# 9. Yakınsak Dizilerle Dört İşlem ve Sıralama

Yakınsak diziler kümesini $\mathcal{Y}$ ile gösterelim. Bu bölümde $\mathcal{Y}$ kümesinde toplama, çıkarma, çarpma ve kimi zaman da bölme işlemlerini yapabileceğimizi göstereceğiz. Önce toplamadan başlayalım. Dizilerimiz hep kesirli sayı dizileri olacak.

## 9.1. Toplama

İlk teoremimiz, limit alma işleminin dizileri toplama işlemine dağıldığını söyleyecek: $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$ .

**Teorem 9.1.** *$\mathcal{Y}$ kümesi toplama altında kapalıdır, yani iki yakınsak dizinin toplamı da yakınsaktır. Dahası, eğer $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ dizileri sırasıyla $a$ ve $b$ sayılarına yakınsıyorsa, $(x_n \pm y_n)_n$ dizisi $a + b$ sayısına yakınsar, yani,*

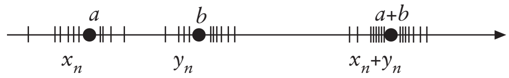
$$\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n$$

*olur.*

**Kanıt:** Önce kanıtın felsefesinden sözedelim, bu önemli. Yani tam matematiksel kanıt yapmadan kanıtın anafikrini anlatmaya çalışalım.

Kanıtın uzunluğuna aldanmasın okur, kanıt kısacıktır. Ama uzun uzun anlatıyoruz...

Varsayıma göre $(x_n)_n$ dizisini $a$'ya dilediğimiz kadar yaklaştırabiliyoruz. Gene varsayıma göre, $(y_n)_n$ dizisini $b$'ye dilediğimiz kadar yaklaştırabiliyoruz. Dolayısıyla $(x_n+y_n)_n$ dizisini $a+b$'ye dilediğimiz kadar yaklaştırabilmemiz gerekir...




Bir daha deneyelim: Varsayıma göre, yeterince büyük $n$'ler için, $x_n$ terimi $a$'ya çok yakın olabiliyor. Gene varsayıma göre, yeterince büyük $n$'ler için, $y_n$ terimi $b$'ye çok yakın olabiliyor. Dolayısıyla, yeterince büyük $n$'ler için, $x_n + y_n$ terimi $a + b$'ye çok yakın olabilmeli...

Yukarda söylenenlerin okuru aydınlattığını umarak matematiksel kanıta geçelim. Kanıtımız her zamanki gibi başlayacak: $\varepsilon > 0$, herhangi bir kesirli sayı olsun...

$(x_n + y_n)_n$ dizisinin $a + b$ sayısına yakınsadığını göstermek istediğimize göre, öyle bir $N$ sayısı bulmalıyız ki, her $n > N$ için,

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| < \varepsilon$$

olsun. Eğer $n$'yi yeterince büyük seçersek, $|x_n - a|$ ve $|y_n - b|$ sayılarını istediğimiz kadar küçültebileceğimizi biliyoruz. Dolayısıyla, kanıtlamak istediğimiz yukardaki eşitsizliğe bir biçimde

$$|x_n - a| \text{ ve } |y_n - b|$$

sayılarını sokuşturmalıyız, bu sayılar devreye girmeli ki varsayımları kullanabilelim.

Tekrar:

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| < \varepsilon$$

eşitsizliğinin sağlanması için $n$'nin ne kadar büyük seçilmesi gerektiğini bulacağız. Her zaman olduğu gibi sol taraftaki ifadeyle oynayacağız. O ifadeden birazcık daha büyük bir ifade bulacağız. Bulduğumuz bu büyük ifadeyi 1) Varsayımlarımızı kullanacağımız biçimde, 2) $n$'yi yeterince büyük seçerek dilediğimiz kadar küçülteceğimizden emin olacağımız biçimde seçeceğiz. Başlayalım:

$$\begin{aligned}|(x_n + y_n) - (a + b)| &= |(x_n - a) + (y_n - b)|\\ &\le |x_n - a| + |y_n - b|.\end{aligned}$$

Şimdi, $|(x_n + y_n) - (a + b)|$ ifadesi yerine,

$$|x_n - a| + |y_n - b|$$

ifadesini ε'dan küçük yapmaya çalışabiliriz. Eğer,

$$|x_n - a| \text{ ve } |y_n - b|$$

ifadelerinin her biri ε/2'den küçük olursa, toplamları ε'dan küçük olur. Zaten bunu yapmasını biliyoruz, çünkü $(x_n)_n$ dizisinin limiti $a$, $(x_n)_n$ dizisinin limiti $b$...

$(x_n)_n$ dizisinin limiti $a$ olduğundan, öyle bir $N_1$ vardır ki, her $n > N_1$ için,

$$|x_n - a| < \varepsilon/2$$

olur. Benzer nedenden, öyle bir $N_2$ doğal sayısı vardır ki, her $n > N_2$ için,

$$|y_n - b| < \varepsilon/2$$

olur. Biz her iki eşitsizliğin birden doğru olmasını istediğimizden, $n$'yi hem $N_1$'den hem de $N_2$'den büyük almalıyız. Dolayısıyla, eğer $N = \max\{N_1, N_2\}$ ise, $n > N$ olduğunda, $n$, hem $N_1$'den hem de $N_2$'den büyük olur ve yukardaki iki eşitsizliğin ikisi birden doğru olur. Şimdi Teorem 1'in birkaç satırlık kanıtı yazabiliriz:

**Teorem 1'in Kanıtı:** $\varepsilon > 0$, herhangi bir kesirli sayı olsun. $(x_n)_n$ dizisinin limiti $a$ olduğundan, öyle bir $N_1$ vardır ki, her $n > N_1$ için,

$$|x_n - a| < \varepsilon/2$$

olur. Benzer nedenden, öyle bir $N_2$ vardır ki, her $n > N_2$ için,

$$|y_n - b| < \varepsilon/2$$

olur. Şimdi $N = \max\{N_1, N_2\}$ olsun. Eğer $n > N$ ise, hem $n > N_1$ hem de $n > N_2$ olduğundan,

$$\begin{aligned}|(x_n + y_n) - (a + b)| &= |(x_n - a) + (y_n - b)|\\ &\le |x_n - a| + |y_n - b|\\ &\le \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\end{aligned}$$

olur. Kanıt tamamlanmıştır. □

Aynı kanıt yöntemini toplama yerine çıkarma işlemine de uygulayabiliriz.

### 9.2. Çıkarma

**Teorem 9.2.** *$\mathcal{Y}$ kümesi çıkarma altında kapalıdır, yani iki yakınsak dizinin farkı da yakınsaktır. Dahası, eğer $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ dizileri sırasıyla a ve b sayılarına yakınsıyorsa, $(x_n - y_n)_n$ dizisi $a - b$ sayısına yakınsar, yani,*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n$$

*olur.*

**Kanıt:** $\varepsilon > 0$, herhangi bir kesirli sayı olsun. $(x_n)_n$ dizisinin limiti $a$ olduğundan, öyle bir $N_1$ vardır ki, her $n > N_1$ için,

$$|x_n - a| < \varepsilon/2$$

dir. Benzer nedenden, öyle bir $N_2$ vardır ki, her $n > N_2$ için,

$$|y_n - b| < \varepsilon/2$$

dir. Şimdi $N = \max\{N_1, N_2\}$ olsun. Eğer $n > N$ ise, hem $n > N_1$ hem de $n > N_2$ olduğundan,

$$\begin{aligned} |(x_n - y_n) - (a - b)| &= |(x_n - a) + (b - y_n)| \\ &\le |x_n - a| + |b - y_n| \\ &= |x_n - a| + |y_n - b| \\ &\le \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Kanıt tamamlanmıştır. □

Aynı önerme, ama bu sefer değişik bir kanıtlama yöntemiyle çarpma için de geçerli.

### 9.3. Çarpma

**Teorem 9.3.** *$\mathcal{Y}$ kümesi çarpma altında kapalıdır, yani iki yakınsak dizinin çarpımı da yakınsaktır. Dahası, eğer $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ dizileri sırasıyla a ve b sayılarına yakınsıyorsa, $(x_ny_n)_n$ dizisi ab sayısına yakınsar, yani,*

$$\lim_{n\to\infty} x_ny_n = (\lim_{n\to\infty} x_n)(\lim_{n\to\infty} y_n)$$

*olur.*

**Kanıt:** $(x_n y_n)_n$ dizisinin $ab$ sayısına yakınsadığını göstermek istediğimize göre, herhangi bir $\varepsilon > 0$ kesirli sayı seçildiğinde, öyle bir $N$ sayısı bulmalıyız ki, her $n > N$ için,

$$|x_n y_n - ab| < \varepsilon$$

olsun. Bir başka deyişle, $|x_n y_n - ab| < \varepsilon$ eşitsizliğinin geçerli olması için $n$'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulmaya çalışmalıyız. Eğer $n$'yi yeterince büyük seçersek,

$$|x_n - a| \text{ ve } |y_n - b|$$

sayılarını istediğimiz kadar küçültebileceğimizi biliyoruz. Dolayısıyla, kanıtlamak istediğimiz yukardaki eşitsizliğe bir biçimde $|x_n - a|$ ve $|y_n - b|$ sayılarını sokuşturmalıyız, bu sayılar devreye girmeli ki varsayımları kullanabilelim.

Her zamanki gibi sol taraftaki $|x_n y_n - ab|$ ifadesiyle oynamalıyız. Bu ifadeyi hafifçe büyüterek, işin içine $|x_n - a|$ ve $|y_n - b|$ ifadelerini sokmalıyız. Bunu yapmak için matematikte sık sık kullanılan ufak bir hile vardır. İşte o hile:

$$\begin{aligned} |x_n y_n - ab| &= |x_n y_n - x_n b + x_n b - ab| \\ &\leq |x_n y_n - x_n b| + |x_n b - ab| \\ &= |x_n||y_n - b| + |x_n - a||b|. \end{aligned}$$

Şimdi en sağdaki $|x_n||y_n - b| + |x_n - a||b|$ toplamını $\varepsilon$'dan küçük yapmalıyız. Ama bu mümkün müdür? Her iki

$$|x_n||y_n - b| \text{ ve } |x_n - a||b|$$

terimini de $\varepsilon/2$'den küçük yapabilirsek, o zaman bunların toplamları da $\varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$'dan küçük olur ve kanıtımızı başarıyla tamamlamış oluruz.

Önce görece kolay olan $|x_n - a||b|$ terimini ($n$'yi yeterince büyük yaparak) $\varepsilon/2$'den küçük yapalım. Bunun için, $|x_n - a|$ terimini $\varepsilon/2|b|$'den küçük yapmak yeterli. Ama dikkat, eğer $|b| = 0$ ise, $|b|$'ye bölemeyiz... Hiç önemli değil! Bu sorunun çözümü gayet basit:

$$|x_n - a||b| < |x_n - a|(1 + |b|)$$

olduğundan, $|x_n - a|$ terimini

$$\frac{\varepsilon}{2(1+|b|)}$$

den küçük yapmak yeterli! Bunu yapabilir miyiz? Evet! Bu sayı 0'dan büyük kesirli bir sayı olduğundan, öyle bir $N_1$ sayısı vardır ki, her $n > N_1$ için,

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(1+|b|)}$$

eşitsizliği doğrudur.

Şimdi $|x_n||y_n - b|$ terimini de $\varepsilon/2$'den küçük yapmaya çalışmalıyız. $|y_n - b|$ terimini istediğimiz kadar küçültebileceğimizi biliyoruz. Ama bu yetmez... Çünkü bu terimin yanına yapışmış bir de $|x_n|$ terimi var. Eğer $|x_n|$ çok artarsa, o zaman bu terimi, küçüldüğünü bildiğimiz $|y_n - b|$ terimiyle çarptığımızda, çarpımın çok küçüleceğinden emin olamayız. Örneğin, $|y_n - b|$ terimi $1/n$ gibi küçülebilir ama $|x_n|$ terimi $n$ gibi artabilir. O zaman da çarpımları olan $|x_n||y_n - b|$ terimi $n$ büyükken 1 civarında dolanır durur ve hiçbir zaman $\varepsilon/2$ kadar küçülemez. ($\varepsilon$'un küçük bir sayı olduğunu unutmayın.)

Neyse ki böyle bir sorunla karşılaşmayız, çünkü birazdan kanıtlayacağımız üzere, $(x_n)_n$ dizisi yakınsak olduğundan sınırlıdır (Teorem 4) ve dizinin her $|x_n|$ terimi belli bir $B > 0$ kesirli sayısından küçüktür. Demek ki (eğer Teorem 4'ü doğru kabul edersek),

$$|x_n||y_n - b| < B|y_n - b|$$

eşitsizliği geçerlidir. Şimdi en sağdaki $B|y_n - b|$ ifadesini $\varepsilon/2$'dan küçük yapmak yeterlidir. $B|y_n - b|$ ifadesini $\varepsilon/2$'den küçük yapmak için ise de, $|y_n - b|$ ifadesini

$$\frac{\varepsilon}{2B}$$

den küçük yapmak yeterlidir. Bunu başarabiliriz dostum! Ne de olsa bu sayı pozitif bir kesirli sayıdır ve $|y_n - b|$ sayısı yeterince büyük $n$'ler için bu sayının altına iner: Öyle bir $N_2$ sayısı vardır ki, her $n > N_2$ için,

$$|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2B}$$

eşitsizliği doğrudur. Demek ki,

$$|x_n| \cdot |y_n - b| < B|y_n - b| < B\frac{\varepsilon}{2B} = \frac{\varepsilon}{2}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Şimdi $N = \max\{N_1, N_2\}$ olsun. Eğer $n > N$ ise, hem $n > N_1$ hem de $n > N_2$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
|x_n y_n - ab| &= |x_n y_n - x_n b + x_n b - ab| \\
&\le |x_n y_n - x_n b| + |x_n b - ab| \\
&= |x_n||y_n - b| + |x_n - a||b| \\
&< B|y_n - b| + |x_n - a||b| \\
&< B|y_n - b| + |x_n - a|(1 + |b|) \\
&< B\frac{\varepsilon}{2B} + \frac{\varepsilon}{2(1+|b|)}(1 + |b|) \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

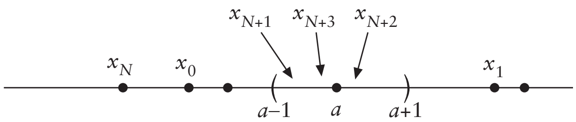
Aşağıda tamamlayacağımız ufak bir eksiklik dışında kanıtımız bitmiştir. □

**Teorem 9.4.** *Yakınsak bir dizi sınırlıdır. Yani*

$$\mathscr{Y} \subseteq \mathscr{B}.$$

**Kanıt:** Kanıtın anafikri çok basit: Eğer bir dizi $a$'ya yakınsıyorsa, bu dizinin terimleri $a$'dan pek uzakta olamazlar... Şimdi teoremi matematiksel olarak kanıtlayalım.

Bir $a$ sayısına yakınsayan bir $(x_n)_n$ dizisi ele alalım. Yakınsamanın tanımında $\varepsilon$'u 1'e eşit alalım. 1, 0'dan büyük bir kesirli sayı olduğundan buna hakkımız var. O zaman dizinin terimleri belli bir $N$ göstergecinden sonra $(a - 1, a + 1)$ aralığına düşer, yani her $n > N$ için, $x_n \in (a - 1, a + 1)$ olur. Geriye sonlu sayıda $x_0, x_1, ..., x_N$ terimi kalır. Bunlar da sınırlı bir aralığa sığarlar elbette.




Daha biçimsel olalım ve

$$A = \min\{x_0, x_1, ..., x_N, a\} - 1,$$
$$B = \max\{x_0, x_1, ..., x_N, a\} + 1$$

tanımlarını yapalım. O zaman her $x_n$ terimi $(A, B)$ aralığına düşer. Demek ki dizi sınırlıdır. □

Böylece Teorem 3'ün de kanıtı tamamlandı.

İlk üç teorem, $s(1) \in \mathscr{Y}$ olgusuyla birlikte ($s(1)$, sabit 1 dizisidir ve $\mathscr{Y}$'nin çarpma işleminin etkisiz elemanıdır), yakınsak diziler kümesi $\mathscr{Y}$'nin bir halka olduğunu söylüyor, hatta bu üç teorem $\mathscr{Y}$'nin, tüm diziler halkası $\mathscr{D}$'nin bir althalkası olduğunu söylüyor. Teorem 4 de, ayrıca, $\mathscr{Y}$'nin sınırlı diziler halkası $\mathscr{B}$'nin bir althalkası olduğunu söylüyor. Althalkalık ≤ işaretiyle gösterilir. Demek ki,

$$\mathscr{Y} \leq \mathscr{B} \leq \mathscr{D}$$

ilişkilerini (eşitsizliklerini değil!) kanıtladık.

### 9.4. Mutlak Değer

**Önsav 9.5.** *Eğer $x = (x_n)_n$ yakınsak bir diziyse, $(|x_n|)_n$ dizisi de yakınsaktır ve*

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = |\lim_{n\to\infty} x_n|$$

*olur.*

**Kanıt:** $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ olsun. $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|$ eşitliğini kanıtlayacağız. Her zaman olduğu gibi bir $\varepsilon > 0$ kesirli sayısı seçelim. Her $n > N$ için,

$$||x_n| - |a|| < \varepsilon$$

eşitsizliğinin geçerli olduğu bir $N$ doğal sayısı (göstergeci) bulacağız. Bunun için aşağıdaki gri kutuda kanıtlanan ünlü eşitsizliği kullanacağız:

$$||x_n| - |a|| \leq |x_n - a|.$$

Demek ki $||x_n| - |a|| < \varepsilon$ eşitsizliğini elde etmek için,

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

eşitsizliğini elde etmek yeterli. Nitekim,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

olduğundan, öyle bir $N$ doğal sayısı vardır ki, her $n > N$ için,

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

eşitsizliği geçerlidir. Demek ki, $n > N$ için,

$$||x_n| - |a|| \leq |x_n - a| < \varepsilon.$$

Önsav kanıtlanmıştır. □

## $|a - b| \geq ||a| - |b||$ Eşitsizliği

$a$, $b \in \mathbb{Q}$ olsun. Üçgen eşitsizliğinden,

$$|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|$$

elde ederiz. Demek ki,

$$|a - b| \geq |a| - |b|.$$

Aynı nedenden, $a$ ile $b$'nin rollerini değiştirirsek,

$$|a - b| = |b - a| \geq |b| - |a|$$

buluruz. Demek ki $|a - b|$, hem $|a| - |b|$ sayısından, hem de bunun eksisi olan $|b| - |a|$ sayısından büyükeşit, yani $|a| - |b|$ sayısının mutlak değerinden büyükeşit: $|a - b| \geq ||a| - |b||$.

**Alıştırmalar. 9.4.1.** Şu önermeyi kanıtlayın: $(x_n)_n$ dizisi yakınsaksa ve $a \in \mathbb{Q}$ ise $(ax_n)_n$ dizisi de yakınsaktır ve

$$\lim_{n\to\infty} ax_n = a \lim_{n\to\infty} x_n$$

olur.

**9.4.2.** Eğer $(|x_n|)_n$ dizisi 0'a yakınsıyorsa $(x_n)_n$ dizisinin de 0'a yakınsadığını kanıtlayın.

**9.4.3.** $(x_n)_n$ dizisi yakınsaksa ve $k \in \mathbb{N}$ ise $(x_n^k)_n$ dizisinin de yakınsak olduğunu ve

$$\lim_{n\to\infty} x_n^k = (\lim_{n\to\infty} x_n)^k$$

eşitliğini kanıtlayın.

## 9.5. Yakınsak Diziler ve Sıralama

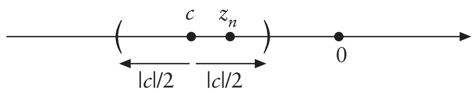
Yakınsak dizilerle bölme arasındaki ilişkiyi irdelemeden önce yakınsak dizilerle sıralama arasındaki ilişkiyi irdeleyelim.

**Önsav 9.6.** *$(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ dizileri sırasıyla $a$ ve $b$'ye yakınsasınlar. Eğer belli bir göstergeçten sonra hep $x_n \geq y_n$ eşitsizliği sağlanıyorsa, o zaman $a \geq b$ olur.*

**Kanıt:** Eğer $z_n = x_n - y_n$ tanımını yaparsak, Teorem 2'ye göre,

> "*$(z_n)_n$ dizisi $c$'ye yakınsasın. Eğer belli bir göstergeçten sonra hep $z_n \geq 0$ eşitsizliği sağlanıyorsa, o zaman $c \geq 0$ olur*"

önermesini kanıtlamanın yeterli olduğunu görürüz. Tam tersine, $c$'nin negatif olduğunu varsayalım. Demek ki $c = -|c|$.




Varsayıma göre öyle bir $N_0$ vardır ki $n > N_0$ için,

$$z_n \geq 0$$

olur. Ayrıca, $(z_n)_n$ dizisi $c$'ye yakınsadığından, öyle bir $N_1$ vardır ki $n > N_1$ için,

$$|z_n - c| \leq |c|/2$$

olur. Bunu görmek için, yakınsamanın tanımında $\varepsilon = |c|/2 > 0$ almak yeterli. Demek ki,

$$-|c|/2 \leq z_n - c \leq |c|/2.$$

Dolayısıyla $z_n \leq c + |c|/2$. Şimdi $n$, hem $N_0$'dan hem de $N_1$'den büyük bir göstergeç olsun. O zaman,

$$z_n \leq c + |c|/2 = -|c| + |c|/2 = -|c|/2 < 0,$$

çelişki. □

**Alıştırma.** $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ dizileri sırasıyla $a$ ve $b$'ye yakınsasınlar. Eğer sonsuz sayıda $n$ göstergeci için $x_n \geq y_n$ eşitsizliği sağlanıyorsa, o zaman $a \geq b$ olduğunu kanıtlayın.

### 9.6. Sıfıra Yakınsayan Diziler

Bölmeye geçmeden önce bir de 0'a yakınsayan dizilere bakalım. Bu dizilerin kümesine $\mathscr{Y}_0$ diyelim. $\mathscr{Y}_0$ kümesi de toplama, çıkarma ve çarpma işlemleri altında kapalıdır ama çarpmanın etkisiz elemanı olan $s(1)$ dizisini içermediğinden (bizim bu terime verdiğimiz anlamda) halka değildir. Bu dezavantajına karşın $\mathscr{Y}_0$ kümesinin bir üstünlüğü vardır:

**Önsav 9.7.** 0'*a yakınsayan bir diziyle sınırlı bir dizinin çarpımı* 0'*a yakınsar. Yani* $\mathscr{B}\mathscr{Y}_0 \subseteq \mathscr{Y}_0$. (Aslında eşitlik geçerli tabii.)

**Kanıt:** $(x_n)_n$, 0'a yakınsayan, $(y_n)_n$ de sınırlı bir dizi olsun. $(x_ny_n)_n$ dizisinin de 0'a yakınsadığını kanıtlayacağız. Kanıtımıza, artık alışık olduğumuz sözlerle başlayalım: $\varepsilon > 0$, herhangi bir kesirli sayı olsun. Öyle bir $N$ bulmalıyız ki, her $n > N$ için,

$$|x_ny_n| < \varepsilon$$

olsun, yani

$$|x_n||y_n| < \varepsilon$$

olsun. $(x_n)_n$ dizisi 0'a yakınsadığından, yeterince büyük $n$ göstergeçleri için $|x_n|$ sayısının çok küçüleceğini biliyoruz. Ama araya bir de $|y_n|$ girmiş. Eğer $|y_n|$ çok büyürse, $|x_n||y_n|$ sayısını küçültmekte zorlanabiliriz. Neyse ki $|y_n|$'ler çok büyüyemezler, çünkü varsayıma göre $(y_n)_n$ dizisi sınırlı. Bu olguyu kullanmalıyız kanıtımızda.

$B$, $|y_n|$'lerin bir üstsınırı olsun: Her $n$ için,

$$|y_n| < B.$$

$B$'nin 0 olamayacağına dikkatinizi çekerim. Şimdi, her $n$ için,

$$|x_n||y_n| \leq B|x_n|.$$

Dolayısıyla, $B|x_n|$'yi $\varepsilon$'dan küçük yapmak yeterli, o zaman $|x_n||y_n|$ otomatik olarak $\varepsilon$'dan küçük olur; bunun için de $|x_n|$'yi $\varepsilon/B$ sayısından küçük yapmak yeterli ve bunu da başarabiliriz: $(x_n)_n$ dizisi 0'a yakınsayan bir dizi olduğundan, öyle bir $N$ vardır ki,

eğer $n > N$ ise, $|x_n| < \varepsilon/B$ dir. Dolayısıyla, her $n > N$ için,
$$|x_n y_n| = |x_n||y_n| < B|x_n| < B\,\varepsilon/B = \varepsilon.$$
İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

Bir $R$ halkasının, çıkarma altında kapalı, boş olmayan ve $RI \subseteq I$ ve $IR \subseteq I$ içindeliklerini sağlayan $I$ altkümelerine $R$'nin ***ideali*** adı verilir ve bu durum $I \lhd R$ olarak gösterilir. Demek ki $\mathcal{Y}_0 \lhd \mathcal{B}$.

## 9.7. Bölme

Şimdi $\mathcal{Y}$'nin tersinir elemanlarını bulalım. Yani öyle yakınsak dizileri bulalım ki, gene yakınsak bir diziyle çarpınca, sonuç sabit 1 dizisi $s(1)$ olabilsin. Demek ki belli bir $(y_n)_n$ yakınsak dizisi için,
$$(x_n)_n(y_n)_n = s(1)$$
eşitliğini sağlayan $(x_n)_n$ yakınsak dizilerini arıyoruz. Böyle bir $(y_n)_n$ dizisi varsa $x_n y_n = 1$ olmalı, yani her $n$ için $x_n \neq 0$ ve $y_n = 1/x_n$ olmalı. Sonuç: Her terimi 0'dan değişik olan hangi $(x_n)_n$ yakınsak dizileri için, $(1/x_n)_n$ dizisinin yakınsak olduğunu bulmalıyız.

**Teorem 9.8.** *Eğer* $(x_n)_n$ *yakınsak dizisinin her terimi* 0'*dan değişikse ve dizi* 0'*a yakınsamıyorsa*, *o zaman* $(1/x_n)_n$ *dizisi de yakınsaktır* ve
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} x_n}$$
*dir. Ayrıca eğer* $(x_n)_n$ *dizisi* 0'*a yakınsıyorsa* $(1/x_n)_n$ *dizisi ıraksaktır. Daha simgesel bir ifadeyle*
$$\begin{aligned}\mathcal{Y}^* &= \{x \in \mathcal{Y} : \textit{her } n \textit{ için } x_n \neq 0 \textit{ ve } x \notin \mathcal{Y}_0\}\\ &= (\mathcal{Y} \setminus \mathcal{Y}_0) \cap \mathcal{D}^*\end{aligned}$$
*olur.*

**Kanıt:** Eğer $x = (x_n)_n \in \mathcal{Y}^*$ ise, her $n$ için $x_n \neq 0$ olması gerektiği bariz. $y = (y_n)_n \in \mathcal{Y}^*$, $x$'in tersi olsun. Eğer $a$ ve $b$ sırasıyla $x$ ve $y$ dizilerinin limitiyse, o zaman Teorem 3'e göre,

$$1 = \lim s(1) = \lim x_n y_n = \lim x_n \lim y_n = ab,$$

dolayısıyla $b \neq 0$.

Şimdi $x \in \mathcal{Y} \setminus \mathcal{Y}_0$, "her *n için* $x_n \neq 0$" koşulunu sağlasın. $x$'in tersinir olduğunu, yani $(1/x_n)_n$ dizisinin yakınsak olduğunu gösterelim. Eğer $a \neq 0$ sayısı $(x_n)_n$ dizisinin limitiyse, $1/a$ sayısının $(1/x_n)_n$ dizisinin limiti olduğunu göstereceğiz.

$\varepsilon > 0$, herhangi bir kesirli sayı olsun. Öyle bir $N$ bulmak istiyoruz ki, her $n > N$ için,

$$|1/x_n - 1/a| < \varepsilon$$

olsun. $|1/x_n - 1/a|$ ifadesiyle oynayarak, bu ifadenin $\varepsilon$'dan küçük olması için $n$'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulacağız. Oynamaya başlayalım:

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|a - x_n|}{|a||x_n|}.$$

Sağdaki ifadenin payını dilediğim kadar küçük yapabilirim, çünkü $(x_n)_n$ dizisi $a$'ya yakınsıyor, burada bir sorun yok. Paydadaki $a$ sabit bir sayı, bu da sorun yaratmaz. Ama $x_n$ sorun yaratabilir, çünkü eğer $x_n$ çok küçülürse, o zaman ifade çok büyüyebilir ve ifadenin $\varepsilon$'dan küçük olduğunu kanıtlayamayız. Teoremin doğru olması için $|x_n|$'ler belli bir pozitif sayıdan küçük olmamalı. Bu doğrudur ve $(x_n)_n$ dizisinin limitinin 0 olmamasından kaynaklanır ama gene de bir kanıta ihtiyacı vardır. Bir sonraki önsavda bunu kanıtlayacağız.

Bir sonraki önsava göre, öyle bir $\delta > 0$ var ki, her $n$ için, $|x_n| > \delta$'dır. Şimdi yukardaki hesabı bir adım daha devam ettirebiliriz:

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|a - x_n|}{|a||x_n|} < \frac{|a - x_n|}{|a|\delta}.$$

Şimdi en sağdaki ifadenin $\varepsilon$'dan küçük olması için $n$'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulalım. Bu ifadenin $\varepsilon$'dan küçük olması için, $|a - x_n|$, $\varepsilon|a|\delta$'dan küçük olmalı ve $\varepsilon|a|\delta > 0$ olduğundan bunu yapabiliriz: $N$, her $n > N$ için,

$$|a - x_n| < \varepsilon|a|\delta$$

eşitsizliğini sağlayan bir sayı olsun. Şimdi $N$'den büyük her $n$ için,

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|a - x_n|}{|a||x_n|} < \frac{|a - x_n|}{|a|\delta} < \frac{\varepsilon|a|\delta}{|a|\delta} = \varepsilon.$$

Bir sonraki önsavı da kanıtlarsak kanıtımız tamamen tamamlanmış olacak. □

**Önsav 9.9. i.** *Eğer* $(x_n)_n$ *yakınsak dizisi* 0'*a yakınsamıyorsa, öyle bir* $N$ *doğal sayısı ve* $\delta > 0$ *vardır ki, her* $n > N$ *için*, $|x_n| > \delta$ *olur*.

**ii.** *Eğer* $(x_n)_n$ *yakınsak dizisi* 0'*a yakınsamıyorsa ve her terimi* 0'*dan değişikse*, *öyle bir* $\delta > 0$ *vardır ki, her* $n$ *için*, $|x_n| > \delta$ *olur*.

**Kanıt:** Önsav 5'e göre, $(x_n)_n$ yerine $(|x_n|)_n$ dizisini alıp $x_n \geq 0$ eşitsizliğini varsayabiliriz. $(x_n)_n$ dizisi $a$'ya yakınsasın. Önsav 6'ya ve varsayıma göre $a > 0$ olmalı. Eğer $\varepsilon = a/2$ alırsak, her $n > N$ için,

$$|x_n - a| < a/2$$

eşitsizliğini, yani

$$-a/2 < x_n - a < a/2$$

eşitsizliklerini sağlayan bir $N$'nin olduğunu görürüz. Demek ki, $n > N$ için,

$$a - a/2 < x_n$$

eşitsizliği sağlanır. Şimdi $\delta = a/2$ alırsak, birinci kısmı kanıtlamış oluruz. İkinci kısma geçelim. Yukardaki $\delta$ yerine,

$$\delta = \min\{|x_0|/2, |x_1|/2, ..., |x_N|/2, a/2\}$$

alalım. Varsayımdan dolayı $\delta > 0$ ve $a$'nın, $N$'nin ve $\delta$'nın tanımlarından dolayı, her $n$ için, $|x_n| > \delta$. □

## 9.8. Sıralama

**Teorem 9.10 [Sandviç Teoremi].** *$(x_n)_n$, $(y_n)_n$ ve $(z_n)_n$ üç dizi olsun. $x_n \le y_n \le z_n$ eşitsizliklerinin belli bir $M$ göstergecinden sonra doğruysa ve $(x_n)_n$ ve $(z_n)_n$ dizileri aynı elemana yakınsıyorsa, $(y_n)_n$ dizisi de bu elemana yakınsar.*

**Kanıt:** $(x_n)_n$ *ve* $(z_n)_n$ dizileri $a$'ya yakınsasınlar. $(y_n)_n$ dizisinin de $a$'ya yakınsadığını kanıtlayacağız, yani ε > 0, herhangi bir pozitif sayıysa,

$$|y_n - a| < \varepsilon$$

eşitsizliğinin her $n > N$ için doğru olduğu bir $N$ sayısı bulacağız. $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun.

$$|y_n - a| < \varepsilon$$

eşitsizliğinin doğru olması için $n$'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulacağız. Bunun için $|y_n - a|$ ifadesiyle oynayacağız. Hesaplarda rahat etmek için $n > M$ alalım. Bu kısıtlama yetmeyecek ama bu sayede, hiç olmazsa,

$$\begin{aligned} |y_n - a| &= |a - x_n + x_n - y_n| \\ &\le |a - x_n| + |x_n - y_n| \\ &= |a - x_n| + (y_n - x_n) \\ &\le |a - x_n| + (z_n - x_n) \\ &\le |a - x_n| + |z_n - a| + |a - x_n| \\ &= 2|a - x_n| + |z_n - a| \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Demek ki en sondaki ifadeyi ε'dan küçük yapmak yeterli. $(x_n)_n$ dizisi $a$'ya yakınsadığından, öyle bir $N_1$ vardır ki, her $n > N_1$ için

$$|x_n - a| = |a - x_n| < \varepsilon/3$$

olur. Aynı nedenden, öyle bir $N_2$ vardır ki, her $n > N_2$ için

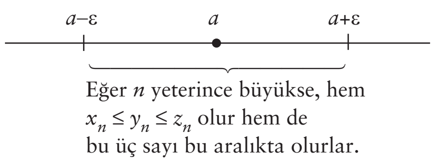
$$|a - z_n| < \varepsilon/3$$

olur. Şimdi $N = \max\{M, N_1, N_2\}$ olsun. Eğer $n > N$ ise,

$$|y_n - a| = 2|a - x_n| + |z_n - a| < 2\varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

elde ederiz.

**İkinci Kanıt:** Bir $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. $a$, $(x_n)_n$ *ve* $(z_n)_n$ dizilerinin limiti olsun. O zaman büyük $n$'ler için, hem $a - \varepsilon < x_n$




hem de $z_n < a + \varepsilon$ olur. Demek ki belki biraz daha büyük $n$'ler için

$$a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon$$

olur. Bu büyük $n$'ler için $a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$, yani $|y_n - a| < \varepsilon$ olur. Teorem kanıtlanmıştır. □