35. Sonsuz Kardinallerin Sıralanması (Alefler) ve Kofinalite

ω'nın ilk sonsuz kardinal olduğunu biliyoruz, hatta bu olguyu daha da gözler önüne sermek için, ω yerine ω_0 bile yazmıştık. Geçen bölümlerin birinde ikinci sonsuz kardinal ω_1'i de gördük. Hatta her n doğal sayısı için n'inci sonsuz kardinal ω_n'yi de tanımladık. Ve bir yerde de ω'ıncı sonsuz kardinal ω_ω'yı da fısıldadık.

Bu bölümde, her α ordinali için "α'ıncı sonsuz kardinal"i tanımlayacağız ve her sonsuz kardinalin belli bir α ordinali için "α'ıncı sonsuz kardinal" olduğunu göreceğiz.

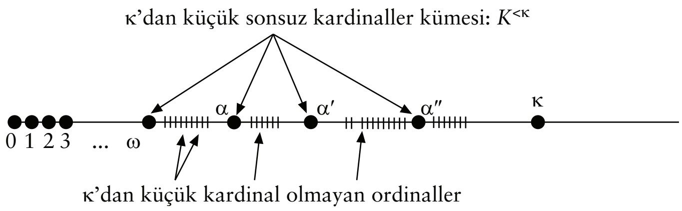
Konuya şöyle de bir giriş yapabilirdik: Her kardinal bir ordinal olduğundan, sonsuz kardinallerden oluşan herhangi bir küme, ordinallerin sıralamasıyla doğal olarak iyisıralanır. Tüm sonsuz kardinaller de, küme oluşturmasalar da, iyisıralanmışlardır. Bu bölümde, sonsuz kardinallerin işte bu doğal (ve iyi!) sıralamasını yakından irdeleyeceğiz.

35.1. Sonsuz Kardinalin Ordinal Sırası

Sonsuz bir κ kardinali verilmiş olsun.

$$K^{<\kappa} = \{\lambda < \kappa : \lambda \text{ sonsuz kardinal}\}$$

kümesini ele alalım. $K^{<\kappa}$, κ ordinalinin bir altkümesi olduğundan, κ'nın ordinal sıralamasıyla iyisıralanır, dolayısıyla $K^{<\kappa}$ iyisıralı bir

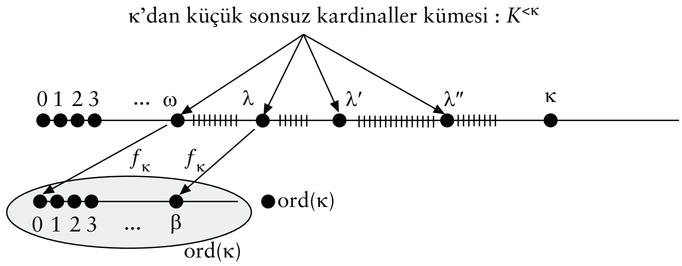


küme olarak bir ve bir tek ordinalle eşyapısaldır. Bu ordinale ord(κ) diyelim. Demek ki sıralı küme olarak,

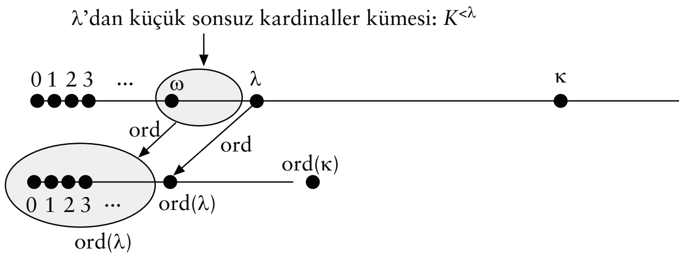
$$K^{<\kappa} \approx \mathrm{ord}(\kappa).$$

Bu ≈ simgesi, iki küme arasında sadece bir eşleme olduğunu söylemiyor, daha fazlasını söylüyor, iki sıralı küme arasında sıralamayı koruyan bir eşleme (izomorfizma) olduğunu söylüyor.

Ayrıca, $K^{<\kappa}$ kümesinden ord(κ) ordinaline giden bir tek eşyapı eşlemesi olduğunu da biliyoruz (Teorem 12.1). Bu eşyapı eşlemesine f_κ diyelim diyeceğim ama f_κ elbette (tanım kümesi üzerinde) ord'a eşit!

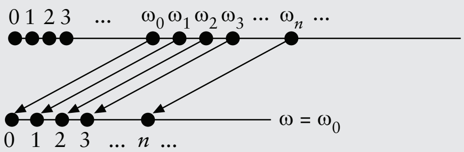


Yani λ'dan küçük sonsuz kardinaller kümesi, $f_\kappa(\lambda)$'dan küçük ordinaler kümesiyle (yani $f_\kappa(\lambda)$'yla) eşyapısal. Bu çok bariz olgunun doğruluğu yukardaki şekilden de hemen anlaşılıyor. Demek ki $f_\kappa(\lambda)$ = ord(λ) ve f_κ yazılımına gerek yok, f_κ yerine ord kullanabiliriz.



Örneğin, $K^{<\omega} = \emptyset$ ve dolayısıyla $\mathrm{ord}(\omega) = 0$. Ama eğer $\kappa > \omega$ ise, o zaman $0 \in \mathrm{ord}(\kappa)$, yani $0 < \mathrm{ord}(\kappa)$, elbette! Daha ilginç örneklerimiz de var:

Bölüm 34'te her n doğal sayısı için ω_n sonsuz kardinalini tanımlamıştık. Elbette $\mathrm{ord}(\omega_n) = n$ olur, yani ω_n, gerçekten de n'inci sonsuz kardinaldir.



Geçen bölümde $\omega_0 = \omega$ ve $\omega_{n+1} = \omega_n^+$ olarak tanımlanmıştı. Aynı yerde ω_ω kardinalin ω_n kardinallerinin birleşimi olarak tanımlamıştık. Bu bölümde $\omega_{\omega+1}$ kardinalini ω_ω^+ olarak tanımlayacağız ve böylece devam edeceğiz.

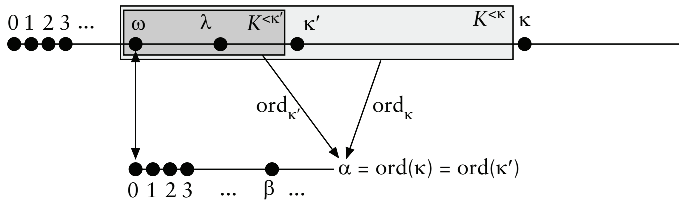
Şimdi dikkat, çok ilginç bir şey geliyor: $\mathrm{ord}(2^\omega)$'nın kaç olabileceğinin bilinmemesi ve hiçbir zaman da bilinemeyecek olması (bu bilinemezlik kanıtlanmıştır) son derece ilginçtir. Birkaç bölüm ötede bu ilginç konuyu daha ayrıntılı ele alacağız.

$\mathrm{ord}(\kappa)$, bir anlamda değil, birazdan göreceğimiz üzere tam anlamıyla, κ kardinalinin sonsuz kardinaller topluluğunun içindeki sırasıdır: κ'ya $\mathrm{ord}(\kappa)$-ıncı sonsuz kardinal diyebiliriz, ilerde diyeceğiz de. Ama bunu iç rahatlığıyla diyebilmemiz için, her α ordinali için bir α-ıncı kardinalin olması gerektiği gibi, iki değişik sonsuz κ kardinalinin aynı $\mathrm{ord}(\kappa)$'yı da vermemesi gerekir.

Önce iki değişik κ ve κ' kardinalinin aynı ordinali veremeyeceğini kanıtlayalım. Daha iyisini de kanıtlayabiliriz: ord artar.

Önsav 35.1. $\kappa' < \kappa$ *iki sonsuz kardinalse*, $\mathrm{ord}(\kappa') < \mathrm{ord}(\kappa)$ *dır*.

Kanıt: İki κ ve κ' sonsuz kardinal için $\kappa' < \kappa$ eşitsizliğini varsayalım. $K^{<\kappa'}$, elbette $K^{<\kappa}$ iyisıralamasının bir başlangıç dilimidir. $K^{<\kappa}$'dan $\mathrm{ord}(\kappa)$'ya giden eşyapı eşlemesini ord olarak değil de bu kanıtlık ord_κ olarak gösterelim. $\mathrm{ord}_{\kappa'}$ aynı biçimde tanımlansın. Dolayısıyla



$\mathrm{ord}_{\kappa'}(K^{<\kappa'}) = \mathrm{ord}(\kappa')$, $\mathrm{ord}_{\kappa}(K^{<\kappa}) = \mathrm{ord}(\kappa)$'nın bir başlangıç dilimidir. Demek ki $\mathrm{ord}(\kappa') \leq \mathrm{ord}(\kappa)$. Eşitlik olduğunu varsayalım: $\alpha = \mathrm{ord}(\kappa') = \mathrm{ord}(\kappa)$. olsun. Ama şimdi,

$$\mathrm{ord}_{\kappa'}^{-1} \circ \mathrm{ord}_{\kappa}$$

fonksiyonu, $K^{<\kappa}$ ile $K^{<\kappa'}$ arasında bir eşyapı eşlemesi oldu. $K^{<\kappa'}$, $K^{<\kappa}$ iyisıralamasının bir başlangıç dilimi olduğundan, bundan $K^{<\kappa'} = K^{<\kappa}$ çıkar [Önsav 7.5]. Ama κ ve κ′, sırasıyla, $K^{<\kappa}$ ve $K^{<\kappa'}$ kümelerindeki kardinallerin hepsinden daha büyük olan kardinallerin en küçüğüdür. Demek ki $\kappa' = \kappa$, bir çelişki. □

35.2. α'ıncı Ordinal ω_α

Şimdi her α ordinali için, α-ıncı sonsuz kardinali tanmlayacağız, yani öyle bir ω_α sonsuz kardinali bulacağız ki, $\mathrm{ord}(\omega_\alpha) = \alpha$ olacak. Ama bunun böyle olduğunu uzun süren bir tanım devresinden sonra kanıtlayacağız.

α herhangi bir ordinal olsun. α'ıncı ω_α sonsuz kardinalini α üzerine tümevarımla şöyle tanımlayalım (daha doğrusu tanımlamaya kalkışalım, tanımda bazı ince narin sorunlarla karşılaşacağız):

- Eğer $\alpha = 0$ ise, $\omega_0 = \omega$ olsun.
- Eğer α bir limit ordinal değilse, yani bir β ordinali için $\alpha = \beta + 1$ ise, o zaman,

$$\begin{aligned}\omega_\alpha &= \omega_\beta^{+}\\ &= \omega_\beta\text{'dan büyük ilk kardinal}\\ &= \omega_\beta\text{'dan büyük kardinallerin en küçüğü olsun.}\end{aligned}$$

- Eğer α bir limit ordinalse, o zaman, ω_α,

$$\omega_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \omega_\beta$$

olarak tanımlansın.

Şimdi okura tuhaf gelebilecek bir teorem kanıtlayacağız, ama aksiyomatik kümeler kuramının tüm inceliği böyle bir teorem kanıtlama gereksinimin hissedilmesinde yatar. Matematiksel olarak kanıtın pek bir önemi yoksa da felsefi açıdan önemlidir. Dileyen okur, aşağıdaki oldukça uzun sayılabilecek kanıtı, daha doğrusu kanıt taslağını atlayıp üç yıldızlı (✶✶✶) yerden devam edebilir.

Teorem 35.2. ω_α *kardinali gerçekten vardır.*

Teoremin ne demek istediğini kanıtı vermeden anlatmak oldukça zor. Yukardaki tanımda, her α ordinali için ω_α'nın gerçekten bir kardinal olduğunu kanıtlamak gerekiyor. Sorun, yukarda tanımlanmaya çalışılan ω_α'nın bir kardinal olup olmasından öte bir küme olup olmasında yatıyor.

Kanıt Taslağı: Teoremi α üzerinden tümevarımla kanıtlamaya kalkışacağız.

Eğer $\alpha = 0$ ise, $\omega_0 = \omega$ olarak kanıtlanmıştır ve ω diye bir kardinal var!

Eğer α bir limit ordinal değilse, yani bir β ordinali için $\alpha = \beta + 1$ ise, o zaman, tümevarım varsayımına göre ω_β tanımlanmıştır. Dolayısıyla, $\omega_\alpha = \omega_\beta{}^+$ kardinali de tanımlanmıştır.

Şimdi $\alpha > 0$ bir limit ordinal olsun. (Burada sorun yaşayacağız.) Tümevarım varsayımına göre, her $\beta < \alpha$ için ω_β kardinali tanımlanmıştır. Dolayısıyla $\omega_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \omega_\beta$'dan sözedebiliriz. Ayrıca, bir kardinal kümesinin bileşiminin de kardinal olduğunu bildiğimizden [Teorem 32.4], ω_α bir kardinaldir.

Yukardaki kanıtta bir sorun var. $\bigcup_{\beta<\alpha} \omega_\beta$ kardinaller topluluğunun bir küme olduğunu kanıtlanmadı. Ama eğer $\{\omega_\beta : \beta < \alpha\}$ topluluğunun bir küme olduğunu kanıtlayabilirsek, o zaman, ZF aksiyom sistemine göre bu kümenin elemanlarının bileşimi olan $\bigcup_{\beta<\alpha} \omega_\beta$ topluluğu da bir küme (dolayısıyla da bir kardinal) olur.

Bu yaklaşımla $\{\omega_\beta : \beta < \alpha\}$ topluluğunun bir küme olduğunu kanıtlayamayız. Bambaşka bir yaklaşım gerekiyor. Yukarda yaptığımız ω_β tanımını unutun. Her şeye sil baştan başlıyoruz. Başarıya ulaşmamız için Yerleştirme Aksiyomu'nu esaslı bir biçimde kullanmamız gerekiyor.

Aşağıdaki kanıtı okumadan önce, okurun, hazırlık olarak Bölüm 34'ü okumasını salık veririz.

Öyle bir $\varphi(\alpha, \kappa)$ formülü bulacağız ki,

1) Her α ordinali için, $\varphi(\alpha, \kappa)$ formülü tek bir κ kardinal sayısı için doğru olacak.

2) $\varphi(0, \omega)$ doğru olacak.

3) $\varphi(\beta, \kappa)$ doğruysa $\varphi(\beta+1, \kappa^+)$ da doğru olacak.

4) Eğer α bir limit ordinalse ve her $\beta < \alpha$ için, $\varphi(\beta, \omega_\beta)$ formülü doğruysa, o zaman $\varphi(\beta, \bigcup_{\beta<\alpha} \omega_\beta)$ doğru olacak. (Dikkat: Buradaki ω_β'nın daha önce başarısız bir şekilde tanımlanmaya çalışılmış olan ω_β ile bir ilgisi yoktur. Buradaki ω_β, $\varphi(\beta, \kappa)$ formülünü doğru kılan yegâne κ kardinalidir.)

Bütün bunlardan sonra, ω_α,'yı, $\varphi(\alpha, \kappa)$ formülünü doğru kılan yegâne κ kardinali olarak tanımlayacağız. Elbette, böylece tanımlanan ω_α dilediğimiz,

- $\omega_0 = \omega$,
- $\omega_{\alpha+1} = {\omega_\alpha}^+$,
- Eğer α bir limit ordinalse, $\omega_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \omega_\beta$ özelliklerini sağlayacak.

$\varphi(\alpha, \kappa)$ formülü şunları desin: α bir ordinaldir ve eğer $\alpha = 0$ ise $\kappa = \omega$ olur ve eğer $\alpha \neq 0$ ise, öyle bir kardinaller kümesi X ve bir $f : \alpha \to X$ örten fonksiyonu vardır ki,

a. $f(0) = \omega$, ve

b. $\beta + 1 < \alpha$ ise $f(\beta + 1) = f(\beta)^+$, ve

c. $\beta < \alpha$ bir limit ordinalse $f(\beta) = \bigcup_{\gamma < \beta} f(\gamma)$, ve

d. X'in en büyük bir δ elemanı varsa $\kappa = \delta^+$, ve

e. X'in en büyük elemanı yoksa $\kappa = \bigcup X$.

Bunların hepsini kümeler kuramının bir formülüyle söylemek mümkündür.

Eğer $\varphi(\alpha, \kappa)$ formülü doğruysa, $f(\alpha) = X$ bir sonsuz kardinaller kümesi olmalı, f artan bir fonksiyon yani bir eşyapı eşlemesi olmalı ve son iki koşuldan dolayı X, κ'dan küçük sonsuz kardinaller kümesi olmalı. Bütün bunlar tümevarımla kanıtlanabilir.

Şimdi her α ordinali için $\varphi(\alpha, \kappa)$ formülünün yukarda sıraladığımız 1, 2, 3 ve 4 özelliklerine sahip olduğunu kanıtlamak gerekiyor. Bu, α üzerinden tümevarımla şöyle yapılabilir. $\alpha = 0$ şıkkı tanımdan hemen çıkıyor. $\alpha = \beta + 1$ şıkkı da oldukça kolay. Asıl zorluk α limit olduğunda. Ama bu durumda da Yerleştirme Aksiyomu hızır gibi imdadımıza yetişiyor. Tümevarımla her $\beta < \alpha$ için $\varphi(\beta, \kappa)$'nın doğru olduğu bir ve bir tek κ vardır. Bu κ'ya ω_β diyelim. Yerleştirme Aksiyomu'na göre $\{\omega_\beta : \beta < \alpha\}$ bir kümedir. Şimdi $\omega_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} \omega_\beta$ olsun. Artık, $\varphi(\kappa, \omega_\alpha)$ formülünün doğru olduğu, ω_α'nın $\varphi(\alpha, \kappa)$'yı doğru kılan tek kardinal olduğu ve (4)'ü sağladığı oldukça kolay biçimde kanıtlanabilir. Ayrıntıları okura bırakıyoruz. □

Alıştırma. Yukardaki inceliği kavramış olan okur kendini şu alıştırmayla sınasın. A herhangi bir küme olsun.

$\wp_0(A) = A$ olsun. Her n doğal sayısı için,

$$\begin{aligned}\wp_{n+1}(A) &= \wp(\wp_n(A)) \\ &= \wp_n(A)\text{'nın altkümeler kümesi}\end{aligned}$$

tanımını yapalım.

$$\{\wp_n(A) : n \in \omega\}$$

topluluğunun bir küme olduğunu gösterin. Yukardaki kanıtta yaptığımız gibi, $\wp_n(A)$'nın tanımını bir formülle yapmalısınız ve Yerleştirme Aksiyomu'nu kullanmalısınız.

Eğer α bir ordinalse, $\wp_\alpha(A)$ kümesini tümevarımla şöyle tanımlayalım:

$$\wp_0(A) = A \text{ ve } \wp_{\alpha+1}(A) = \wp(\wp_\alpha(A))$$

ve eğer α bir limit ordinalse,

$$\wp_\alpha(A) = \bigcup_{\beta<\alpha} \wp_\beta(A)$$

olsun. Bu tanımdaki sorunu kavrayıp, aynı kavramı sorunsuz biçimde tanımlayın.

***

Yukarda, ord'un artan olduğunu kanıtlamıştık. α ordinalini ω_α sonsuz kardinaline götüren "şey"in de artan olduğu, yani $\alpha < \beta$ ordinalleri için $\omega_\alpha < \omega_\beta$ eşitsizliği kolaylıkla kanıtlanabilir.

ω_α'lar üzerine daha zor bir şey kanıtlamadan önce, oldukça basit ama birazdan kilit noktada yararlanacağımız bir önsav kanıtlayalım:

Önsav 35.3. *Her* α *ordinali için*, $\omega_\alpha \geq \alpha$.

Kanıt: Elbette $\omega_0 > 0$. Eşitsizliğin α için doğru olduğunu varsayıp eşitsizliği $\alpha + 1$ için kanıtlayalım: $\omega_{\alpha+1} = \omega_\alpha^+ > \omega_\alpha + 1 \geq \alpha + 1$. Burada, $\omega_\alpha + 1$'deki toplama ordinal toplamasıdır ve $\omega_\alpha + 1$ ordinal olarak görülmelidir; kullanılan $\omega_\alpha^+ > \omega_\alpha + 1$ eşitsizliği $\omega_\alpha^+ > \omega_\alpha$ eşitsizliğinden ve Sonuç 31.1'den çıkar. Şimdi α bir limit ordinal olsun ve eşitsizliğin α'dan küçük β ordinalleri için doğru olduğunu varsayalım. O zaman, her $\beta < \alpha$ için, $\beta \leq \omega_\beta < \omega_\alpha$ olur ve bundan da $\alpha \leq \omega_\alpha$ çıkar. □

Dikkat: Yukardaki önsavda $\leq$ yerine katı eşitsizlik alınamaz. Kanıtlamaya çalışın, beceremeyeceksiniz. Beceremediğinize göre "mutlaka" bir karşıörnek vardır. İşte karşı örnek: ω, ω_ω, ω_{ω_ω}, ... kardinallerinin bileşimi böyle bir karşıörnektir.

$\alpha \mapsto \omega_\alpha$ şeyinin artan, dolayısıyla birebir olduğunu biliyoruz. Şimdi bu şeyin örten olduğunu kanıtlayalım:

Teorem 35.4. *Tüm sonsuz kardinaller* ω_α *biçiminde yazılırlar. Yani her sonsuz* κ *kardinali için*, $\omega_\alpha = \kappa$ *eşitliğini sağlayan bir* (*ve bir tane*) α *ordinali vardır. Dolayısıyla, eğer* α *bir ordinalse*,

$$\beta \mapsto \omega_\beta$$

kuralıyla tanımlanmış fonksiyon, α*'dan*

$$K^{<\omega_\alpha} = \{\lambda < \omega_\alpha : \lambda \text{ sonsuz kardinal}\}$$

kümesine giden birebir, örten ve sıralamayı koruyan bir fonksiyondur, yani bir eşyapı eşlemesidir.

Kanıt: κ sonsuz bir kardinal olsun. Önermeyi κ üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. Eğer $\kappa = \omega$ ise $\alpha = 0$ olur. Şimdi teoremin κ için doğru olduğunu varsayıp teoremi κ^+ için kanıtlayalım. Bir α ordinali için, $\kappa = \omega_\alpha$ olsun. O zaman,

$$\kappa^+ = (\omega_\alpha)^+ = \omega_{\alpha+1}.$$

Şimdi κ bir limit kardinal olsun ve teoremin κ'dan küçük sonsuz kardinaller için doğru olduğunu varsayalım.

$$\beta = \{\alpha : \alpha \text{ ordinal ve } \omega_\alpha < \kappa\}$$

tanımını yapalım. Önsav 35.3'e göre, β'daki her ordinal κ'dan küçük olmak zorunda. Demek ki,

$$\beta = \{\alpha < \kappa : \omega_\alpha < \kappa\}.$$

Dolayısıyla β bir kümedir ve bir ordinaller kümesidir. Ayrıca, $\alpha \mapsto \omega_\alpha$ artan olduğundan, β, (kardinal olan ama ayrıca ordinal de olan) κ'nın bir başlangıç dilimidir. Demek ki β bir ordinaldir [Teorem 10.8]. Şimdi, hesaplarımıza başlayalım:

$$\kappa = \bigcup_{\lambda<\kappa} \lambda = \bigcup_{\alpha\in\beta} \omega_\alpha = \bigcup_{\alpha<\beta} \omega_\alpha.$$

Burada, ikinci eşitlik, tümevarım varsayımından çıkar.

Eğer β bir limit ordinal değilse, o zaman β'nın bir en büyük elemanı vardır, diyelim γ. Bu durumda, $\alpha \mapsto \omega_\alpha$ artan olduğundan, $\bigcup_{\alpha<\beta} \omega_\alpha = \omega_\gamma$ eşitliği geçerlidir ve kanıt tamamlanmıştır. Eğer β bir limit ordinalse, ω_β'nın tanımından dolayı, bu sefer $\bigcup_{\alpha<\beta} \omega_\alpha = \omega_\beta$ eşitliği geçerlidir ve kanıt gene tamamlanmıştır.

İkinci önerme birincisinden hemen çıkar. □

Sonuç 35.5. α *bir ordinal olsun.* ord, $K^{<\omega_\alpha}$ *kümesinden* α*'ya giden bir eşyapı eşlemesidir ve* $\beta \mapsto \omega_\beta$ *kuralıyla tanımlanmış fonksiyonun tersidir*: *Her* β *ordinali ve sonsuz* κ *kardinali için*,

$$\mathrm{ord}(\omega_\beta) = \beta \text{ ve } \omega_{\mathrm{ord}(\kappa)} = \kappa.$$

Kanıt: ord, $K^{<\omega_\alpha}$ kümesiyle $\mathrm{ord}(\omega_\alpha)$ ordinali arasındaki yegâne eşyapı eşlemesidir. Ayrıca $\mathrm{ord}(\omega_\alpha)$ ordinali böyle bir eşyapı eşlemesi olan yegâne ordinaldir (Teorem 12.1). Teorem 35.4'ten dolayı $\mathrm{ord}(\omega_\alpha) = \alpha$. Şimdi

$$\beta \mapsto \mathrm{ord}(\omega_\beta)$$

kuralıyla tanımlanmış fonksiyon, α'dan α'ya giden bir eşyapı eşlemesidir. Demek ki $\mathrm{ord}(\omega_\beta) = \beta$. Aynı şekilde $\omega_{\mathrm{ord}(\kappa)} = \kappa$ eşitliği kanıtlanabilir. □

Kardinal sayısı olarak görüldüğünde, ω_α'yı $\aleph_\alpha$ (alef) olarak yazmak bir gelenektir. Alef, İbrani alfabesinin elifi, yani ilk harfidir.

35.3. Kofinalite

α ve β birer ordinal, $f : \alpha \to \beta$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $\delta < \beta$ için, $f(\gamma) \geq \delta$ eşitsizliğini sağlayan bir $\gamma < \alpha$ elemanı varsa, f'ye ***sonsuza gider*** ya da (β'da) ***kofinal*** diyeceğiz. Eğer $\beta = \delta^+$ ise, f'nin sonsuza gitmesi, f'nin δ değerini alması demektir. Eğer β limitse, bu, $\bigcup_{\gamma\in\alpha} f(\gamma) = \beta$ demektir.

Örneğin $\mathrm{Id}_\beta : \beta \to \beta$ fonksiyonu sonsuza gider. Daha hoş bir örnek, $f(n) = \omega_n$ kuralıyla tanımlanmış $f : \omega \to \omega_\omega$ fonksiyonu sonsuza gider. Bu son örnekte ω, sonsuza giden bir $\alpha \to \omega_\omega$ fonksiyonunun olduğu en küçük α ordinalidir. Sonsuza giden bir $f : \alpha \to \beta$ fonksiyonunun olduğu en küçük ordinale, β'nın ***kofinalitesi*** adı verilir ve bu ordinal $\mathrm{cf}(\beta)$ olarak yazılır.

$$\mathrm{cf}(\beta) = \min\{\alpha : \exists\ f : \alpha \to \beta \text{ ve } \textstyle\bigcup_{\delta\in\alpha} f(\delta) = \beta\}.$$

Kolayca görüleceği üzere, kofinalite, 0, 1 ya da sonsuz bir kardinal olmak zorundadır.

Elbette $\mathrm{cf}(\beta) \leq \beta$. Ve elbette $\mathrm{cf}(0) = 0$, ama diğer sonlu sayıların ve limit olmayan ordinallerin kofinalitesi 1'dir; elbette. $\mathrm{cf}(\omega) = \mathrm{cf}(\omega_\omega) = \mathrm{cf}(\omega_{2\omega}) = \mathrm{cf}(\varepsilon_0) = \omega$ eşitliklerini kanıtlamak çok kolay. Öte yandan $\mathrm{cf}(2^\omega) > \omega$ eşitsizliği kanıtlanabilir. Bu da (ZFC'de) $2^\omega \neq \omega_\omega$ eşitsizliğini kanıtlar.

2^ω'nın kofinalitesinin sayılamaz olan herhangi bir kardinal olabileceği ZFC'yle tutarlıdır. Örneğin, 2^ω'nın kofinalitesi 2^ω da olabilir.

ω_1'in kofinalitesinin ω'dan büyük olduğunu kanıtlamak çok kolaydır: ω_1'in her elemanı sayılabilir olduğundan, eğer ω_1'in kofinalitesi sayılabilir olsaydı, sayılabilir sayıda sayılabilir kümenin bileşimi olarak yazılacağından, ω_1 sayılabilir bir küme olurdu.

Kofinalitesine eşit bir ordinale ***düzgün*** ordinal adı verilir. Düzgün olmayan ordinallere de ***tekil*** denir. Örneğin ω_ω tekildir. Her α için $\omega_{\alpha+1}$ kardinalinin düzgün olduğu gösterilebilir. Demek ki her pozitif n doğal sayısı için, ω_n düzgün bir ordinaldir.

Her α için, $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha)) = \mathrm{cf}(\alpha)$ eşitliğini de göstermek pek zor değildir. Demek ki $\mathrm{cf}(\alpha)$, düzgün bir ordinaldir.

Eğer β bir limit ordinalse, $\mathrm{cf}(\beta)$, β'dan küçük kardinallerden oluşan ve toplamı β olan kümelerin olası en küçük kardinalitesidir:

$$\mathrm{cf}(\beta) = \min\{|I| : \Sigma_{i\in I} \lambda_i = \beta \text{ ve } \lambda_i < \beta\}.$$