini sağlasın (Arşimet Özelliği). Şimdi, her $n > N$ için,

$$|r^n| = |r|^n = \left(\frac{1}{1+s}\right)^n = \frac{1}{(1+s)^n}$$

$$\leq \frac{1}{1+ns} < \frac{1}{ns} < \frac{1}{Ns} < \varepsilon.$$

$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ eşitliği kanıtlanmıştır.

Şimdi r'nin 1'den büyük olduğunu varsayalım. $s = 1 - r > 0$ olsun. O zaman Önsav 10.3 ve Arşimet Özelliği'ne göre

$$(r^n)_n = ((1+s)^n)_n$$

dizisi sınırlı değildir, dolayısıyla yakınsak olamaz (Teorem 9.4).

Eğer $r < -1$ ise, $n = 2m$ çift olduğunda, $r^n = r^{2m} = (r^2)^m$ sayıları bir önceki paragrafa göre üstten sınırlı değildirler. Dolayısıyla $(r^n)_n$ dizisi sınırlı değildir ve yakınsak olamaz. □

Eğer (henüz inşa etmediğimiz) $\mathbb{R}$ elimizde olsaydı, Teorem 10.2'yi çok daha basit biçimde kanıtlayabilirdik.

Şimdi de geometrik dizinin elemanları toplayarak elde ettiğimiz,

$$\begin{aligned}
s_0 &= 1,\\
s_1 &= 1 + r,\\
s_2 &= 1 + r + r^2,\\
s_2 &= 1 + r + r^2 + r^3,\\
&\dots\\
s_n &= 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n,
\end{aligned}$$

dizisine bakalım. Bu dizinin limiti analizde çok çok temeldir.

Teorem 10.4. *r bir kesirli sayı olsun. Yukarda tanımlanan $(s_n)_n$ dizisi ancak ve ancak $r \in (-1, 1)$ iken yakınsak olabilir ve bu durumda limit*

$$\frac{1}{1-r}$$

dir.

Kanıt: Eğer $r \neq 1$ ise,

$$s_n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

eşitliğini geçmişte kanıtlamıştık. Dolayısıyla eğer $r \in (-1, 1)$ ise sonuç bir önceki teoremden çıkar. Eğer $r = 1$ ise, $s_n = n$ olduğundan, dizi sınırlı değildir ve ıraksar. Yukardaki formül, eğer r, $(-1, 1]$ aralığında değilse dizinin sınırlı olamayacağını, dolayısıyla yakınsak da olamayacağını gösteriyor. □

Örnek 10.5. Son olarak, her $r \in \mathbb{Q}$ için,

$$\lim_{n\to\infty} r^n/n! = 0$$

eşitliğini kanıtlayalım. Alıştırma 9.4.2'ye göre, r yerine $|r|$ alarak $r \geq 0$ varsayımını yapabiliriz. $x_n = r^n/n! \geq 0$ olsun. $\varepsilon > 0$, herhangi bir kesirli sayı sayı olsun. L, r'den büyük herhangi bir doğal sayı olsun. Her k doğal sayısı için,

$$x_{L+k} \leq x_L \left(\frac{r}{L+1}\right)^k$$

eşitsizliğini k üzerine tümevarımla kanıtlayalım. $k = 0$ ise eşitlik sözkonusu. Şimdi eşitsizliği k için varsayıp $k+1$ için kanıtlayalım:

$$\begin{aligned} x_{L+k+1} &= \frac{r^{L+k+1}}{(L+k+1)!} = \frac{r^{L+k}}{(L+k)!}\,\frac{r}{L+k+1} \\ &= x_{L+k}\,\frac{r}{L+k+1} \le x_L\left(\frac{r}{L+1}\right)^k \frac{r}{L+k+1} \\ &\le x_L\left(\frac{r}{L+1}\right)^k\left(\frac{r}{L+1}\right) = x_L\left(\frac{r}{L+1}\right)^{k+1}. \end{aligned}$$

Eşitsizliği kanıtladık. Ama $0 < r/(L+1) < 1$ ve Teorem 2'ye göre yukardaki eşitsizliğin en sağındaki terimin k sonsuza giderken limiti 0'dır. Demek ki öyle bir K vardır ki, her $k > K$ için,

$$\left(\frac{r}{L+1}\right)^k < \frac{\varepsilon}{x_L}$$

eşitsizliği geçerlidir. Şimdi $N = K + L$ olsun. Her $n > N$ için, $k = n - L > K$ tanımıyla,

$$x_n = x_{L+k} \le x_L\left(\frac{r}{L+1}\right)^k < x_L\,\frac{\varepsilon}{x_L} = \varepsilon$$

elde ederiz. İstediğimizi kanıtladık... □

Pek kolay olmadı değil mi? Evet, limit bulmak her zaman kolay değildir, hatta bazen çok çok zor olabilir. Özellikle eğer elimizde $\mathbb{R}$ gibi güçlü bir cisim yoksa.

Okur, haklı olarak yukardaki kanıtı nasıl düşündüğümüzü sorabilir. Yılların deneyimi elbette...

Kanıtı nasıl yaptığımızı anlatmaya çalışalım.

x_{n+1} ile x_n arasında çok basit bir ilişki var:

$$x_{n+1} = \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{r}{n+1}\,\frac{r^n}{n!} = \frac{r}{n+1}x_n.$$

Bunu bir adım daha götürürsek,

$$x_{n+2} = \frac{r}{n+2}x_{n+1} = \frac{r}{n+2}\,\frac{r}{n+1}x_n$$

elde ederiz. Ama buradan da,

$$x_{n+2} = \frac{r}{n+2}\frac{r}{n+1}x_n < \left(\frac{r}{n+1}\right)^2 x_n$$

elde ederiz. Bu aşamada,

$$x_{n+k} \le \left(\frac{r}{n+1}\right)^k x_n$$

eşitsizliğini tahmin edip kanıtlamak zor değil. Eğer *n*'yi yeterince büyük seçersek,

$$\frac{r}{n+1}$$

sayısı 1'den küçük olur ve Teorem 10.2'ye göre eşitsizliğin sağ tarafı *k* büyüdükçe küçülür. Bizim istediğimiz de buydu zaten. Gerisi, okurun ustalaşması gerektiği teknik ayrıntı.

10A. Yakınsaklık Alıştırmaları

1. Şu limitleri bulun:

$$\lim_{n\to\infty} (1 + r^2 + \cdots + r^{2n}),$$
$$\lim_{n\to\infty} r^{2n}/n!$$

2. $\lim_{n \to \infty} nr^n$ limiti hangi r'ler için vardır ve kaçtır? **İpucu:** Teorem 10.2'de kullanılan yöntemi deneyin, yalnız oradaki olgu yerine, her $s > 0$ için,

$$(1 + s)^n \geq 1 + ns + n(n-1)s^2/2$$

eşitsizliğini kullanın.

3. Sabit bir k doğal sayısı için aynı soruyu $(n^k r^n)_n$ dizisi için yanıtlayın.

4. $\lim_{n\to\infty} (1 + 1/2 + 1/4 + \cdots + 1/2^n) = 1$ ve

$$\lim_{n\to\infty} (1/2 - 1/4 + \cdots + (-1)^{n+1}/2^n = 1/3$$

eşitliklerini kanıtlayın.

5. $1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n$ dizisinin sınırsız olduğunu, dolayısıyla ıraksak olduğunu kanıtlayın.

6. Her n için, $1/1^2 + 1/2^2 + \cdots + 1/n^2 \leq 2$ eşitsizliğini kanıtlayın. **İpucu:** 2 yerine $2 - 1/n$ alın!

7. Her n için, $(1 + 1/n)^n < 3$ eşitsizliğini kanıtlayın.

$$((1 + 1/n)^n)_n$$

dizisinin artan bir dizi olduğunu kanıtlayın.

8. Her n için $x_n \neq 0$ ve sabit bir $r \in (0, 1)$ için, $|x_{n+1}/x_n| \leq r$ olsun. $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ eşitliğini kanıtlayın.

9. $(a_n)_n$ herhangi bir dizi olsun.

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

olsun. Eğer $(s_n)_n$ dizisi yakınsaksa, $(a_n)_n$ dizisinin 0'a yakınsadığını kanıtlayın.

10. Bir $n > 0$ tamsayısı için,

$$\nu(n) = \max\{m : 2^m \leq n\}$$

olarak tanımlansın. $\lim_{n\to\infty} \nu(n)/n = 0$ eşitliğini kanıtlayın.

11. $(x_n)_n$ dizisi a'ya yakınsasın. $p(X) \in \mathbb{Q}[X]$ bir polinom olsun. $(p(x_n))_n$ dizisinin $p(a)$'ya yakınsadığını gösterin.

12. $(x_n)_n$ dizisi a'ya yakınsasın. $p(X)$, $q(X) \in \mathbb{Q}[X]$ iki polinom olsun. $q(a) \neq 0$ olsun. $(p(x_n)/q(x_n))_n$ dizisinin $p(a)/q(a)$'ya yakınsadığını gösterin. **Not:** $q(x_n) = 0$ olduğunda bölmede sorun olacaktır ama bu baş edemeyeceğimiz bir sorun değildir: $q(a) \neq 0$ olduğundan, $q(x_n)$'nin 0 olduğu n göstergeçlerinin sayısı sonlu olmalıdır. Dizi, $q(x_n)$'nin 0 olduğu göstergeçlerden sonra başlasın.

13. Eğer $(x_n)_n$ dizisi yakınsaksa ve her n için $x_n \neq 0$ ise, $(x_n/x_{n+1})_n$ dizisinin 1'e yakınsadığını kanıtlayın!

14. Yukardaki alıştırmaya karşıörnek bulun! Kanıtta nerde hata yaptığınızı bulun. Kanıtlanması gereken doğru sonucu yazın. $(x_n/x_{2n})_n$ dizisi hakkında ne diyebilirsiniz? (Bkz. Teorem 12.2.)

15. $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ iki ayrı limite yakınsayan iki dizi olsun.

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cap \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$$

kümesinin sonlu olduğunu kanıtlayın.

16. $x_{n,m} = n/(n + m)$ olsun.

$$\lim_{m\to\infty} (\lim_{n\to\infty} x_{n,m})$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} (\lim_{m\to\infty} x_{n,m})$$

limitlerini hesaplayın.

17. $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ iki dizi olsun.

$$z_n = \begin{cases} x_{n/2} & \text{eğer } n \text{ çiftse} \\ y_{(n-1)/2} & \text{eğer } n \text{ tekse} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $(z_n)_n$ dizisinin yakınsak olması için, $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ dizilerinin yakınsak olması ve aynı sayıya yakınsamalarının gerek ve yeter olduğunu kanıtlayın.

18. $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = 0$ ise, $(a_n)_n$ dizisinin limiti mutlaka olmalı mıdır?

19. Eğer $a_n \geq 0$, $a \geq 0$ ise ve $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = a^2$ ise,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

eşitliğini kanıtlayın.

20. $(a_{2n})_n$, $(a_{2n+1})_n$ ve $(a_{7n+1})_n$ dizileri yakınsak ise $(a_n)_n$ dizisi de yakınsak mıdır?

21. $q \in \mathbb{Q}$ olsun. $\lim_{n\to\infty} a_n/n = q$ eşitliğini sağlayan a_n doğal sayıları var mıdır?