

Kümeler Kuramı

Vize

Mayıs 2000

Ali Nesin

1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu şöyle tanımlayalım: Eğer $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ise $f(x) = 0$ ve eğer $x \in \mathbb{Q}$ ise, $x = p/q$ eşitliğini sağlayan $p, q \in \mathbb{Z}$, $(p, q) = 1$ ve $q > 0$ tamsayılarını seçelim ve $f(x) = 1/q$ olsun. f 'nin sürekli olduğu noktaları bulun.

2. 1, 2, 3, 4 ve 5 noktalı bir küme üzerine kaç tane izomorfik olmayan yarı sıralama vardır?

3. X bir küme olsun. X 'in bir altkümeler kümesi \mathfrak{S} aşağıdaki özellikleri sağlarsa o zaman ona X 'in bir **filtre**'si denir:

- i) $A \in \mathfrak{S}$ ve $A \subseteq B \subseteq X$ ise, $B \in \mathfrak{S}$.
- ii) $A, B \in \mathfrak{S}$ ise, $A \cap B \in \mathfrak{S}$.
- iii) $\emptyset \notin \mathfrak{S}$ ve $X \in \mathfrak{S}$.

Eğer $A \subseteq X$ boşküme değilse, o zaman A 'yı içeren X 'in altkümelerinden oluşan küme X 'in bir **filtresidir**, adı da **başat filtre**'dir ve $\mathfrak{S}(A)$ diye yazılır.

Eğer X sonsuz ise, tümleyeni sonlu olan X 'in tüm altkümelerinden oluşan küme de bir filtredir, bu kümeye **Fréchet filtresi** denir.

3a. Fréchet filtresinin başat filtre olmadığını gösteriniz.

Maksimal filtrelere **ultrafilter** denir.

3b. "Bir başat filtre $\mathfrak{S}(A)$ bir ultrafiltredir ancak ve ancak A tek bir elemandan oluşuyorsa" önermesini kanıtlayınız.

3c. "Bir filtre \mathfrak{S} bir ultrafiltre'dir ancak ve ancak her $A \subseteq X$ için, ya $A \in \mathfrak{S}$ ya da $A^c \in \mathfrak{S}$ " önermesini kanıtlayınız.

3d. Başat olmayan her ultrafiltrenin Fréchet filtre'yi içerdiğini gösteriniz.

3e. X sonsuz ise X 'in başat olmayan ultrafiltre'leri olduğunu gösteriniz. (İpucu: Zorn's Lemma'yı kullanın).