

36. Süreklilik Hipotezi ve Felsefi Sonuçları

Doğal sayıların sayılabilir sonsuzlukta, gerçel sayıların ise sayılamaz sonsuzlukta olduğunu biliyoruz [Sİ, SKK]. Hatta gerçel sayıların kardinalitesinin 2^ω olduğunu biliyoruz. Demek ki,

$$|\mathbb{N}| = \omega < \omega_1 \leq 2^\omega = |\mathbb{R}|.$$

1877’de, henüz 32 yaşındayken, kümeler kuramının ve ordinal ve kardinal kavramlarının yaratıcısı Alman matematikçi Georg Cantor, \mathbb{R} ’nin, doğal sayılardan “daha büyük” ama gerçel sayılardan “daha küçük” bir altkümesinin olup olmayacağı sorusunu sordu. Yani \mathbb{R} ’nin sayılamaz sonsuzlukta olan ama kardinalitesi 2^ω olmayan bir altkümesi var mıdır? Ya da \mathbb{R} ’nin her sonsuz altkümesi ya \mathbb{N} ya da \mathbb{R} ile eşlenik olmak zorunda mıdır? Daha modern bir deyişle, $\omega_1 = 2^\omega$ eşitliği doğru mudur?

Cantor yanıtın olumsuz olacağını tahmin etti ama bir türlü kanıtlayamadı. Cantor’un bu tahminine *Süreklilik Hipotezi* denir:

Süreklilik Hipotezi [SH]. $\omega_1 = 2^\omega$.

1900’de, Paris’teki meşhur konferansında David Hilbert bu problemi 20’nci yüzyılın matematikçilerine sordu. Hilbert bu probleme o kadar önem veriyordu ki, sunduğu 23 problem ara-

sında buna birinci sırada yer verdi. Yanıtı bulmak 63 yıl aldı.

Kurt Gödel 1938'de, Süreklilik Hipotezi'nin ZFC'yle¹ tutarlı olduğunu kanıtladı. Yani eğer ZFC çelişkisizse (bir başka deyişle, ZFC'de $0 = 1$ eşitliği kanıtlanamazsa), o zaman ZFC'ye Süreklilik Hipotezi'ni eklersek de çelişkisiz bir kümeler kuramı elde ederiz.

Gödel'in bu sonucundan, ZFC'de, Süreklilik Hipotezi'nin yanlışlığının kanıtlanamayacağı çıkar, ama doğruluğunun kanıtlanabileceği çıkmaz. Bunu 1963'te Paul Cohen göstermiştir. Cohen'in kanıtı, o güne dek bilinmeyen bir yöntem kullanır: İngilizcesiyle *Forcing*, Türkçesi *zor kullanma* ya da *zorlama* olabilir. Zorlamayla, Cohen, ZFC'nin aksiyomlarının doğru olduğu ama SH'nin yanlış olduğu bir evren ($ZFC + \neg SH$ 'nin bir modelini) inşa etmiştir ve bu inşasıyla 1966'da Fields Madalyası'nı kazanmıştır.

Gödel'le Cohen'in sonuçlarını bir araya koyarsak, ZFC'nin, Süreklilik Hipotezi'nin doğruluğu ya da yanlışlığı konusunda herhangi bir şey söyleyemeyeceği çıkar. Eğer ZFC çelişkisiz (yani tutarlı) bir kuramsa, ZFC'ye Süreklilik Hipotezi olan $\omega_1 = 2^\omega$ eşitliğini de aksiyom olarak eklesen, tam tersine, Süreklilik Hipotezi'nin değillesmesi olan $\omega_1 < 2^\omega$ eşitsizliğini de aksiyom olarak eklesen, her iki durumda da çelişkisiz bir kuram elde ederiz. Mantıkçıların deyimiyle Süreklilik Hipotezi, ZFC'den bağımsızdır.

Bütün bunlar akla başka sorular getiriyor. Acaba ZFC, $2^\omega \leq \omega_2$ eşitsizliğini kanıtlayabilir mi? Ya da $2^\omega \leq \omega_5$ eşitsizliğini? Hayır!

Peki, ZFC, bir α ordinali için $2^\omega \leq \omega_\alpha$ eşitsizliğini kanıtlayabilir mi? Elbette: $\alpha = 2^\omega$ için örneğin (Önsav 35.3). Ama bu yanıt doyurucu değil, çünkü 2^ω kardinalinin ne kadar büyük olduğunu anlamak için gene 2^ω kardinalini kullanıyoruz.

1 ZFC, matematikçilerin çok büyük çoğunluğuyla çalıştıkları aksiyom sistemidir.

n hangi doğal sayı olursa olsun, ZFC'ye $2^\omega = \omega_n$ eşitliğini eklersek, tutarlı, yani çelişkisiz bir kuram elde ederiz. Yani ZFC'de hiçbir n doğal sayısı için,

$$2^\omega \leq \omega_n$$

eşitsizliği kanıtlanamaz.

2^ω kardinalini nerdeyse istediğimiz kadar büyük yapabiliriz. Ama $2^\omega = \omega_\omega$ yapamayız. 2^ω 'nın ω_ω 'dan daha küçük ya da daha büyük olduğu ZFC'yle tutarlıdır, ama eşitlik ZFC'yle tutarlı değildir. (Bkz. Altbölüm 38.4.)

Öte yandan, bazı ilginç varsayımlar $2^\omega = \omega_2$ eşitliğini kanıtlıyor. Eğer tüm ω_n 'ler arasından 2^ω 'nın illa birine eşit olduğunu varsaymak gerekiyorsa, $n = 1$ ya da 2 en “tabii” seçim olarak önümüze çıkıyor.

Yukardaki tartışmadan şu sonuç çıkıyor: Matematiksel olarak, Süreklilik Hipotezi'ni kabul etsek de olur, etmesek de. Ya da bu konuda hiçbir karar almayabiliriz. Demek ki bu daha çok gerçeği algılamamızla ilgili felsefi bir sorudur.

Matematiksel olarak yapılabilecek en doğal şey, SH'nin ve deşilmesinin sonuçlarına bakıp, çıkan sonuçların “doğallığına” ve “yapaylığına” göre karar vermek. Bu konuda bugüne dek bir fikir birliğine varılamadığından, ne Süreklilik Hipotezi ne de deşilmesi aksiyomlara eklenmiştir.

Felsefi olarak düşünöldüğünde, en filozof matematikçiler, 2^ω 'nın çok daha büyük olması gerektiğini düşünöyorlar ve bu satırların yazarı da bu bakış açısına katılıyor. Ama 2^ω kardinalinin neye eşit olması “gerektiğı” bugün kümeler kuramını enerjik ve son derece ilginç kılan sorudur.

SH'nin (ya da SH'nin ZFC'den bağımsızlığının) standart matematikte, daha çok analiz, topoloji ve ölçüm kuramı gibi konularda önemli sonuçları vardır. Bu sayede, bu konulardaki yanıtlanmamış birçok sorunun ZFC'den bağımsız olduğu anlaşılmıştır.

SH'den daha genel bir hipotez vardır:

Genelleştirilmiş Süreklilik Hipotezi [GSH]. *Her sonsuz κ kardinali için, $2^\kappa = \kappa^+$. Yani κ ile 2^κ arasında üçüncü bir kardinal yoktur, ya da her α ordinali için $2^{\omega_\alpha} = \omega_{\alpha+1}$ eşitliği geçerlidir.*

Süreklilik Hipotezi'nin bu genelleşmiş halini ilk ortaya atan Hausdorff'tur. Yıl 1908.

ZFC, bunun da doğruluğuna (elbette!) ya da yanlışlığına karar veremiyor (Gödel-1938 ve Cohen-1963).

Öte yandan, ZF ve GSH, Seçim Aksiyomu'nu kanıtlayabiliyor. Bunu Polonyalı matematikçi/kümeler kuramcısı Sierpinski kanıtlamıştır.

GSH kardinal aritmetiği oldukça kolaylaştırır:

$$\omega_\alpha^{\omega_\beta} = \begin{cases} \omega_{\beta+1} & \text{eğer } \alpha \leq \beta + 1 \\ \omega_\alpha & \text{eğer } \beta + 1 < \alpha \text{ ve } \omega_\beta < \text{cf}(\omega_\alpha) \\ \omega_{\alpha+1} & \text{eğer } \beta + 1 < \alpha \text{ ve } \omega_\beta \geq \text{cf}(\omega_\alpha) \end{cases}$$

Bunu okura alıştırmaya bırakıyoruz. (Bkz. Bölüm 35.3)

36.1. Gödel'in Teoremi

1900'deki ünlü Paris konferansında Hilbert, yaşadığı çağa göre anlaşılır bir iyimserlikle, matematikçilerden matematiğin çelişkisiz olduğunu kanıtlamalarını istemiştir. (Hilbert'in ikinci sorusu.) Gödel de, 1931'de, toplama ve çarpma ile ilgili en temel aritmetiğin en temel özelliklerini ortaya çıkarabilecek güçte olan çelişkisiz bir kuramın kendisinin çelişkisiz olduğunu kanıtlayamayacağını göstererek Hilbert'in sorusunu olumsuz yanıtlamıştır. (Gödel'in **İkinci Eksiklik Teoremi**).

Gödel'in **Birinci Eksiklik Teoremi**, toplama ve çarpma ile ilgili en temel aritmetiğin en temel özelliklerini ortaya çıkarabilecek güçte olan ve hangi önermenin aksiyom olup olmadığını bir bilgisayar programının anlayabildiği çelişkisiz bir kuramda ne kendisinin ne de değilmesinin kanıtlanabildiği bir

önermenin olduğunu söyler. Pek sanılmıyor ama İkiz Asallar Sanısı ya da Goldbach Sanısı bu tür önermelerden olabilir.

1939'da Kurt Gödel, eğer ZF çelişkisizse, ZF'nin Seçim Aksiyomu'nu yanlışlayamayacağını kanıtladı. Gene Paul Cohen ve gene 1963'te, eğer ZF çelişkisizse, ZF'nin Seçim Aksiyomu'nu kanıtlamayacağını kanıtladı. Demek ki Seçim Aksiyomu da ZF'den bağımsızdır.

36.2. Gödel ve Süreklilik Hipotezi

Gödel, Süreklilik Hipotezi'nin (SH) yanlış olduğunun kanıtlanamayacağını göstermesine karşın gene de SH'nin yanlış olduğunu sanıyordu. Kanıtlanabilmekle doğru olmak iki ayrı kavramdır. Bir önerme, kümeler kuramının bir modelinde (yani kümeler kuramının aksiyomlarının doğru olduğu bir evrende) doğru olabilir ama kanıtlanamayabilir.

Ama ZFC'nin bir modelinin varlığını ZFC kanıtlayamaz, yoksa ZFC kendisinin çelişkisiz olduğunu kanıtlardı (çünkü çelişkili kuramların modelleri olamaz elbette).

Bu durumda Gödel'in SH'nin yanlış olduğuna inanması matematiksel olarak bir şey ifade etmez elbette. Gödel'in inancı tamamıyla felsefiydi. Gödel, Platonist bir görüşe sahip olduğundan, tüm bu kavramların bir yerlerde var olduğunu ve kümeler kuramının bir modelinin bizim algılayamadığımız bir seviyede var olduğuna inanıyordu. Gödel'e göre SH işte o evrende yanlıştır/yanlış olmalıdır.

Gödel'e göre, ZFC'nin SH'yi yanlışlayamamasının nedeni, ZFC'nin yaşadığımız dünyayı/evreni eksik betimlemesinden kaynaklanmaktadır. Yani aslında SH'nin yanlışlığı kanıtlanmalı, ama ne yazık ki ZFC matematiği yeterince betimlemiyor. Dolayısıyla Gödel'e göre Cantor'un SH'sini çürütecek yeni aksiyomlar bulunmalı.

Paul Cohen formalist (biçimci) olmasına karşın, o da SH'nin doğru olmaması gerektiğine inanıyordu.

36.3. Cohen ve Süreklilik Hipotezi

“Bu satırların yazarına göre, gün gelecek, SH'nin bariz biçimde yanlış olduğuna karar verilecek. Kümelere birer birer eleman ekleyerek tüm evreni kapsayacağımızı düşünmek deli saçması olduğundan, [sonludan daha büyük olan] sayılabilir sonsuzlukta bir kümenin varlığına inanmak zorundayız. Aynı şey daha büyük sonsuzluklar için de geçerli. Şimdi, ω_1 , çok özel bir kardinal: Sayılabilir ordinalerin kümesi ve sayılamaz sonsuzlukta bir ordinal bulmanın en kestirme yolu. Ama c (yani $2^\omega = |\mathbb{R}| = |\wp(\mathbb{N})|$), tam tersine, yepyeni ve çok daha güçlü bir ilkeyle, Altkümeler Kümesi Aksiyomu'yla bulunmuştur. ω 'dan yola çıkarak ve Yerleştirme Aksiyomu'nu kullanarak elde edilen bir kardinalin c 'ye ulaşacağını ummak akıl kârı bir şey değil. Demek ki c kardinali ω_n , ω_ω , ω_{ω_ω} ve benzerlerinden çok daha büyük olmalı. Bu bakış açısına göre, c , bize gözüpük bir aksiyom tarafından verilmiş, inanılmaz zenginlikte bir kardinaldir ve peyderpey inşa edilemez. Belki gelecek kuşaklar problemi daha net bir biçimde görüp kendilerini daha iyi ifade edeceklerdir.”

Paul Cohen