

Math 112 Midterm  
April 14, 2006  
Ali Nesin

1. Zorn Önsavı'nı kullanmadan,  $\mathbb{Q}$ 'nun çıkarma altında kapalı ve 1'i içermeyen öyle bir altkümesini bulun ki, bu özelliklere sahip daha büyük bir küme ancak  $\mathbb{Q}$  olabilsin.
2.  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}$ 'nin çıkartma altında kapalı bir özaltkümesi olsun ve 1'i içermesin.  $\mathbb{R}$ 'nin öyle bir  $B$  özaltkümesini bulun ki  $1 \notin B \supseteq A$  sağlansın ve  $B$  de  $A$  gibi çıkarma altında kapalı olsun ve bu özelliklere sahip  $B$ 'den daha büyük bir küme ancak  $\mathbb{R}$  olabilsin. (Zorn Önsavı'nı kullanmak zorundasınız.)
3.  $R$  bir halka olsun.  $R$ 'de  $-1$ 'in karelerin toplamı olarak yazılamadığını varsayalım. Karelerin toplamından oluşan kümeye  $K$  diyelim. Öyle bir  $P \subseteq R$  altkümesi bulun ki  $K \subseteq P$ ,  $R = P \cup -P$  ve  $P \cap -P = \{0\}$  olsun. Buradan  $R$ 'nin tamsıralanabileceğini kanıtlayın. (İpucu: Zorn Önsavı.)