30. Cennete Hoşgeldiniz!

Sonlu bir kümenin eleman sayısının ne demek olduğunu herkes bilir. Örneğin, {0, 2, 6, 7, 13} kümesinin 5 elemanı vardır. Bu sayımızın kapak konusunda, sonsuz bir kümenin "eleman sayısı" sözlerini anlamlandırıp sonsuzluğu derecelendireceğiz. Örneğin "doğal sayılar kadar" kesirli sayılar olacak, ama "doğal sayılardan daha fazla" gerçel sayı olacak.

"Bir kümenin eleman sayısının ne demek olduğunu göreceğiz" demek yerine, "bir kümenin eleman sayısı kavramını (tanımlayarak) yaratacağız" demek daha uygun düşerdi, çünkü sonuç olarak matematiksel kavramları biz zihnimizde yaratıyoruz.

Öte yandan, yarattığımız matematiksel kavramların hissettiklerimizle, gözlemlediklerimizle ve sağduyumuzla uyumlu olmaları gerektiğinden, matematiksel kavramların bizim dışımızda belli bir nesnelliği olmalı, onları rastgele yaratamayız, tanımların hissettiğimiz gerçeklikle uyumlu olmaları gerekir.

O zaman sormamız gereken ilk soru şu: Şimdilik sadece sezgilerimizle algıladığımız (ama birkaç sayfa ötede matematiksel tanımını vereceğimiz) "bir kümenin eleman sayısı" sözlerinden ne anlıyoruz, henüz matematiksel olarak tanımlanmamış olan bu kavram bize ne söylemeli, neyi anlatmaya çalışmalı, kavramın özellikleri ne olmalı?

İlk aşamada bazı kümelerin "sonlu", bazı kümelerinse "sonsuz" olduklarını söyleyebiliriz. Örneğin {0, 2, 6, 7, 13} kümesi sonludur ama doğal sayılar kümesi ℕ sonsuzdur.

Sonlu bir kümenin eleman sayısının ne demek olduğu belli: Kümenin her elemanına 1'den başlayarak ardışık numaralar verilir, verilen en son numara kümenin eleman sayısıdır.

Ya bir kümenin sonsuz olması ne demektir? Sonlu olmaması demektir elbet! Demek ki sonlu kümenin anlamını bilirsek, sonsuz kümenin de anlamını biliriz: Sonlu olmayan kümelere sonsuz denir!

Burada "sonsuz"un bir ad değil bir sıfat olarak kullanıldığına dikkatinizi çekerim.

Peki, sonsuz bir kümenin eleman sayısı ne olabilir? Okurların çoğunun "sonsuz" diyeceğini tahmin ediyorum. Doğru elbet! Sonsuz bir kümede hiç kuşkusuz sonsuz sayıda eleman vardır. Ama biz, ders notlarının bu kısmında, küme hakkında bu yanıttan çok daha fazla bilgi içeren başka bir yanıt bulacağız. Vereceğimiz yanıt, örneğin, doğal sayılardan çok daha fazla gerçel sayı olduğunu söyleyecek.

Öte yandan, vereceğimiz yanıt, tamsayıların doğal sayılar kadar olduğunu da söyleyecek, ne bir fazla ne bir eksik! Bu, biraz değil, oldukça şaşırtıcı, hatta biraz da rahatsız edici. Ne de olsa her doğal sayı bir tamsayıdır ama her tamsayı (örneğin –2) bir doğal sayı değildir. Bariz biçimde daha fazla tamsayı varken "doğal sayı kadar tamsayı vardır" demek saçma bulunabilir.

Bu "saçmalığı" ilk olarak Galile farketmiştir. Galile, 0, 2, 4, 6 gibi çift sayıları ikiye bölerek 0, 1, 2, 3 gibi doğal sayılarla eşleştirmiş ve böylece çift sayılarla doğal sayıların "aynı sayıda" olmaları gerektiğini görmüştür. Böylece, Galile sonsuzlukla yapılan aritmetiğin bambaşka türden bir aritmetik olması gerektiği sonucuna varmıştır.

Uzunca bir süre altkümelerin üstkümelerden daha az sayıda elemanı olduğu düşünüldü. İlk kez Öklid tarafından yazılı olarak ifade edilen ve çok da yanlış olmayan bu "parça bütününden küçüktür" düşüncesi, 19'uncu yüzyılın sonuna kadar yaygındı. 19'uncu yüzyılın sonunda Cantor bugün herkes tarafından değeri ve "doğruluğu" kabul edilen ama zamanında büyük tartışmalara neden olan "büyüklük/küçüklük" tanımını verdi.

David Hilbert, Cantor'un bu çalışmalarını, "matematiksel dehanın en zarif ürünlerinden ve saf insan zekâsınının varabileceği en yüce noktalardan biri" olarak tasvir etmiş ve bu yepyeni matematiksel dünyaya "Cantor'un cenneti" adını vermiştir.

31. Sonsuz Bir Kümeden Bir Eleman Atmak

Aralarında bir eşleme olan iki kümeye ***eşlenik*** ya da ***denk*** kümeler diyeceğiz. Sonlu kümeler ancak aynı sayıda elemana sahiplerse eşlenik olabilirler. Aynı önermeyi sonsuz kümeler için de yapmak geçiyor içimizden ama ne yazık ki sonsuz bir kümenin eleman sayısının ne demek olduğunu bilmiyoruz. Zaten bu sayının kapak konusunun amacı da "sonsuz bir kümenin eleman sayısı" sözlerine anlam kazandırmak ve bunu yukardaki önerme doğru olacak biçimde yapmak. Yavaş yavaş da olsa o aşamaya geliyoruz.

Doğal sayılar kümesi

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ..., n, ... \}$$

ile

$$\mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, ..., n, ... \}$$

pozitif doğal sayılar kümesinin, örneğin,

$$f(n) = n + 1$$

fonksiyonu sayesinde eşlenik oldukları düşünülürse, "sonsuz bir kümenin eleman sayısı" sözlerine anlam kazandırmanın pek de kolay olmayacağı görülür. Ama üstesinden geleceğiz.

Eğer X ve Y kümeleri eşleniklerse, bu, $X \approx Y$ olarak gösterilir. Kümeler arasındaki $\approx$ ilişkisinin şu özellikleri vardır: Her X, Y, Z kümesi için,

- $X \approx X$,
- $X \approx Y$ ise $Y \approx X$,
- $X \approx Y$ ve $Y \approx Z$ ise $X \approx Z$.

Bunları [SKK]'da kanıtlamıştık.

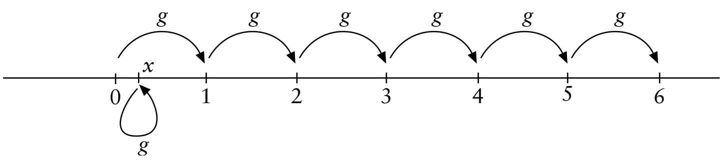
Hemen derin bir soru ortaya atalım: Eğer X sonsuz bir kümeyse, X'ten bir eleman atarsak, kalan küme X'e eşlenik olur mu? Yani, bir anlamda, sonsuz bir kümeden bir eleman eksilirse, "eleman sayısı" azalır mı?

Her iki kümede de sonsuz tane eleman var elbette, bundan kimsenin kuşkusu yok. Ama bu, bu iki küme arasında eşleme var anlamına gelmez. Örneğin, [SKK]'da $\mathbb{R}$ ile $\mathbb{N}$ arasında bir eşleme olmadığını gördük. Yani iki sonsuz küme arasında bir eşleme olmayabilir. Öte yandan, eğer kümelerin arasındaki fark tek bir elemansa, o zaman kümeler arasında bir eşleme olacağını umabiliriz.

Örnek olarak gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$'yi ele alalım. $\mathbb{R}$'den 0'ı atalım. Bu iki küme birbirine bayağı yakın, farkı tek bir eleman yaratıyor. Bu iki küme arasında bir eşleme var mıdır? Yani, $\mathbb{R} \approx \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mıdır? Genel sorunun yanıtını vermeden önce bu sorunun yanıtını verelim. Evet! $\mathbb{R}$ ile $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ eşleniktirler. İşte böyle bir eşleme: Bu fonksiyon, $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ kümesine giden bir eşlemedir.

$$g(x) = \begin{cases} x+1 & \text{eğer } x \in \mathbb{N} \text{ ise} \\ x & \text{eğer } x \notin \mathbb{N} \text{ ise} \end{cases}$$

Benzer şekilde $\mathbb{R}^{>0}$ ile $\mathbb{R}^{\geq 0}$ arasında da bir eşleme bulabiliriz elbet.



Genel sorumuza geri dönelim.

Soru. *X sonsuz bir küme olsun. $x \in X$ olsun. X ile $X \setminus \{x\}$ kümeleri arasında bir eşleme var mıdır?*

$X = \mathbb{R}$ ve $x = 0$ iken yanıtın olumlu olduğunu gördük. Ama olumlu yanıtımız gerçel sayıları ve bu sayılarla yapılan işlemleri kullanıyordu. Oysa herhangi bir X kümesinde göze çarpan doğal bir işlem yoktur.

Aynı soruyu, "X sonsuz bir kümeyse ve $x \in X$ ise, X ile $X \setminus \{x\}$ kümeleri arasında bir eşleme **olmalı** mıdır?" şeklinde de sorabilirdik, çünkü sorumuz özünde bir inanç meselesidir, çünkü matematikte teoremler, kanıtlanmadan kabul edilen aksiyomlar sayesinde kanıtlanırlar ve hangi aksiyomu kabul edip etmemek gerektiği, son analizde, neyin "doğru" olup olmadığıyla ilgili felsefi bir sorudur.

Baklayı ağzımızdan çıkaralım. Yanıt olumludur. Eğer X sonsuz bir kümeyse ve $x \in X$ ise, X ile $X \setminus \{x\}$ kümeleri arasında bir eşleme **var**dır. Ancak böyle bir eşlemenin varlığının kanıtı, herkesin her zaman doğal bulmadığı ama bugün artık matematikte tartışmasız kabul edilen Seçim Aksiyomu'nu kullanır.

Kanıtın püf noktası aşağıdaki masum görünüşlü önsavda gizlidir:

Önsav 31.1. *Her sonsuz küme sayılabilir sonsuzlukta bir altküme barındırır.*

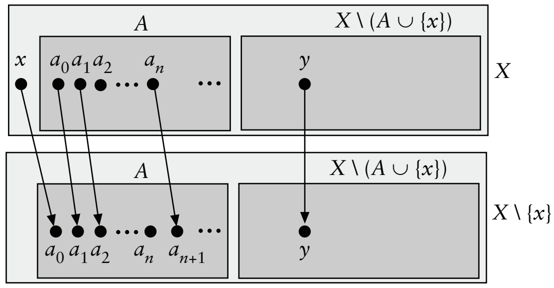
Kanıt Yerine: Geçmişte kanıtladığımız iki güçlü teoremle bu önsavı bu aşamada kanıtlamak işten bile değildir. Ancak geçmiş sayılarımıza bu kadar erken referans vermemek için önsavın kanıtını Sonuç 33.6'ya erteliyoruz. Kanıtın ipucunu fısıldayalım: Kanıt, her kümenin iyisıralanabileceği olgusunu kullanır. □

Teorem 31.2. *Eğer X sonsuz bir kümeyse ve $x \in X$ ise, X ile $X \setminus \{x\}$ kümeleri arasında bir eşleme **var**dır.*

Kanıt: $X \setminus \{x\}$ kümesi sonsuz olduğundan, yukardaki önsava göre $X \setminus \{x\}$ kümesinin sayılabilir sonsuzlukta bir altkümesi vardır. Bu altkümeye A diyelim ve A'nın elemanlarını

$$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

olarak numaralandıralım. Şimdi, X ile $X \setminus \{x\}$ kümeleri arasında-



ki eşleme aşağıdaki şekildeki gibi bulunabilir. $f : X \to X \setminus \{x\}$ fonksiyonunu,

$$f(z) = \begin{cases} a_0 & \text{eğer } z = x \text{ ise} \\ a_{n+1} & \text{eğer } z = a_n \text{ ise} \\ z & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. f'nin bir eşleme olduğu apaçık ortada. □

Sonuç 31.3. *Eğer X sonsuz bir kümeyse, X ile $X \cup \{x\}$ kümeleri arasında bir eşleme vardır.*

Kanıt: $Y = X \cup \{x\}$ olsun. O zaman $X = Y \setminus \{x\}$ olur. Yukardaki teoreme göre X ve Y, yani X ile $X \cup \{x\}$ kümeleri eşleniktirler.