7. Kesirli Sayı Dizileri

7.1. Diziler

Dizinin matematiksel tanımını Bölüm 1.5'te görmüştük: Eğer X bir kümeyse, bir X-dizisi, doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'den X'e giden bir fonksiyondur ya da - aynı şey - $\Pi_{\mathbb{N}} X$ kartezyen çarpımının bir elemanıdır. Ama biz bu kadar biçimsel düşünmeyip, diziyi her matematikçi nasıl algılıyorsa, öyle algılayacağız:

$$x_0, x_1, x_2, \ldots$$

türünden bir listeye matematikte ***dizi*** denir. x_0, x_1, x_2 elemanlarına ***dizinin terimleri*** adı verilir. Terimler belli bir kümeden seçilirler. Belli bir aşamada biten dizilere ***sonlu dizi*** denir ama bizim dizilerimiz hiçbir zaman sonlu olmayacaklar, yani bizim dizilerimizde **her** n doğal sayısı için bir x_n terimi verilmiş olacak. Ama dikkat, gene de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi sonlu olabilir. Bir dizinin terimleri kesirli sayıysa, diziye ***kesirli sayılar dizisi*** denir. Bu bölümde sadece kesirli sayılar dizilerinden sözedeceğimizden, "kesirli sayılar" ibaresini kaldırıp sadece "dizi" demekle yetineceğiz.

Diziler,

$$x_0, x_1, x_2, \ldots$$

biçiminde gösterildiği gibi daha tıkız bir yazılımla,

$$(x_n)_n$$
olarak da gösterilirler. Örneğin,
$$(1/(n+1))_n$$
dizisi,
$$1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots$$
dizisini ifade eder. Aynı diziyi,
$$(1/n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$$
olarak da gösterebilirdik. Hatta anlaşılması daha kolay olsun diye,
$$(1/n)_{n = 1, 2, 3, \ldots} \text{ ya da } (1/n)_{n \neq 0}$$
olarak da gösterebiliriz. Kimileyin kendimizi yazının heyecanına kaptırıp yukardaki diziyi
$$(1/n)_n$$
olarak gösterirsek okur bizi bağışlasın lütfen.

Değişik dizi yazılımları matematikte sık sık kullanılır. Örneğin,
$$(1/p)_{p \text{ asal}}$$
yazılımı,
$$1/2, 1/3, 1/5, 1/7, 1/11, \ldots$$
dizisi anlamına gelir.

Kolaylık olsun diye bir $(x_n)_n$ dizisini hemen hemen her zaman x olarak kısaltacağız:
$$x = (x_n)_n.$$
Bunun gibi $y = (y_n)_n$ ve $z = (z_n)_n$ yazacağız. Bir x dizisinden sözettiğimizde de, x'in terimlerini x_n olarak yazmaya özen göstermeye çalışacağız.

Tüm terimleri eşit olan bir diziye ***sabit dizi*** adı verilir. Böyle bir dizi, bir $a \in \mathbb{Q}$ sabiti için $(a)_n$ olarak yazılabilir. Bu diziye ***sabit a dizisi*** denir. Sabit a dizisini $s(a)$ olarak göstereceğiz. Demek ki $s(a)$ dizisinin her terimi a'ya eşit, yani her n doğal sayısı için,
$$s(a)_n = a$$
eşitliği geçerlidir. Sabit 0 ve sabit 1 dizileri özellikle ve genel olarak sabit diziler özel önem arzedecek ilerde.

x_n, $(x_n)_n$ dizisinin *n'**inci terimi**dir*. Demek ki, 1, $(1/n)_n$ dizisinin sıfırıncı terimidir. $(1/p)_{p \text{ asal}}$ dizisinin üçüncü terimi 1/7'dir; ne 1/3'tür ne de 1/5!

n, x_n teriminin ***göstergeci***, ***belirteci*** ya da ***endisidir***.

Kesirli sayılar dizilerinden oluşan kümesine $\mathscr{D}$ adını verelim. Demek ki $\mathscr{D}$ = Fonk(N, $\mathbb{Q}$) = $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{N}$.

7.2. Dizilerle İşlemler

İki diziyi terim terim toplayabiliriz: $x = (x_n)_n$ ve $y = (y_n)_n$ ise, $x + y$ dizisini,

$$x + y = (x_n + y_n)_n$$

olarak tanımlayabiliriz. Örneğin,

$$(1/n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} + (1/p)_{p \text{ asal}}$$

dizisini toplamak için, bu iki dizinin terimlerini,

$$1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \ldots$$

ve

$$1/2, 1/3, 1/5, 1/7, 1/11, \ldots$$

olarak yazıp sırayla toplarız ve

$$3/2, 5/6, 8/15, 11/28, 16/55, \ldots$$

dizisini elde ederiz.

Sadece toplama değil, dizilerle çıkarma ve çarpma da yapabiliriz. Tüm işlemler terim terim yapılabilir. Terim terim bölme yapabilmek için, bölen dizinin tüm terimleri 0'dan farklı olmalı. Ayrıca sabit 0 dizisi $s(0)$, dizileri toplamanın, sabit 1 dizisi $s(1)$ de dizileri çarpmanın etkisiz elemanıdır.

Kısacası dizi toplama ve çarpması, aynen $\mathbb{N}$'den $\mathbb{Q}$'ya giden fonksiyonların noktasal toplama ve çarpmasıdır. Bkz. [SKK].

$\mathscr{D}$ kümesi toplama ve çarpma işlemleri altında ve $s(0)$ ve $s(1)$ sabit dizileriyle birlikte değişmeli bir halkadır. Yani

$$(\mathscr{D}, +, \times, s(0), s(1))$$

yapısı değişmeli bir halkadır. Bunun kanıtı son derece kolaydır ve okura bırakılmıştır. Örnek olarak çarpmanın toplamaya göre dağıldığını, yani her $x, y, z \in \mathscr{D}$ için,

$$x(y + z) = xy + xz$$

eşitliğini kanıtlayalım. $x = (x_n)_n$, $y = (y_n)_n$ ve $z = (z_n)_n$ olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} x(y + z) &=^1 (x_n)_n((y_n)_n + (z_n)_n) \\ &=^2 (x_n)_n(y_n + z_n)_n \\ &=^3 (x_n(y_n + z_n))_n \\ &=^4 (x_ny_n + x_nz_n)_n \\ &=^5 (x_ny_n)_n + (x_nz_n)_n \\ &=^6 (x_n)_n(y_n)_n + (x_n)_n(z_n)_n \\ &=^7 xy + xz. \end{aligned}$$

Burada birinci ve yedinci eşitliklerde x, y ve z dizilerinin tanımını yazdık. İkinci ve altıncı eşitliklerde dizilerde toplamanın tanımını kullandık. Üçüncü ve beşinci eşitliklerde dizileri çarpmanın tanımını kullandık. Dördüncü eşitlikte ise kesirli sayılarda çarpmanın toplamaya göre dağılımını kanıtladık.

İstenen her eşitlik, $\mathbb{Q}$'deki benzer eşitliğe indirgenerek yukardaki örnekte olduğu gibi kolaylıkla kanıtlanabilir.

Her halkanın olduğu gibi $\mathscr{D}$ halkasının da tersinir elemanlarını tanımlayabiliriz: Bir $y \in \mathscr{D}$ dizisi için $xy = s(1)$ eşitliğinin sağlandığı $\mathscr{D}$'nin x dizilerine $\mathscr{D}$'nin ***tersinir elemanları*** denir. $\mathscr{D}$'nin tersinir elemanları kümesi $\mathscr{D}^*$ olarak yazılır. Belli ki eğer bir $x = (x_n)_n$ dizisi tersinirse, x_n terimlerinin her biri 0'dan değişik olmalıdır ve bu dizinin ***tersi*** $(1/x_n)_n$ dizisidir. Bu durumda tahmin edileceği üzere, $x = (x_n)_n$ dizisinin tersi x^{-1} olarak yazılır: $x^{-1} = (1/x_n)_n$. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} \mathscr{D}^* &= \{x \in \mathscr{D} : \text{bir } y \in \mathscr{D} \text{ dizisi için } xy = s(1)\} \\ &= \{x \in \mathscr{D} : \text{her } n \in \mathbb{N} \text{ için } x_n \neq 0\}. \end{aligned}$$

Dizilerle ilgili bir şeye dikkat etmek gerekir: x ve y dizileri sabit 0 dizisi olmasalar da çarpımları sabit 0 dizisi olabilir. Örneğin,

$$0, 1, 0, 1, 0, \ldots$$

dizisiyle

$$1, 0, 1, 0, 1, \ldots$$

dizisinin çarpımı sabit 0 dizisi $s(0)$'dır.

7.3. Sınırlı Diziler

Bazı diziler üstten sınırlıdır. Örneğin,

$$0, -1, -2, -3, -4, \ldots$$

dizisi üstten sınırlıdır, terimleri belli bir sayıyı, örneğin 0'ı ya da 1'i aşamaz. Ama bu dizi alttan sınırlı değildir. Bazı diziler hem üstten hem de alttan sınırlıdır. Hem alttan hem de üstten sınırlı dizilere kısaca ***sınırlı diziler*** diyeceğiz. Sabit dizilerin hepsi sınırlı dizilerdir elbet. Dolayısıyla $s(0)$ ve $s(1)$ dizileri de sınırlı dizilerdir. $(1/n)_{n \neq 0}$ dizisi de sınırlıdır. Eğer $x_0 \in [1, 2]$ ise, Bölüm 7B'de tanımlanan $(x_n)_n$ dizisinin terimleri de bu aralıktadır (çok kolay alıştırma), dolayısıyla dizi sınırlıdır. Bir $x = (x_n)_n$ dizisinin sınırlı olması için $(|x_n|)_n$ dizisinin üstten sınırlı olması yeter ve gerek koşuldur. (Kesirli sayılarda mutlak değerle okurun haşır neşir olduğunu varsayıyoruz Bkz Bölüm 6 ve 6A'nın sonu.)

Sınırlı diziler kümesini $\mathcal{B}$ olarak göstereceğiz.$\mathcal{B}$ kümesi toplama, çıkarma ve çarpma altında kapalıdır ve bunun kanıtı oldukça kolaydır.

Önsav 7.1. $\mathcal{B}$, *$\mathcal{D}$'nin bir althalkasıdır, yani toplama, çıkarma ve çarpma altında kapalıdır ve* $s(0)$ *ve* $s(1)$ *sabit dizileri* $\mathcal{B}$*'dedir.*

Kanıt: $x = (x_n)_n$ ve $y = (x_n)_n$ iki sınırlı dizi olsun. a ve b kesirli sayıları sırasıyla $\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$ ve $\{|y_n| : n \in \mathbb{N}\}$ kümelerinin birer üstsınırı olsun, yani her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$|x_n| \leq a \text{ ve } |y_n| \leq b$$

olsun. O zaman, her $n \in \mathbb{N}$ için,

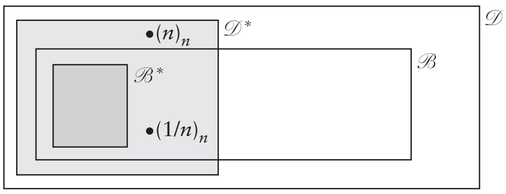
$$|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| \leq a + b,$$
$$|x_n - y_n| \leq |x_n| + |y_n| \leq a + b,$$
$$|x_n y_n| = |x_n||y_n| \leq ab$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Demek ki $x + y$, $x - y$ ve xy dizileri sınırlıdır. □

Bir $y \in \mathscr{B}$ dizisi için $xy = s(1)$ eşitliğinin sağlandığı $x \in \mathscr{B}$ dizilerine $\mathscr{B}$'nin ***tersinir elemanları*** denir ve bu elemanlardan oluşan küme $\mathscr{B}^*$ olarak yazılır. Dikkat: $\mathscr{B}$'nin bir elemanının tersinir olması için bu elemanın $\mathscr{D}$'de tersinir olması yetmez, ayrıca elemanın tersinin $\mathscr{B}$'de de olması gerekir. Yani$\mathscr{B}$'nin bir $x = (x_n)_n$ elemanının tersinir olması için, elbette her $x_n \neq 0$ olmalıdır, ama bu yeterli değildir, ayrıca bir de $(1/x_n)_n$ dizisi sınırlı olmalıdır. Örneğin $(1/n)_n$ dizisi hem $\mathscr{B}$'de hem de $\mathscr{D}^*$'dadır ama $\mathscr{B}^*$'da değildir, çünkü bu dizinin ($\mathscr{D}^*$'da) tersi olan $(n)_n$ dizisi sınırlı değildir. Yani

$$\mathscr{B}^* \subseteq \mathscr{B} \cap \mathscr{D}^*$$

dir ama eşitlik doğru değildir.



$(1/x_n)_n$ dizisinin sınırlı olması için $(x_n)_n$ dizisinin 0'a belli bir uzaklıkta durması, çok yaklaşamaması gerekmektedir. Örneğin,

$$5,\ 1/2,\ 5,\ 1/3,\ 5,\ 1/4,\ 5,\ 1/5,\ 5,\ 1/6,\ 5,\ \dots$$

dizisinin 0'a çok yaklaştığı anlar olmaktadır. Bu sınırlı dizi $\mathscr{D}$'de tersinirdir ama $\mathscr{B}$'de tersinir değildir, çünkü $\mathscr{D}$'deki tersi olan

$$1/5,\ 2,\ 1/5,\ 3,\ 1/5,\ 4,\ 1/5,\ 5,\ 1/5,\ 6,\ 1/5,\ \dots$$

dizisi sınırlı değildir.

$\mathscr{B}$ halkasının tersinir elemanlarını belirlemek güzel bir alıştırmadır. Yapalım:

Önsav 7.2. *Bir $x = (x_n)_n \in \mathscr{B}$ dizisinin ($\mathscr{B}$'de) tersinir olması için,*

"*öyle bir pozitif δ kesirli sayısı vardır ki, her n için $|x_n| \geq \delta$,*"

koşulu yeter ve gerektir.

Kanıt: Dizi $\mathcal{B}^*$'daysa, $(1/x_n)_n$ dizisi sınırlıdır. Demek ki bir $B > 0$ sayısı için $|1/x_n| \leq B$ koşulu sağlanır ve $|x_n| \geq 1/B$ olur. Diğer yandan: $|x_n| \geq \delta > 0$ ise, $x_n \neq 0$ olur ve $1/x_n$ diye bir kesirli sayı vardır. Koşuldan dolayı $|1/x_n| = 1/|x_n| \leq 1/\delta$. Demek ki $(1/x_n)_n$ dizisi sınırlı. □

Bu önsavdaki koşulu sağlayan dizilere 0'***dan uzak duran*** diziler diyelim. Yani $\mathcal{B}$'nin tersinir elemanları, $\mathcal{B}$'nin 0'dan uzak duran elemanlarıdır.

7.4. Sabit ve Zamanla Sabitleşen Diziler

Sabit diziler toplama, çıkarma ve çarpma altında kapalıdırlar elbet: İki sabit dizinin toplamı, farkı ve çarpımı da sabit dizidir, matematiksel söylemle sabit diziler kümesi $\mathcal{D}$ halkasının bir "althalkası"dır, hatta sabit diziler halkası $\mathbb{Q}$'ya çok çok benzeyen bir halkadır, hem küme olarak hem de işlemleriyle. Örneğin sabit a dizisiyle sabit b dizisinin toplamı sabit $a + b$ dizisidir, yani

$$s(a) + s(b) = s(a + b)$$

dir. Benzer eşitlikler çıkarma ve çarpma için de geçerlidir. Buna matematikte, $\mathbb{Q}$ halkasıyla sabit diziler halkası ***eşyapısal halkalar***dır denir. Eğer sabit diziler halkasını $\mathcal{S}$ olarak gösterirsek,

$$s : \mathbb{Q} \to \mathcal{S}$$

fonksiyonu iki halka arasında bir "eşyapı eşlemesi"dir, yani toplamaya ve çarpmaya saygı duyan bir eşlemedir. (Bu fonksiyon bir a sayısını sabit a dizisi olan $s(a)$'ya gönderir ve iki halka arasındaki tek eşyapı eşlemesidir (neden?))

Bir de ***zamanla sabitleşen diziler*** vardır. Bu diziler ilk trilyon terimde sabit olmayabilirler ama bir zaman sonra sabitleşip tüm terimleri birbirine eşit olurlar. Yani bir $(x_n)_n$ dizisinin ***zamanla sabitleşen dizi*** olması için, öyle bir N olmalı ki, her $n, m > N$ için, $x_n = x_m$ olmalıdır.

Her sabit dizi zamanla sabitleşen dizidir elbette. Zamanla sabitleşen diziler de toplama, çıkarma ve çarpma altında kapalıdır. Bunu okura alıştırma olarak bırakıyoruz.

Alıştırmalar

1. $x = (x_n)_n$ ve $y = (y_n)_n$ iki dizi olsun. Eğer belli N ve M doğal sayıları ve her k için,

$$x_{N+k} = y_{M+k}$$

oluyorsa, o zaman x ve y'nin ***ortak kuyrukları*** olduklarını söyleyelim. Örneğin,

$$3,\ 1/2,\ 1/3,\ 1/4,\ 1/5,\ \ldots$$

dizisiyle

$$7,\ 5,\ 1/4,\ 1/5,\ 1/6,\ \ldots$$

dizilerinin ortak kuyrukları vardır (örneğin 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, ... kuyruğu).

$\mathscr{D}$ üzerine $\equiv$ ikili ilişkisini şöyle tanımlayalım:

$$x \equiv y \Leftrightarrow x \text{ ve } y\text{'nin ortak kuyrukları var.}$$

Bunun bir denklik ilişkisi olduğu bariz olmalı. $[x]$, x dizisinin denklik sınıfını simgelesin. $\mathscr{D}/\equiv$ kümesi üzerine tanımlanan

$$[x] \pm [y] = [x \pm y]$$
$$[x][y] = [x\, y]$$

$+$, $-$ ve $\times$ işlemlerinin iyi tanımlandığını kanıtlayın, yani, örneğin, $[x] = [x']$ ve $[y] = [y']$ ise, $[x \pm y] = [x' \pm y']$ eşitliğini kanıtlayın.

2. $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesinin sonlu olduğu $(x_n)_n$ dizilerinin kümesinin $\mathscr{B}$'nin bir althalkası olduğunu kanıtlayın.

3. Zamanla devirleşen dizilerin sınırlı diziler halkası $\mathscr{B}$'nin bir althalkası olduğunu kanıtlayın. (Eğer belli bir N ve k ve her n için $a_{N+k+n} = a_{N+n}$ eşitliği sağlanıyorsa $(a_n)_n$ dizisine ***zamanla devirleşen dizi*** adı verilir.