33. Kardinal Sayılarıyla İşlemler

Bu bölümde, α ve β kardinal sayıları için, örneğin, $\alpha + \beta$ adını vereceğimiz bir kardinal sayısını, "α ve β'nın toplamı"nı tanımlayacağız.

Aslında amaç iki kardinalin toplamını tanımlamak değildir, olamaz da, çünkü en yaygın ve saygın matematiksel tanımlar bir gereksinim sonucu ve doğal olarak ortaya çıkarlar, oysa iki kardinalin toplamı diye bir işleme gereksinim duymadık şimdiye dek. Durduk yerde yapay tanım yapmayalım.

Zaten her kardinal sayı bir ordinal sayı olduğundan ve ordinal sayıları toplamayı bildiğimizden, durduk yerde kardinal sayıları yeniden toplamanın bir anlamı olamaz.

Amaç, iki kardinal sayıyı toplamaktan ziyade, iki kümenin bileşiminin eleman sayısını bulmaktır, yani A ve B kümeleri verilmişse, $A \cup B$ kümesinin "eleman sayısı" olarak algıladığımız $|A \cup B|$ kardinal sayısını $|A|$ ve $|B|$ kardinalleri cinsinden bulmaktır. Bu da son derece anlaşılır ve sempatik bir amaçtır.

Eğer A ve B kümeleri sonluysa, $A \cup B$ kümesinin eleman sayısı $A \cap B$ kesişimine göre değişir elbet; genel formül şöyle:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

$A \cap B$ kümesi ne kadar küçükse $A \cup B$ kümesi o kadar büyük olur. Sonuç, $\max\{|A|, |B|\}$ ile $|A| + |B|$ arasında değişir. Örneğin

A'nın 5, B'nin 7 elemanı varsa, bileşimin en az 7 (A'nın B'nin altkümesi olduğu durum), en çok 12 (A ve B'nin ayrık oldukları durum) tane elemanı vardır.

İlginçtir, birazdan kantlayacağımız üzere, eğer A ve B kümelerinden en az biri sonsuzsa, $A \cup B$ kümesinin eleman sayısı $A \cap B$ kesişimine göre değişmez; kesişim ne olursa olsun hep aynı kardinal sayısı, $\max\{|A|, |B|\}$ bulunur. Bunu şimdilik kabul edelim. O zaman, sonlu durumla benzerlik kurarak, $|A|$ ya da $|B|$ kardinallerinin en az biri sonsuzsa,

"$|A| + |B| = \max\{|A|, |B|\}$ eşitliği sağlanır"

diyebilmek istiyoruz. Kardinal toplamasını bu eşitlik sağlanacak biçimde biçimsel olarak şöyle tanımlayabilirdik:

$$|A| + |B| = \begin{cases} \text{bilinen toplam} & \text{eğer } A \text{ ve } B \text{ sonluysa} \\ \max\{|A|, |B|\} & \text{eğer } A \text{ ya da } B \text{ sonsuzsa} \end{cases}$$

Ama bu yapay yolu tercih etmeyeceğiz. Daha doğal bir yol izlemek istiyoruz.

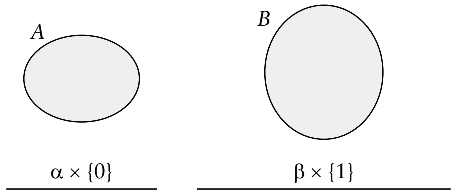
Kardinal toplamasıyla ordinal toplamasının karışmasını istemiyorsak, yukarda + yerine $\oplus$ işaretini kullanabilirdik. Ama bunu pek sık yapmayacağız. Yazılımı karmaşıklaştırmaktansa okurun kafasının karıştırmayı tercih ederiz!

Önsav 33.1. *Eğer A ve B ayrık kümelerse ve en az biri sonsuzsa, o zaman* $|A \cup B| = \max\{|A|, |B|\}$ *olur.*

Kanıt: Sonuç 31.3'ten dolayı A ve B kümelerinin her ikisinin birden sonsuz olduklarını varsayabiliriz. Ayrıca $|A| \leq |B|$ eşitsizliğini de varsayabiliriz. Demek ki, $|A \cup B| = |B|$ eşitliğini kanıtlamalıyız.

$|A| = \alpha$ ve $|B| = \beta$ olsun.

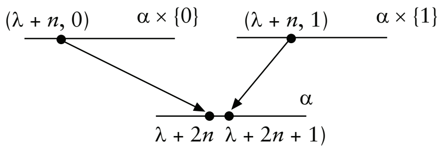
$|A| = \alpha = |\alpha \times \{0\}|$ ve $|B| = \beta = |\beta \times \{1\}|$ eşitliklerinden ve $\alpha \times \{0\}$ ve $\beta \times \{1\}$ kümelerinin ayrık olmalarından dolayı, A yerine $\alpha \times \{0\}$ ve B yerine $\beta \times \{1\}$ alabiliriz. Demek ki $(\alpha \times \{0\}) \cup (\beta \times \{1\})$ kümesiyle β arasında bir eşleme bulmalıyız.



Önce $\alpha = \beta$ özel durumunu ele alalım. Teorem 13.10'a göre, her $\gamma < \alpha$, bir λ limit ordinali ve bir n doğal sayısı için $\lambda + n$ olarak tek bir biçimde yazılır. Bu yazılımı kullanarak

$$(\alpha \times \{0\}) \cup (\alpha \times \{1\})$$

kümesiyle α arasında bir eşleme bulacağız. $\alpha \times \{0\}$'ın, bir λ limit ordinali ve bir n doğal sayısı için $(\lambda + n, 0)$ olarak yazılan bir elemanını α'nın $\lambda + 2n$ elemanına ve $\alpha \times \{1\}$'in, bir λ limit ordinali ve bir n doğal sayısı için $(\lambda + n, 1)$ olarak yazılan bir elemanını α'nın $\lambda + 2n + 1$ elemanına yollayalım.



Böylece $(\alpha \times \{0\}) \cup (\alpha \times \{1\})$ kümesiyle α arasındaki aradığımız eşlemeyi buluruz. Bu fonksiyonun görüntü kümesinin α olduğu, bir kardinal olan α'nın limit ordinal olmasından çıkar (Teorem 32.3). Örten ve birebir olduğu çok bariz.

Yukarda yaptığımızın tek ve çift ordinalleri tanımlamak olduğuna dikkatinizi çekerim. Ayrıca sonsuz bir α ordinali için, $|\alpha + \alpha| = |\alpha|$ eşitliği, yani $\alpha + \alpha \approx \alpha$ denkliği kanıtlandı. Bunu aklımızda tutalım, bu bir.

Şimdi $\alpha < \beta$ eşitsizliğini varsayalım. O zaman Önsav 13.5'e göre bir γ ordinali için $\beta = \alpha + \gamma$ eşitliği doğrudur. Bu iki.

Ordinallerin dilinde ifade edecek olursak, ordinal toplamasının tanımından dolayı, $(\alpha \times \{0\}) \cup (\beta \times \{1\})$ kümesiyle β arasında bir eşleme bulmak demek, $\alpha + \beta$ ordinaliyle β arasında bir eşleme bulmak demektir. Bu da üç.

Yukardaki bir, iki ve üç sayesinde kanıtımızı tamamlayabiliriz: $\alpha + \beta = \alpha + (\alpha + \gamma) = (\alpha + \alpha) + \gamma \approx \alpha + \gamma = \beta$. □

Şimdi ***kardinal toplamasını*** tanımlayabiliriz. Kardinal toplaması ordinal toplamasından değişik olduğundan, kardinalleri toplarken çok kısa bir süre + yerine ⊕ yazmayı yeğleyeceğiz:

$$\alpha \oplus \beta = \begin{cases} \text{bilinen toplam eğer } \alpha \text{ ve } \beta \text{ sonluysa} \\ \max\{\alpha, \beta\} \qquad \text{eğer } \alpha \text{ ya da } \beta \text{ sonsuzsa} \end{cases}$$

Eğer α ve β birer kardinal sayıysa, $\alpha \oplus \beta$, kardinaliteleri α ve β olan iki ayrık kümenin kardinalitesidir. Eğer α ve β sonlu kardinal sayılarıysa, yani birer doğal sayılarsa, bu tanım bize bildiğimiz doğal sayı toplamasını verir. Ama ikisinden beri sonsuzsa, o zaman hep $\max\{\alpha, \beta\}$ elde ederiz:

Artık ⊕ yerine + yazacağız. Umarız bu yazılım bir karışıklığa meydan vermez.

Bu tanımın sonucu olarak, kardinaller için derhal şu cebirsel eşitlikler elde edilir:

Önsav 33.2. α, β *ve* γ *birer kardinalse*, *o zaman*,

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha,$$
$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma,$$
$$\alpha \leq \beta \textit{ ise } \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma. \qquad \square$$

"Teorem" adına biraz daha yakışan bir önerme (çok daha yakışanlarını göreceğiz):

Teorem 33.3. *A ve B, en az biri sonsuz iki kümeyse,*

$$|A \cup B| = |A| + |B| = \max\{|A|, |B|\}$$

olur.

Kanıt: $|B| \leq |A|$ olsun. O zaman

$$|A| \leq |A \cup B| = |A \cup (B \setminus A)| = |A| + |B \setminus A|$$
$$= \max\{|A|, |B \setminus A|\} = |A|.$$

Demek ki her yerde eşitlik var. (En son eşitlikte Önsav 33.1'i kullandık.) □

Sonuç 33.4. *A ve B iki küme olsun. Eğer A sonsuzsa ve $|B| < |A|$ ise $|A \setminus B| = |A|$'dır.*

Kanıt: B yerine $A \cap B$ alarak, B'nin A'nın bir altkümesi olduğunu varsayabiliriz. O zaman,

$$|B| \neq |A| = |(A \setminus B) \cup B| = |A \setminus B| + |B| = \max\{|A \setminus B|, |B|\}.$$

Demek ki $|A \setminus B| = |A|$. □

33.1. Kardinal Sayılarının Çarpımları

Eğer α ve β iki kardinal sayıysa, α ve β'nın çarpımı $\alpha \times \beta$ kartezyen çarpımının kardinalitesi olarak tanımlanır:

$$\alpha \odot \beta = |\alpha \times \beta|.$$

Çarpmada, ordinal çarpmasıyla karışmasın diye $\odot$ imgesini kullanıyoruz. Nitekim, ordinal çarpmasında

$$\omega\omega = \omega^2 \neq \omega$$

olur (Önsav 14.5) ama kardinal çarpmasında

$$\omega \odot \omega = |\omega \times \omega| = \omega$$

olur çünkü sayılabilir sonsuzluktaki iki kümenin kartezyen çarpımı sayılabilir sonsuzluktadır. Biz gene de bu bölümlerde sadece kardinal çarpmasından sözedeceğimizden, $\alpha \odot \beta$ yerine, kolaylık olsun diye, kısaca $\alpha\beta$ yazacağız. Herhangi bir karışıklık olasılığı durumunda, ordinal toplamından mı yoksa kardinal toplamından mı sözettiğimizi özellikle belirteceğiz.

Eğer α ve β birer doğal sayıysa, bu, aynen ilkokullu yıllarımızda kâbuslarımıza giren çarpmadır. Bunun kolay kanıtını okura bırakıyoruz.

Önsav 33.5. *Her α, β, γ ve δ kardinal sayıları için,*

i. $\alpha 0 = 0$, $\alpha 1 = \alpha$,

ii. $\alpha\beta = \beta\alpha$,

iii. $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$,

iv. $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$,

v. $\alpha \leq \beta$ *ve* $\gamma \leq \delta$ *ise* $\alpha\gamma \leq \beta\delta$.

Kanıt: Bunların her biri işlemlerin tanımından doğrudan çıkar ve kanıtları son derece basittir, dolayısıyla okura bırakılmışlardır, ama kanıtı çok daha uzun olan bir sonraki teoremden de çıkarlar. □

Bir sonraki uzun kanıtlı teorem, aslında eğer α ve β'dan biri sonsuzsa toplamadan çok değişik bir kavram tanımlamadığımızı gösterecek:

Teorem 33.6. *Hiçbiri* 0 *olmayan* α ve β *kardinallerinden en az biri sonsuzsa*, $\alpha\beta = \max\{\alpha, \beta\}$*'dır*.

Kanıt: α'nın sonsuz olduğunu varsayalım. Eğer β sonluysa,

$$\begin{aligned}\alpha(\beta + 1) &= |\alpha \times (\beta + 1)| = |\alpha \times S(\beta)|\\ &= |\alpha \times (\beta \cup \{\beta\})| = |(\alpha \times \beta) \cup (\alpha \times \{\beta\})|\\ &= |\alpha \times \beta| + |\alpha \times \{\beta\}| = \alpha\beta + \alpha\end{aligned}$$

eşitliğinden, β üzerine tümevarımla $\beta \neq 0$ için $\alpha\beta = \alpha$ eşitliği kolaylıkla kanıtlanr. Önsav 33.5.iv varsayılırsa kanıt daha da sadeleşir: $\alpha(\beta + 1) = \alpha\beta + \alpha = \alpha + \alpha = \alpha$. (Son eşitlik Teorem 33.3'ten.)

Şimdi her ikisinin birden sonsuz olduğunu varsayalım. Kanıta başlamadan önce, eski sonuçlarımıza bir göz atalım. [SKK]'da $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$ eşlenikliği kanıtlamıştık ve kanıtı oldukça kolaydı. Ama aynı kitapta $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \approx \mathbb{R}$ eşlenikliğini kanıtlarken zorlanmıştık. Kanıt pek kolay değildi. Dolayısıyla bu teoremin de kanıtının kolay olmayabileceğini tahmin edebiliriz. Nitekim kanıt pek kolay değildir.

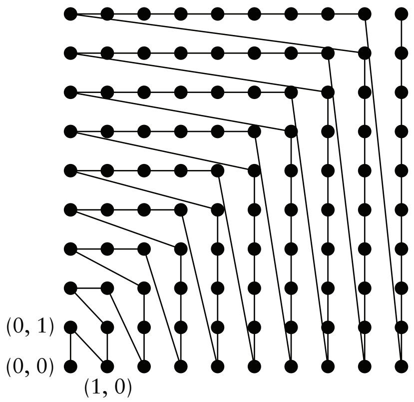
Önce $\alpha = \beta$ şıkkını ele alalım.

$\alpha\alpha = \alpha$ eşitliğini α üzerinden tümevarımla kanıtlayacağız. $\alpha = \omega$ durumunda kanıtı biliyoruz. Bundan böyle α'dan küçük her β kardinali için $\beta\beta = \beta$ eşitliğini varsayalım.

Şimdi $\alpha \times \alpha$ kartezyen çarpımı üzerine bir iyisıralama tanımlayacağız. $(\beta, \gamma), (\beta_1, \gamma_1) \in \alpha \times \alpha$ için, $(\beta, \gamma) \le (\beta_1, \gamma_1)$ ancak ve ancak

- $\max\{\beta, \gamma\} < \max\{\beta_1, \gamma_1\}$ ise, ya da
- $\max\{\beta, \gamma\} = \max\{\beta_1, \gamma_1\}$ ve $\beta < \beta_1$ ise, ya da
- $\max\{\beta, \gamma\} = \max\{\beta_1, \gamma_1\}$, $\beta = \beta_1$ ve $\gamma \le \gamma_1$ ise.

Bunun bir sıralama olduğunun (kolay) kanıtını okura bırakıyoruz. Ne tür bir sıralamadan sözedildiğini daha iyi kavrayabilmek için aşağıya sıralamayı açıklayacağını umduğumuz bir resim çizdik.



Sıralamayı izlemek için en alt sol köşedeki (0, 0)'dan başlayarak yolu takip edin: $(0, 0) < (0, 1) < (1, 0) < (1, 1) < (0, 2) < (1, 2) < (2, 0) < (2, 1) < (2, 2) < (0, 3) < (1, 3) < (2, 3) < (3, 0) < (3, 1) < (3, 2) < (3, 3) < \ldots$
Eğer $\alpha < \alpha_1 < \beta$ ise, $(\alpha, \beta) < (\alpha_1, \beta) < (\beta, \alpha) < (\beta, \alpha_1) < (\beta, \beta)$.

Bu sıralama, $\alpha \times \alpha$ kartezyen çarpımını iyisıralar. Nitekim eğer $A \subseteq \alpha \times \alpha$ boş olmayan bir altküme olsun. (Kanıtı bir sonraki şekilden izleyebilirsiniz.)

$$B = \{\max\{\beta, \gamma\} : (\beta, \gamma) \in A\}$$

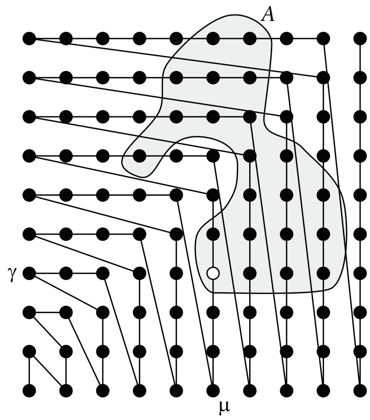
olsun. Boş olmayan bir ordinaller kümesi olduğundan, B'nin bir en küçük elemanı vardır. Bu elemana μ diyelim. Şimdi,

$$C = \{(\beta, \gamma) \in A : \max\{\beta, \gamma\} = \mu\}$$

olsun. (Aşağıdaki şekilde C'nin iki elemanı var.) C boşküme değildir. C'yi iki parçaya ayıralım:

$$D_1 = \{\beta : (\beta, \mu) \in C\}$$
$$D_2 = \{\gamma : (\mu, \gamma) \in C\}$$

Eğer $D_1 \neq \emptyset$ ise ve β, D_1'in en küçük elemanıysa, (β, μ), A'nın en küçük elemanıdır. Eğer (şekilde olduğu gibi) $D_1 = \emptyset$ ise o zaman $D_2 \neq \emptyset$'dir ve eğer γ, D_2'nin en küçük elemanıysa, (μ, γ),



A'nın en küçük elemanıdır.

Demek ki tanımladığımız $<$ ilişkisi $\alpha \times \alpha$ kartezyen çarpımını iyisıralar. Her iyisıralı küme bir ordinalle eşyapısal olduğundan, $(\alpha \times \alpha, <)$ iyisıralaması bir $(\beta, \in)$ ordinaliyle eşyapısaldır. Şimdi β'nın α'dan büyük olamayacağını kanıtlayacağız.

Diyelim β ordinali α'dan büyük. O zaman $\alpha \in \beta$ olmalı. f, $(\beta, \in)$ ordinalinden $(\alpha \times \alpha, <)$ iyisıralamasına giden bir eşyapı eşlemesi olsun (izomorfizma yani).

$$f(\alpha) = (\beta_0, \gamma_0) \in \alpha \times \alpha$$

olsun. f'nin α'ya kısıtlanmasına g diyelim:

$$g = f|_\alpha.$$

Demek ki g, α'dan

$$Y = \{(\beta, \gamma) \in \alpha \times \alpha : (\beta, \gamma) < (\beta_0, \gamma_0)\}$$

kümesine giden bir eşlemedir. Elbette $\alpha = |Y|$. Şimdi,

$$\delta_0 = \max\{\beta_0, \gamma_0\}$$

tanımını yapalım. α bir kardinal olduğundan ve δ_0, α'dan küçük olan β_0 ve γ_0 ordinallerinden birine eşit olmak zorunda olduğundan, $|\delta_0| < \alpha$. Tümevarım varsayımına göre $|\delta_0 \times \delta_0| = |\delta_0|$. Ama Y, $\delta_0 \times \delta_0$'nın bir altkümesi, dolayısıyla $\alpha = |Y| \leq |\delta_0| < \alpha$, bir çelişki. Demek ki β ordinali α'dan büyük olamaz. Bundan da

$$|\alpha| \leq |\alpha \times \alpha| = |\beta| \leq \alpha \text{ ve } |\alpha \times \alpha| = \alpha$$

çıkar.

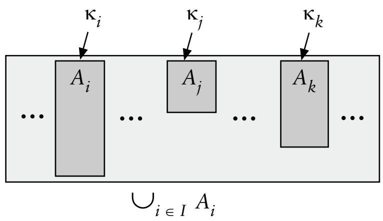
Şimdi, iki α ve β iki sonsuz kardinal sayısı olsun. $\beta \leq \alpha$ eşitsizliğini varsayalım. O zaman

$$\beta \leq \alpha\beta = |\alpha \times \beta| \leq |\beta \times \beta| = \beta.$$

Kanıt bitti[1]. □

33.2. Sonsuz Sayıda Kardinal Toplamı

Toplamanın tanımını sonlu sayıda kardinalin toplamından sonsuz sayıda kardinalin toplamına genellemek için dahi olmaya gerek yok. $(\kappa_i)_{i \in I}$ bir kardinal ailesi olsun. (Bu, bir I kümesinden bir kardinal kümesine giden örten bir κ fonksiyonu anlamına gelir. $i \in I$ için, i'nin imgesini κ_i olarak yazıyoruz.) Amacımız her birinin kardinalitesi κ_i olan ayrık A_i kümeleri bulmak ve $(\kappa_i)_{i \in I}$ kardinal ailesinin toplamını bu ayrık küme-

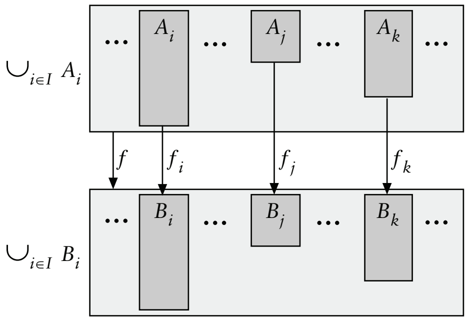


lerin bileşiminin kardinalitesi olarak tanımlamak. Okur, sonucun seçilen ayrık A_i kümelerinden bağımsız olduğunu düşünecektir muhtemelen. Böyle düşünen okur haklıdır ama bir dereceye kadar haklıdır, çünkü haklılığını kanıtlamak için Seçim

1 Bu kanıt ve bundan sonraki René Cori ve Daniel Lascar'ın Mathematical Logic, Oxford University Press 2001 (çeviren Donald H. Pelletier) adlı kitaptan alınmıştır. Sayfa 154-157.

Aksiyomu'na şiddetle ihtiyacı vardır.

Önsav 33.7 [ZFC]. $(A_i)_{i\in I}$ ve $(B_i)_{i\in I}$ *iki ayrık kümeler ailesi olsun. Eğer her* $i \in I$ *için* A_i *ve* B_i *eşlenik kümelerse o zaman*



$\bigcup_{i\in I} A_i$ *ve* $\bigcup_{i\in I} B_i$ *kümeleri de eşleniktir.*

Kanıt: Kanıtın belki bariz olmayan tek tarafı, olsa olsa, I sonsuz olduğunda ve A_i ile B_i arasında eşlemeler i'ye bağımlı bir biçimde bir formülle filan verilmediğinde Seçim Aksiyomu'nu kullanma zorunluluğudur. Bu durumda, her $i \in I$ için,

$$\{f : A_i \to B_i : f \text{ eşleşme}\}$$

kümesinden bir f_i elemanı seçilmesi gerekiyor ve bu seçim genel olarak Seçim Aksiyomu olmaksızın yapılamaz. Seçim Aksiyomu sayesinde seçilen bu f_i'leri yapıştırarak bileşimler arasında yukardaki resimdeki gibi bir f eşlemesi bulunabilir. □

Bölümün ilk paragrafında genel hatlarını çizdiğimiz programı uygulayalım. $\kappa_i \times \{i\}$, kardinalitesi κ_i olan bir kümedir ve değişik i belirteçleri için bunlar ayrık kümelerdir. $(\kappa_i)_{i\in I}$ kardinal ailesinin toplamını bu kümelerin bileşiminin kardinalitesi olarak tanımlayalım:

$$\sum_{i\in I} \kappa_i = \left|\bigcup_{i\in I} (\kappa_i \times \{i\})\right|.$$

Önce kolay bir özellik: Her $i \in I$ için $\kappa_i \le \lambda_i$ ise,

$$\sum_{i\in I} \kappa_i \le \sum_{i\in I} \lambda_i.$$

Bu sonsuz toplamın özelliklerini kanıtlamak için kardinal çarpmasından yararlanacağız.

Teorem 33.8 [ZFC]. *Eğer κ_i'lerden en az biri sonsuzsa, o zaman* $\sum_{i\in I} \kappa_i = \max\{\bigcup_{i\in I} \kappa_i, |I|\}$*'dir.*

Kanıt: Teorem 32.4'ten dolayı $\bigcup_{i\in I} \kappa_i$ ordinalinin aslında bir kardinal olduğunu biliyoruz, bu yüzden önermede $|\bigcup_{i\in I} \kappa_i|$ yazmadık.

Hiçbir κ_i'nin 0 olmadığını varsayabiliriz.

$\bigcup_{i\in I} \kappa_i \le \sum_{i\in I} \kappa_i$ eşitsizliği için, her $i \in I$ için,

$$\kappa_i \le \sum_{i\in I} \kappa_i$$

eşitsizliğini göstermek yeterlidir elbette, ki bu da

$$\varphi(\alpha) = (\alpha, i)$$

kuralıyla tanımlanan

$$\varphi : \kappa_i \to \bigcup_{i\in I} (\kappa_i \times \{i\})$$

birebir fonksiyonundan çok bariz biçimde çıkar.

$|I| \le \sum_{i\in I} \kappa_i$ eşitsizliği de

$$\psi(i) = (0, i)$$

kuralıyla tanımlanan

$$\psi : I \to \bigcup_{i\in I} (\kappa_i \times \{i\})$$

birebir fonksiyonundan çıkar. Demek ki

$$\max\{\bigcup_{i\in I} \kappa_i, |I|\} \le \sum_{i\in I} \kappa_i.$$

Geri kalan eşitsizlik bir sonraki bölümde kanıtlanacak olan aşağıdaki teoremin sonucudur.

Teorem 33.9 [ZFC]. $(X_i)_{i\in I}$ *bir küme ailesi olsun. Eğer X_i'lerden en az biri sonsuzsa, o zaman*

$$|\bigcup_{i\in I} X_i| \le \max\{\bigcup_{i\in I} |X_i|, |I|\}$$

dir.

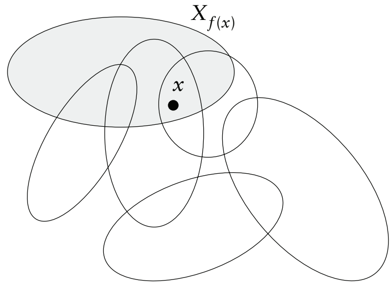
Kanıt: Varsayıma göre $\max\{\bigcup_{i\in I} |X_i|, |I|\}$ sonsuz bir kardinal sayısıdır. Bu sayıya λ diyelim.

$$X = \bigcup_{i\in I} X_i$$

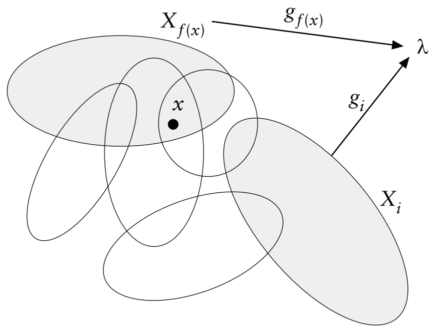
olsun. Her $x \in X$ için,

$$I_x = \{i \in I : x \in X_i\}$$

olsun. I_x boşküme değildir. Seçim Aksiyomu'nu kullanarak I_x'ten $f(x)$ adını vereceğimiz bir eleman seçelim. (Bkz. aşağıda-



ki şekil.) Yani $f : X \to I$ fonksiyonu $\{I_x : x \in X\}$ kümesinin bir seçim fonksiyonu olsun. Demek ki her $x \in X$ için, $x \in I_{f(x)}$. Ay-



rıca, gene Seçim Aksiyomu'nu kullanarak, her $i \in I$ için, X_i'den λ'ya giden birebir bir g_i fonksiyonu seçelim. Böyle bir birebir fonksiyon vardır çünkü $|X_i| \le \lambda$. Şimdi,

$$h(x) = (f(x), g_{f(x)}(x))$$

kuralıyla tanımlanan

$$h : X \to I \times \lambda$$

fonksiyonu birebirdir. Çünkü, $x, y \in X$ için, $h(x) = h(y)$ ise, yani $(f(x), g_{f(x)}(x)) = (f(y), g_{f(y)}(y))$ ise, o zaman $f(x) = f(y) = i$'dir. Demek ki,

$$g_i(x) = g_{f(x)}(x) = g_{f(y)}(y) = g_i(y),$$

ve g_i birebir olduğundan, $x = y$ çıkar. Dolayısıyla, Teorem

33.6'dan dolayı, $|X| \le |I \times \lambda| \le |\lambda \times \lambda| = \lambda$. □

Alıştırmalar

1. Her $\kappa_i = \kappa$ ise, $\sum_{i \in I} \kappa_i = \kappa|I|$ eşitliğini kanıtlayın. (Demek ki kardinal çarpması kardinal toplamasından tanımlanabilir.)

2. Önsav 7'yi $\prod_{i \in I} A_i$ ve $\prod_{i \in I} B_i$ kümeleri için kanıtlayın.

3. [Sonsuz Sayıda Kardinal Çarpımı.] $(\kappa_i)_{i \in I}$ bir kardinal ailesi olsun. $\prod_{i \in I} \kappa_i$ kardinal sayısını, $\prod_{i \in I} \kappa_i$ kartezyen çarpımının kardinalitesi olarak tanımlayalım. ($\prod_{i \in I} \kappa_i$ kardinal sayısıyla $\prod_{i \in I} \kappa_i$ kartezyen çarpımı, aynı biçimde yazılan iki değişik şeydir. Birincisi bir kardinal sayı, ikincisi [SKK ve Sİ]'de

$$\{f : I \to \cup_{i \in I} \kappa_i : \text{her } i \in I \text{ için } f(i) \in \kappa_i\}$$

olarak tanımlanmıştı.

Eğer κ_i ve λ_i kardinal sayıları, her $i \in I$ için, $\kappa_i \le \lambda_i$ eşitsizliğini sağlıyorsa, $\prod_{i \in I} \kappa_i \le \prod_{i \in I} \lambda_i$ kardinal sayı eşitsizliğini kanıtlayın.

Teorem 33.10 [König Teoremi, ZFC]. $(A_i)_{i \in I}$ ve $(B_i)_{i \in I}$ *iki küme ailesi olsun. Eğer her* $i \in I$ *için* $|A_i| < |B_i|$ *eşitsizliğini varsayalım. O zaman* $|\cup_{i \in I} A_i| < |\prod_{i \in I} B_i|$ *eşitsizliği de geçerlidir. Kardinal sayılar olarak ifade edersek: Eğer her* $i \in I$ *için* $\kappa_i < \lambda_i$ *ise,*

$$\sum_{i \in I} \kappa_i < \prod_{i \in I} \lambda_i$$

olur.

Kanıt: $|\cup_{i \in I} A_i| \le |\prod_{i \in I} B_i|$ eşitsizliğinin kanıtını okura bırakıp katı eşitsizliği kanıtlıyoruz. $A = \cup_{i \in I} A_i$ ve $B = \prod_{i \in I} B_i$ olsun. f, A'dan B'ye giden bir fonksiyon olsun. f'nin örten olamayacağını kanıtlayacağız. Her $a \in A$ için,

$f(a) = (f(a)_i)_{i \in I}$ olsun. Burada, $f(a)_i$, B_i'nin bir elemanıdır. Böylece,

$$f_i : A_i \to B_i$$

fonksiyonunu

$$f_i(a) = f(a)_i$$

olarak tanımlayabiliriz. $|A_i| < |B_i|$ eşitsizliğinden dolayı f_i örten olamaz. O zaman $B_i \setminus f_i(A_i)$ kümesi boş olamaz. Seçim Aksiyomu'nu kullanarak $B_i \setminus f_i(A_i)$ kümelerinden birer eleman seçelim, diyelim b_i. O zaman, B'nin $(b_i)_{i\in I}$ elemanı $f(A)$'da olamaz, çünkü bir $a \in A$ için $f(a) = (b_i)_{i\in I}$ olsaydı, bir $i \in I$ için $a \in A_i$ olur ve f_i'nin tanımından dolayı, $f_i(a) = b_i$ olurdu. □

Yukarda kanıtlanan König Teoremi aslında Seçim Aksiyomu'na eşdeğerdir. Çünkü eğer B_i kümelerinin hiçbiri boşküme değilse, o zaman $|\emptyset| = 0 < |B_i|$ olur ve dolayısıyla,

$$0 = |\bigcup_{i\in I} \emptyset| < |\prod_{i\in I} B_i|,$$

yani

$$\prod_{i\in I} B_i \neq \emptyset,$$

bu da Seçim Aksiyomu'na eşdeğerdir elbet, ne de olsa $\prod_{i\in I} B_i$ kümesinin bir elemanı her B_i'den bir eleman seçer.

33.3. Kardinallerle Üs Alma

n elemanlı bir kümenin 2^n tane altkümesi vardır. Aynı şey sonsuz elmanlı kümeler için de doğru! Bu bölümde α ve β kardinalleri için α^β kardinalini öyle tanımlayacağız ki, her X kümesi için, $|\wp(X)| = 2^{|X|}$ olacak. ($\wp(X)$'in X'in altkümeleri kümesi olduğunu anımsatırım.)

Önce şu çok kolay sonucu kanıtlayalım:

Önsav 33.11. *X bir küme olsun. $\wp(X)$ ile X'ten 2'ye (yani $\{0, 1\}$ kümesine) giden fonksiyonlar kümesi eşleniktir:*

$$\wp(X) \approx \{f : f,\ X\text{'ten } 2\text{'ye giden bir fonksiyon}\}.$$

Kanıt: Her $A \in \wp(X)$ için, yani X'in her A altkümesi için,

$$X_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } x \notin A \text{ ise} \\ 1 & \text{eğer } x \in A \text{ ise} \end{cases}$$

$$\chi_A : X \to 2$$

fonksiyonunu,

kuralıyla tanımlayalım. χ_A'ya A'nın ***karakteristik fonksiyonu***

adı verilir. χ_A fonksiyonu A'nın elemanlarında 1, X'in A'da olmayan elemanlarında 0 değerini alır. Dolayısıyla, A, χ_A'yı belirlediği gibi, χ_A da A'yı belirler:
$$A = \{x \in X : \chi_A(x) = 1\}.$$
Demek ki, $f(A) = \chi_A$ olarak tanımlanan
$$f : \wp(X) \to \{f : f,\ X\text{'ten 2'ye giden bir fonksiyon}\}$$
birebir ve örten bir fonksiyondur. □

Demek ki X sonlu bir kümeyse,
$$2^{|X|} = |\wp(X)| = |\{f : X \to 2\}|.$$
Eğer X ve Y iki kümeyse, X'ten Y'ye giden fonksiyonlar kümesini bazıları Y^X olarak yazar:
$$Y^X = \{f : X \to Y\}.$$
Bazıları da bu kümeyi, anlaşılır nedenlerden ${}^XY$ olarak yazar. Biz, X'ten Y'ye giden fonksiyonlar kümesini $\{f : X \to Y\}$ olarak yazacağız!

Şimdi α ve β iki kardinal sayı olsun. α^β kardinal sayısı,
$$\alpha^\beta := |\{f : \beta \to \alpha\}|$$
olarak tanımlayalım. Bunun ordinallerde üs almadan farklı bir işlem olduğuna dikkatinizi çekerim.

Örneğin, her α için $\alpha^0 = 1$ (çünkü boşkümeden α'ya bir tek ***boş fonksiyon*** gider! [SKK]) ve her $\alpha > 0$ için $0^\alpha = 0$ (çünkü boş olmayan bir kümeden boşkümeye giden bir fonksiyon yoktur!) Ayrıca, her α için, $\alpha^1 = \alpha$ ve $1^\alpha = 1$ (çünkü $1 = \{0\}$).

Tanımdan nerdeyse hemen çıkan aşağıdaki özelliklerin kolay kanıtlarını okura bırakıyoruz.

Önsav 33.12. *Her* α, β, γ *ve* δ *kardinal sayıları için*,
i. $\beta \leq \gamma$ *ise* $\alpha^\beta \leq \alpha^\gamma$,
ii. $\alpha \leq \beta$ *ve* $\gamma \leq \delta$ *ise ama* $\alpha = \beta = \gamma = 0 < \delta$ değilse, $\alpha^\gamma \leq \beta^\delta$,
iii. $2^\alpha = |\wp(\alpha)|$,
iv. $\alpha < 2^\alpha$,
v. $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta\alpha^\gamma$,

vi. $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$,

vii. $\alpha^\gamma\beta^\gamma = (\alpha\beta)^\gamma$. □

Okurun özellikle vi'yı kanıtlamasını öneririz.

Yukardaki önsavın iv şıkkını König Teoremi'yle de kanıtlayabiliriz: Teorem 33.10'da $I = \alpha$, $\kappa_i = 1$, $\lambda_i = 2$ alırsak,

$$\alpha = \Sigma_{i\in\alpha} 1 < \prod_{i\in I} 2 = 2^\alpha$$

buluruz! Sadece bir hoşluk!..

Alıştırmalar

1. Her sonsuz κ kardinali ve $n > 0$ doğal sayısı için $\kappa^n = \kappa$ eşitliğini kanıtlayın.

2. Her $i \in I$ için, $\kappa_i = \kappa$ ise, $\prod_{i\in I} \kappa_i = \kappa^{|I|}$ eşitliğini kanıtlayın. (Demek ki kardinallerde üs alma kardinal çarpımından tanımlanabilir.)

3. $\prod_{i\in I} \kappa_i \le (\bigcup_{i\in I} \kappa_i)^{|I|}$ eşitsizliğini kanıtlayın.

Şimdi şaşırtıcı bir sonuç sunacağız. Aşağıdaki teoreme göre, örneğin $\omega^\omega = 2^\omega = 3^\omega$ olur. Sonuç ilk bakışta şaşırtıcı, ikinci bakışta da şaşırtıcı, kanıtın basitliği daha da şaşırtıcı...

Teorem 33.13. *Eğer* β *sonsuz bir kardinalse ve* $2 \le \alpha \le 2^\beta$ *ise* $\alpha^\beta = 2^\beta$. Özellikle, $\beta^\beta = 2^\beta$.

Kanıt: Önsav 33.12'ye ve Teorem 33.6'ya göre,

$$2^\beta \le \alpha^\beta \le (2^\beta)^\beta = 2^{\beta\beta} = 2^\beta.$$

Demek ki her yerde eşitlik geçerli olmalı. İkinci önerme $\beta < 2^\beta$ eşitsizliğinden ve birinci önermeden çıkıyor. □

Teorem 33.14. *Eğer* $2 \le \alpha$ *ve* $1 \le \beta$ *ise ve* α *ve* β*'dan biri sonsuzsa*, o *zaman*

$$\max\{\alpha, 2^\beta\} \le \alpha^\beta \le \max\{2^\alpha, 2^\beta\}$$

olur.

Kanıt: İlk eşitsizlik bariz. Eğer $\alpha \le 2^\beta$ ise, α ya da β sonsuz olduğundan, β sonsuz olmak zorunda ve sonuç bir yukardaki sonuçtan çıkıyor: $\alpha^\beta = 2^\beta$. Eğer $2^\beta \le \alpha$ ise, o zaman $\beta < 2^\beta \le \alpha$ ve $\alpha^\beta \le (2^\alpha)^\beta = 2^{\alpha\beta} = 2^\alpha$. □

Yukardaki kanıttan şu çıkıyor:

Teorem 33.15. $2 \le \alpha$, $1 \le \beta$ *olsun ve* α *ve* β*'dan biri sonsuz olsun. O zaman, eğer* $\alpha \le 2^\beta$ *ise*, $\alpha^\beta = 2^\beta$, *eğer* $2^\beta \le \alpha$ *ise*, $\alpha^\beta \le 2^\alpha$ *olur*. □

Gerçekten de Hilbert'in dediği kadar var. Cantor bize gerçekten de sonsuz sayıları da içeren fantastik bir cennet sunmuş!

34. Kardinallerde Tümevarım ve ω_ω

Doğal sayılarda tümevarımla kanıt artık harcıâlem bir yöntem olmalı okur için. Geçmiş sayılarımızda bu çok bilinen yöntemi doğal sayılardan ordinallere genelleştirdik. Burada benzer bir yöntemi şimdi kardinal sayılarına uygulayacağız.

Eğer κ bir kardinalse, $|\wp(\kappa)| > \kappa$ eşitsizliğini biliyoruz [SKK ve Sİ]. Demek ki,

$$\{\alpha \le |\wp(\kappa)| : \kappa < \alpha \text{ ve } \alpha \text{ bir kardinal}\},$$

boş olmayan bir ordinal kümesidir. Dolayısıyla en küçük bir elemanı vardır. Bu elemana κ^+ diyelim.

Elbette, $\kappa < \kappa^+ \le |\wp(\kappa)|$ ve ayrıca κ^+, κ'dan büyük kardinallerin en küçüğü, yani κ'dan sonra gelen ilk kardinal.

Her kardinal belli bir κ kardinali için κ^+ olarak yazılamayabilir. 0 ve ω için bu elbette doğru da, ω'dan daha büyük kardinaller de κ^+ biçiminde yazılamayabilirler. Örneğin, $\omega_0 = \omega$ ise ve her n doğal sayısı için ω_{n+1} kardinalini $\omega_n{}^+$ olarak tanımlarsak, o zaman

$$\omega_\omega = \bigcup\nolimits_{n\in\mathbb{N}} \omega_n$$

olarak tanımlanan ω_ω kardinali hiçbir κ kardinali için κ^+ olarak yazılamaz. (ω_ω kardinalinin daha matematiksel bir tanımı için yan sütundaki gri kareye bakın.) Nitekim, ω_ω'dan küçük bir κ kardinali, ya sonlu bir kardinal olmalıdır ya da bir n doğal sayısı için ω_n'ye eşit olmalıdır. Nitekim $\kappa < \omega_\omega$ olsun. Her ω_n kardinali κ'dan küçükeşit olamaz, yoksa $\omega_\omega \le \kappa$ olurdu. Demek ki bazı n doğal sayıları için $\kappa < \omega_n$. Şimdi n bu doğal sayıların en küçüğü olsun. Eğer $n = 0$ ise κ bir tamsayıdır. Eğer $n > 0$ ise, o zaman, $\omega_{n-1} \le \kappa < \omega_n = \omega_{n-1}{}^+$ ve $\omega_{n-1} = \kappa$.

Belli bir κ kardinali için κ^+ olarak yazılamayan kardinallere ***limit kardinal*** diyelim. 0, ω ve ω_ω ilk üç limit kardinaldir. Bir limit kardinal kendisinden küçük kardinallerin bileşimidir. (Neden?)

Teorem 34.1. $\varphi(\alpha)$, *kardinallerle ilgili bir önerme olsun. Eğer* $\varphi(\alpha)$ *limit kardinaller için doğruysa ve her* α *kardinali için*, $\varphi(\alpha)$ *doğru olduğunda* $\varphi(\alpha^+)$ *da doğru oluyorsa*, *o zaman* $\varphi(\alpha)$ *her kardinal için doğrudur*.

Kanıt: $\varphi(\alpha)$'nın bir α kardinali için doğru olmadığını varsayalım. O zaman,

$$\{\beta \le \alpha : \beta \text{ kardinal ve } \varphi(\beta) \text{ yanlış}\}$$

boş olmayan bir kardinaller (dolayısıyla ordinaller) kümesidir. β, bu kümenin en küçük elemanı olsun. Teoremin varsasayımına göre β limit kardinal olamaz. Demek ki bir γ kardinali için $\gamma^+ = \beta$. Ama $\gamma < \beta$ olduğundan, $\varphi(\gamma)$ doğrudur. Ama o zaman da teoremin varsayımına göre $\varphi(\gamma^+)$, yani $\varphi(\beta)$ doğrudur. Bir çelişki.

ω_ω

ω_ω'nın bir kardinal olması için, ω_ω her şeyden önce bir küme olmalıdır. Oysa

$$\omega_\omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \omega_n$$

tanımında küme olduğunu bilmediğimiz

$$\{\omega_n : n \in \omega\}$$

topluluğunun bileşimi alınıyor ve biz sadece kümelerin bileşiminin küme olduğunu biliyoruz. Birleşimi alınan bu topluluğun bir küme olduğu ancak Yerleştirme Aksiyomu'yla kanıtlanır. ω_n kardinallerini başka türlü tanımlamalıyız.

$\varphi(n, y)$ formülü şunları söylesin:

n bir doğal sayıdır ve öyle bir X kardinal kümesi ve

$$f : n + 1 \to X$$

vardır ki,

- $f(0) = \omega$
- Her $i + 1 \in n$ için $f(i + 1) = f(i)^+$,
- $y = f(n)$.

Kanıtını okura bıraktığımız şu özellikler doğrudur.

1. Her n doğal sayısı için $\varphi(n, y)$'nin doğru olduğu tek bir y kardinal sayısı vardır. Bu kardinal sayısına bundan böyle ω_n adını verelim.

2. $\varphi(0, \omega)$ doğrudur.

3. Her n doğal sayısı için, eğer $\varphi(n, y)$ doğruysa o zaman $\varphi(n+1, y^+)$ doğrudur, yani

$$\omega_{n+1} = \omega_n{}^+.$$

Birinci özellikten dolayı ve Yerleştirme Aksiyomu sayesinde,

$$\{y : \text{bir } n \in \omega \text{ için } \varphi(n, y) \text{ doğru}\}$$

yani $\{\omega_n : n \in \omega\}$ bir kümedir. Şimdi ω_ω'yı bu kümenin bileşimi olarak tanımlayabiliriz.