6B. Onluk Tabanda Kesirli Sayılar (1)

Sayıları onluk tabanda, yani 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 rakamlarıyla (toplam **on** adet rakamla) yazarız. Bunu ta en küçük yaşlarımızdan beri yaptığımız için, sayıların onluk tabanda yazılmış olarak yaratıldığına inanıp bir sayıyı onluk tabanda yazmanın gerçek matematiksel anlamı hakkında pek düşünmeyiz. Ama aslında üstünde önemle durulması gereken ufuk açıcı bir konudur. Bu bölümde bu konuyu irdeleyeceğiz.

Bu bölümde değil ama bu ders notlarında,

$$0{,}99999...$$

ifadesine anlam vereceğiz. Birçok kişi bu ifadeyi, anlamını bilmeden yazar ve kullanır. Anlamını öğrendiğimizde, çok şaşırtan ve merak edilen ve sorgulanan

$$0{,}99999... = 1$$

eşitliğini matematiksel olarak kanıtlayabileceğiz.

Sadece 0,99999... ifadesini değil, ilerde

$$0,\ 172172172172...$$

ifadesini de anlamlandıracağız. Bu da bir kesirli sayı olacak. Ders notlarının son kısmında da,

$$0{,}12345678910111213141516171819...$$

ifadesini anlamlandıracağız. Tahmin edileceği üzere bir gerçel sayı olacak bu ifade. Ama gerçel sayıları henüz tanımlamadığımızdan, bırakın bu ifadenin bir gerçel sayı olduğunu kanıtlamayı, "bu bir gerçel sayıdır" diyemeyiz bile, desek de anlamsız olur.

İlkokul aritmetiğinden başlayalım. Örneğin (onluk tabanda yazılmış) 7436 sayısı aslında,

$$7\times 10^3 + 4\times 10^2 + 3\times 10^1 + 6\times 10^0$$

sayısıdır.

$$7436 = 7\times 10^3 + 4\times 10^2 + 3\times 10^1 + 6\times 10^0$$

eşitliği aslında "7436" ifadesinin tanımıdır.

Birazdan kanıtlanacağı üzere, her A doğal sayısı, belli bir n doğal sayısı ve $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n \in \{0, 1, ..., 9\}$ "rakam"ları için,

$$A = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \cdots + a_1 10^1 + a_0 10^0$$

biçiminde yazılabilir. Eğer bir de ayrıca $A > 0$ varsayımını yaparsak, a_n'yi pozitif olacak biçimde seçebiliriz ve bu durumda,

$$a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n$$

rakamları biricik olur. Her a_n rakamı biricik olduğundan, A'nın ***onluk tabanda gösterimi***

$$a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$$

olarak sorunsuz bir biçimde tanımlanabilir.

Yukarda söz ettiğimiz sonucu kanıtlayalım:

Teorem 6B.1. *Her A doğal sayısı, belli bir n doğal sayısı ve $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n \in \{0, 1, ..., 9\}$ rakamları için,*

$$A = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \cdots + a_1 10^1 + a_0 10^0$$

olarak yazılabilir. Eğer bir de ayrıca $A > 0$ varsayımını yaparsak, a_n'yi pozitif alabiliriz ve bu durumda $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n$ rakamları biriciktir.

Kanıt: Eğer $A < 10$ ise $n = 0$ ve $a_0 = A \neq 0$ alabiliriz. Bundan böyle $A \geq 10$ eşitsizliğini ve teoremin A'dan küçük pozitif doğal sayılar için doğru olduğunu varsayalım.

A'yı 10'a bölelim: Belli bir B ve $0 \leq r < 10$ "kalanı" için,

$$A = 10B + r$$

yazabiliriz [Teorem 4.4]. $B < A$ olduğundan, tümevarım varsayımına göre, belli bir m doğal sayısı ve

$$b_0, b_1, ..., b_{m-1}, b_m \neq 0$$

rakamları için,

$$B = b_m 10^m + b_{m-1} 10^{m-1} + \cdots + b_1 10^1 + b_0 10^0$$

olarak yazılabilir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} A &= 10B + r \\ &= 10(b_m 10^m + \cdots + b_1 10^1 + b_0 10^0) + r \\ &= b_m 10^{m+1} + \cdots + b_1 10^2 + b_0 10^1 + r. \end{aligned}$$

Demek ki $n = m + 1$ ve

$$a_{m+1} = b_m, a_m = b_{m-1}, ..., a_1 = b_0, a_0 = r$$

tanımlarını yaparsak $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n \neq 0$ rakamlarının varlığı kanıtlanmış olur.

Şimdi de bu rakamların biricikliğini kanıtlayalım.

$$\begin{aligned} A &= a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_1 10^1 + a_0 10^0 \\ &= b_m 10^m + b_{m-1} 10^{m-1} + \cdots + b_1 10^1 + b_0 10^0 \end{aligned}$$

olsun. Burada a_i ve b_j sayıları 0'dan 9'a kadar rakamlardır. $a_n \neq 0$ ve $b_m \neq 0$ eşitsizliklerini varsayalım. $n = m$ ve her i için $a_i = b_i$ eşitliklerini kanıtlayacağız.

Önce $n = m$ eşitliğini kanıtlayalım. Diyelim $n > m$. O zaman,

$$\begin{aligned} A &= b_m 10^m + b_{m-1} 10^{m-1} + \cdots + b_1 10^1 + b_0 10^0 \\ &\leq 9(10^m + 10^{m-1} + \cdots + 10^1 + 10^0) \\ &= 9(10^{m+1} - 1)/9 < 10^{m+1} \leq 10^n \leq A, \end{aligned}$$

ve bu da bir çelişkidir. (Son satırdaki eşitlik için bir sonraki sayfadaki gri kutudaki sonucu $a = 10$'a uyguladık.) Demek ki $n = m$.

Şimdi $a_n = b_n$ eşitliğini n üzerine tümevarımla kanıtlayalım. Diyelim $a_n > b_n$. O zaman,

$$A - b_n 10^n = (a_n - b_n) 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_1 10^1 + a_0 10^0$$

ve

$$A - b_n 10^n = b_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + b_1 10^1 + b_0 10^0$$

olur. Demek ki her iki eşitliğin de sağ tarafındaki sayılar birbirine eşit. Ama $a_n - b_n > 0$ ve $n > n - 1$ olduğundan, böyle bir durumun mümkün olmadığını bir üstteki paragrafta gördük.

Teorem. *Her k doğal sayısı ve $a \neq 1$ kesirli sayısı için,*

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^k = \frac{1 - a^{k+1}}{1 - a}.$$

Kanıt: $S = 1 + a + a^2 + \cdots + a^k$ olsun. Bu sayıyı a ile çarpalım:

$$aS = a(1 + a + a^2 + \cdots + a^k)$$
$$= a + a^2 + \cdots + a^{k+1}.$$

Şimdi S'yi ve aS'nin bu ifadelerini altalta yazıp

$$S = 1 + a + a^2 + \cdots + a^k$$
$$aS = a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{k+1},$$

birbirinden çıkaralım. a, a^2, ..., a^k ifadeleri sadeleşir ve geriye sadece 1 ve a^{k+1} kalır:

$$S - aS = 1 - a^{k+1},$$

yani

$$(1 - a)S = 1 - a^{k+1}$$

bulunur. Buradan da S, yani istenen toplam bulunur. □

Demek ki $a_n = b_n$. Şimdi $a_n 10^n$ ve $b_n 10^n$ sayılarını sadeleştirerek,

$$a_{n-1}10^{n-1} + \cdots + a_1 10^1 + a_0 10^0$$

ile

$$b_{n-1}10^{n-1} + \cdots + b_1 10^1 + b_0 10^0$$

sayılarının eşitliğini buluruz. Buradan tümevarımla her $i = 0, 1, ..., n - 1$ için $a_i = b_i$ çıkar. □

Teorem 6B.1 doğal sayılar içindi. Bilindiği gibi birçok kesirli sayı da benzer bir gösterimle, ama bir virgülle ifade edilebilir. Örneğin,

1/2 = 0,5	7/2 = 3,5
1/4 = 0,25	7/4 = 1,75
1/5 = 0,2	7/5 = 1,4
1/8 = 0,125	7/8 = 0,875

$$1/10 = 0{,}1 \qquad 7/10 = 0{,}7$$
$$1/16 = 0{,}0625 \qquad 7/16 = 0{,}4375$$
$$1/20 = 0{,}05 \qquad 7/20 = 0{,}35$$

Bu sayıları 10'un sonlu sayıda kuvvetlerinin toplamı olarak ifade edebiliriz. İşte birkaçı:

$$\begin{aligned}
1/2 &= 5\times10^{-1}\\
1/4 &= 2\times10^{-1} + 5\times10^{-2}\\
73/2 &= 3\times10^{1} + 6\times10^{0} + 5\times10^{-1}\\
7/8 &= 8\times10^{-1} + 7\times10^{-2} + 5\times10^{-3}\\
4673/8 &= 584{,}125 = 5\times10^{2} + 8\times10^{1} + 4\times10^{0} + 1\times10^{-1}\\
&\qquad + 2\times10^{-2} + 5\times10^{-3}
\end{aligned}$$

Dikkat ederseniz yukardaki sayıların paydalarında sadece 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20 gibi 2 ve 5'in kuvvetlerinin çarpımları var. Eğer paydada örneğin sadeleşmeyen bir 3 ya da 7 varsa o zaman kesirli sayının açılımı sonlu olamaz. Sözgelimi,

$$1/3 = 0{,}333333333333333333...,$$
$$1/7 = 0{,}142857142857142857...$$

ve bu sayılar, yukardakilerinin aksine, 10'un sonlu sayıda kuvvetleri cinsinden yazılamaz. Zaten eşitliklerin sağındaki virgülden sonra sonsuz rakamlı ifadeler (şimdilik) anlamsız ifadelerdir, çünkü bu ifadeler aslında sonsuz sayıda sayının toplamını simgelemektedir ve sonsuz sayıda sayıyı toplamanın ne demek olduğunu (henüz) bilmiyoruz. Bunlar gibi,

$$3{,}141591415914159...$$

ya da

$$0{,}1234567891011121314...$$

ifadelerinin ne demek oldukları da şimdilik bilinmiyor.

Şimdilik

$$a/2^n5^m$$

biçiminde yazılan sayıların sonlu bir ondalık açılımı olduğunu kanıtlayalım. Diğerlerini daha ilerki bölümlerde ele alırız.

Teorem 6B.2. *u ve v iki pozitif doğal sayı olsun. b'nin 2 ve 5'ten başka asal böleni olmasın. O zaman,*

$$u/v = a_n 10^n + \cdots + a_m 10^m$$

eşitliğinin geçerli olduğu $n \geq m$ tamsayıları ve

$$a_n, \ldots, a_m \in \{0, 1, \ldots, 9\}$$

rakamları vardır. Ayrıca eğer $a_n \neq 0$ ve $a_m \neq 0$ varsayımlarını yaparsak o zaman $a_n, \ldots, a_m$ katsayıları biriciktir.

Bunun tersi de doğrudur: Eğer $n \geq m$ tamsayılarsa ve

$$a_n, \ldots, a_m \in \{0, 1, \ldots, 9\}$$

ise, o zaman, $a_n 10^n + \cdots + a_m 10^m$ sayısı, bir u doğal sayısı ve 2 ve 5'ten başka asal böleni olmayan bir v doğal sayısı için v/v biçiminde yazılır.

Kanıt: Teoremdeki n ve m sayılarının negatif olabileceklerine dikkatinizi çekerim. (Hatta, eğer $a < b$ ise, n, ve elbette m de, negatif olmak zorundadır ve eğer a/b bir doğal sayı değilse, m negatif olmak zorundadır.)

İkinci paragrafın kanıtı son derece basit:

$$a_n 10^n + \cdots + a_m 10^m$$

ifadesinin paydaları eşitleyip a/b biçiminde yazalım. Eğer $m \geq 0$ ise $b = 1$ alabiliriz. Ama eğer $m < n$ ise paydada ancak 10'un bir kuvveti olabilir. Demek ki paydanın 2 ve 5'ten gayri asal böleni olamaz.

Şimdi teoremin birinci kısmını kanıtlayalım. a'yı ve b'yi münasip bir doğal sayıyla çarparak b'nin 10^k biçiminde yazılmış bir doğal sayı olduğunu varsayabiliriz. Şimdi a'yı bir önceki teoremi kullanarak 10'luk tabanda yazarsak, a/b'yi teoremde istenen şekilde ifade edebiliriz.

Katsayıların biricikliğini göstermek kaldı.

$$a_n 10^n + \cdots + a_m 10^m = b_{n'} 10^{n'} + \cdots + a_{m'} 10^{m'}$$

eşitliğini varsayalım. 10'un yeterince büyük bir gücüyle çarparsak m ve m' sayılarının doğal sayı olduklarını varsayabiliriz. Şimdi sonuç bir önceki teoremden çıkar. □

"Bildiğimiz" Bölme

İlkokulda ve lisede 18'i nasıl 7'ye böldüğümüzü anımsayalım. Bölmeye şöyle başlarız:

$$\begin{array}{r|l} 18 & 7 \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

İlk iş olarak 18'de en fazla kaç tane 7 olduğuna bakarız. 2 tane vardır. Sonra 2'yle 7'yi çarpıp 18'den çıkarırız. Kalan 4'tür:

$$\begin{array}{r|l} 18 & 7 \\ \cline{2-2} -14 & 2 \\ \cline{1-1} 4 & \end{array}$$

Bu aynen Teorem 4.3'te yapılan bölmedir. Kalan hep 7'den küçük olmak zorundadır, çünkü 18'in içinde bulunan tüm 7'leri çıkardık.

$$\begin{array}{r|l} 18 & 7 \\ \cline{2-2} -14 & 2{,}5 \\ \cline{1-1} 40 & \\ -35 & \\ \cline{1-1} 5 & \end{array}$$

Bu aşamada 4'ün sağına bir 0 ve 2'nin sağına bir virgül konulur ve aynı işlem devam ettirilir:

$$\begin{array}{r|l} 18 & 7 \\ \cline{2-2} -14 & 2{,}571 \\ \cline{1-1} 40 & \\ -35 & \\ \cline{1-1} 50 & \\ -49 & \\ \cline{1-1} 10 & \\ -7 & \\ \cline{1-1} 3 & \end{array}$$

İşlem, virgül koyma dışında dilendiği kadar tekrarlanabilir.

En sondaki kalan hep 7'den küçük olduğu için (0, 1, 2, 3, 4, 5 ya da 6) en fazla 7 adımda kalan, daha önce bulunan kalanlardan biri olacak ve o zaman bir döngüye girilecektir. Ama 0 belirir belirmez daha sonra kalanlar hep 0 olacağından, kalan sayılar en fazla 6 adımda tekrarlanmak zorundadır.

Bu işlemler matematiksel olarak şu işlemlere tekabül ederler:

$$18 = 2\times7 + 4$$
$$18 = 2{,}5\times7 + 5/10$$
$$18 = 2{,}57\times7 + 1/100$$
$$18 = 2{,}571\times7 + 3/1000$$

Devam edersek,

$$18 = 2{,}571428\times7 + 4/1.000.000$$

buluruz. Bu aşamada, virgülden sonraki 571428 sayıları tekrarlanırlar. Örneğin, 13'üncü adımda

$$18 = 2{,}571428571428\times7 + 4/10^{12}$$

bulunur. Bu eşitlik,

$$18/7 \approx 2{,}571428571428$$

aşağıyukarılığı olarak da yazılabilir. Tekrarlanan 571428 dizisini ne kadar çok yazarsak, aşağıyukarılık o kadar eşitliğe yaklaşır. Okullarda bu, "sonsuzda eşitlik olur" düşüncesiyle,

$$18/7 = 2{,}571428571428571...$$

olarak yazılır. Gerçekten de "sonsuzda eşitlik olur". Bunu ilerde kanıtlayacağız.

Bu yöntemle, her $a/b > 0$ kesirli sayısı virgülden bir zaman sonra en fazla $b - 1$ basamakta tekrarlanan sayılar olarak yazılabilir. Örneğin,

$$71{,}932525252525...$$

kesirli bir sayıdır. İlerde bu sayının a/b biçiminde nasıl yazılacağını göreceğiz. Yanıt,

$$71{,}932525252525... = 712132/9900$$

olur. Öte yandan virgülden bir zaman sonra tekrarlanmayan sayılar kesirli sayı olamazlar. Bunu da ilerde kanıtlayacağız.

7A. Sayıları Yaratmaya Devam Ediyoruz

Kitabın ilk kısmında 0, 1, 2, 3 gibi doğal sayıları ve bu doğal sayıların kümesi olan $\mathbb{N}$'yi yarattık. Sadece $\mathbb{N}$'yi yaratmakla kalmadık, ayrıca $\mathbb{N}$'de toplamayı, çarpmayı ve sıralamayı tanımladık. Bütün bunları yapmak için kümeler kuramından yararlandık; daha doğrusu en en en temel kümeler kuramını bu sayıları yaratmak için özellikle kurduk.

Doğal sayıların önemli bir kusuru bir sayıdan bir başka sayının her zaman çıkarılamamasıdır. Örneğin, doğal sayılarda 3'ten 5'i çıkaramazsınız. Doğal sayıların bu zaafını gidermek için, geçen kısımda, $\mathbb{N}$'den hareket ederek ve cebir maharetiyle $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesini yaratmıştık. Ayrıca $\mathbb{Z}$'de toplama, çıkarma ve çarpma işlemlerini ve sıralamayı tanımlamışık.

Tamsayıların da bir kusuru var. Tamsayılarda bölme yapılamaz, örneğin 3'ü 5'e bölemeyiz. Tamsayıların bu zaafını gidermek için, gene geçen kısımda, 3/5, –2/7 gibi kesirli sayıları ve bu sayıların kümesi olan $\mathbb{Q}$ kümesini yarattık. Sadece $\mathbb{Q}$ kümesini yaratmakla kalmadık, bu küme üzerinde toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerini ve sıralamayı da tanımladık. (0'a bölmeyi tanımlayamadık elbet!) Kesirli sayıları yaratmak için tamsayılardan yola çıktık ve cebirsel yöntemler kullandık.

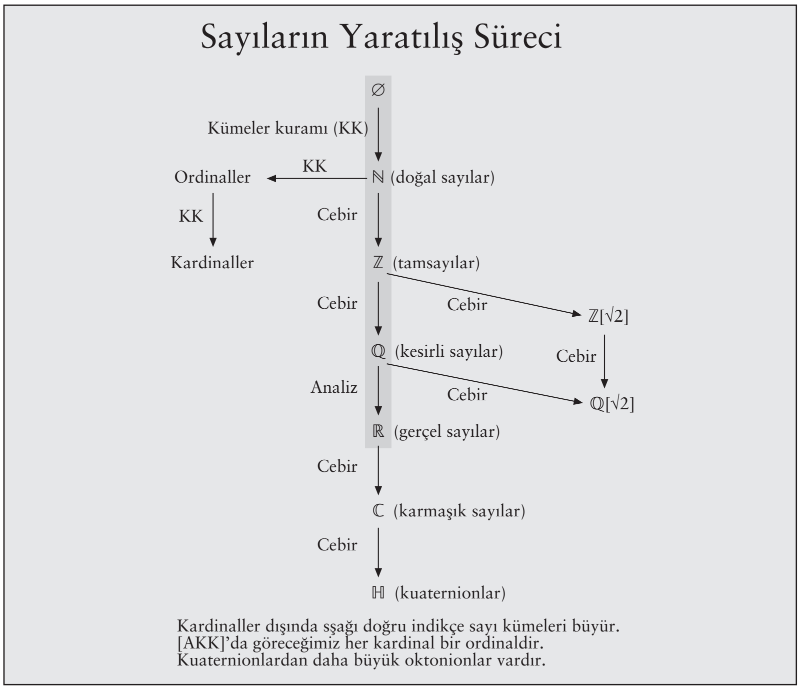
Ancak kesirli sayıların da önemli bir kusuru var. Örneğin,

$$x^2 = 2$$

denkleminin kesirli sayılarda çözümü yoktur. Bunun kanıtı [SKK]'da bulunabilir.

Bir sonraki altbölümde, √2'yi yaratacağız. √2'yi yaratmakla kalmayacağız, √2'yi içeren bir sistemde toplama, çarpma ve hatta bölme yapacağız.

Aşağıda şemada sayı yaratmanın kronolojisini bulacaksınız.



ℚ[√2]'yi Yaratmak

√2'nin kesirli bir sayı olmamasının doğurduğu tekil sorunu gidermek o kadar zor değildir ve bu kısa altbölümde √2'yi içeren ℚ[√2] sıralı halkasını matematiksel olarak yaratarak bu sorunu gidereceğiz. Ama sorun sadece √2'nin varlığı değil ki, kesirli olmayan o kadar çok gerçel sayı var ki... Bu sorunu ileri bir tarihe atıp şimdilik sadece √2'yi var edelim.

Elimizde sadece $\mathbb{Q}$ kümesi var. Sadece $\mathbb{Q}$'yü ve en temel kümeler kuramını kullanarak $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ halkasını var edeceğiz... Yaratmadan önce bu halkanın sonunda nasıl bir şey olacağını, sanki $\sqrt{2}$'nin ne olduğunu biliyormuşçasına, önceden söyleyelim,

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$$

olacak. Henüz yaratmadığımız $\mathbb{R}$ kümesinin bir altkümesi olan bu küme, toplama, çarpma, çıkarma altında kapalıdır. Hatta eğer $0 \neq \alpha \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ ise $1/\alpha$ sayısı da $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ kümesindedir. (Şimdilik okura alıştırma.)

Başlıyoruz.

$\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ kümesine eşit olsun... Amacımız, sezgisel olarak bildiğimiz ama henüz matematiksel olarak var olmayan $a + b\sqrt{2}$ sayısını (a, b) ikilisi olarak görmek. Örneğin $\sqrt{2}$ sayısı $(0, 1)$ elemanına eşit olacak. Her a kesirli sayısını da $(a, 0)$ olarak göreceğiz. Şimdi $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ kümesi üzerinde toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayalım:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$
$$(a, b)(c, d) = (ac + 2bd, ad + bc).$$

Bu tanımları, sezgisel olarak bildiğimiz,

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2},$$
$$(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}$$

eşitliklerinden esinlenerek yaptık.

Örneğin,

$$(0, 1)^2 = (2, 0).$$

("Kare almak" demek bir sayıyı kendisiyle çarpmak demektir elbet.) Bir de şu eşitliğe bakalım:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1).$$

Eğer $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ kümesinin $(x, 0)$ türünden yazılan elemanlarını $i(x)$ olarak kısaltırsak, $(0, 1)$ elemanını da $\sqrt{2}$ olarak yazarsak ($\sqrt{2}$'yi yarattık!), yukardaki

$$(a, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1)$$

eşitliği,

$$(a, b) = i(a) + i(b)\sqrt{2}$$

halini alır. Daha bitmedi... Bir de $i(x)$ elemanını x olarak kısaltırsak, bu en son eşitlik,

$$(a, b) = a + b\sqrt{2}$$

halini alır ve böylece, tüm $a, b \in \mathbb{Q}$ için, $a + b\sqrt{2}$ sayılarını yaratmış oluruz...

Hangi hakla $i(x)$ yerine x yazıyoruz diye sorabilir okur haklı olarak. Aslında bu bir suçtur, ama bu suçun hafifletici nedenleri vardır: Kolayca görüleceği üzere, her $a, b \in \mathbb{Q}$ için

$$i(a) + i(b) = i(a + b),$$
$$i(a)i(b) = i(ab)$$

eşitlikleri geçerli ve ayrıca

$$i : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$$

fonksiyonu birebir. Bütün bunlar, a ve b kesirli sayılarını toplayıp çarpmayla, yeni yarattığımız $i(a)$ ve $i(b)$ elemanlarını toplayıp çarpmak arasında pek bir ayrım olmadığını gösterir. Dolayısıyla $\mathbb{Q}$ ile $i(\mathbb{Q})$ kümelerini "özdeşleştirebiliriz". (Bkz. Bölüm 5.14.)

Toplama ve çarpma verildiğinden, artık $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ kümesinde çıkarma ve bölmeyi de tanımlayabiliriz. Bu tanımları okura bırakıyoruz. Ama sıralamayı tanımlayalım:

$$a + b\sqrt{2} \le c + d\sqrt{2}$$

önermesi, elbette,

$$0 \le (c - a) + (d - b)\sqrt{2}$$

önermesi doğruysa doğru olmalı. Demek ki

$$0 \le x + y\sqrt{2}$$

önermesini tanımlamak yeterli. Bunu da şöyle tanımlayalım:

$$0 \le x + y\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \text{ ve } y \ge 0 \text{ ise ya da} \\ x \ge 0,\ y \le 0 \text{ ve } 2y^2 \le x^2 \text{ ise} \\ x \le 0,\ y \ge 0 \text{ ve } x^2 \le 2y^2 \text{ ise} \end{cases}$$

Artık $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ kümesini, bu küme üstündeki 4 işlemi ve sıralamayı biliyoruz. Bu tanımlarla, ortaokul bilgilerinizle doğru olacağını tahmin ettiğiniz her türlü ifadeyi kanıtlayabilirsiniz.

Dileyen okur $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ kümesinin bu tanımlarla sıralı bir cisim olduğunu kanıtlayabilir.

Tuhaf ama gerçek: $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ kümesini yukarda tanımlanan toplama ve çarpmayla sıralı bir cisim yapan bir başka sıralama daha vardır. Bu yeni sıralamada $\sqrt{2} < 0$ olur! Açıklayalım.

$\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$'den $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$'ye giden şu fonksiyona bakalım:

$$\varphi : \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \to \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$$

fonksiyonu her $a, b \in \mathbb{Q}$ için,

$$\varphi(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$$

formülüyle tanımlansın. φ fonksiyonu bir eşleşmedir ve $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ halkasının toplamasını ve çarpmasını ve çarpmanın birim elemanını etkilemez, yani, her $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ için,

$$\varphi(\alpha + \beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta),$$
$$\varphi(\alpha\beta) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta),$$
$$\varphi(1) = 1$$

olur. Şimdi φ'yi kullanarak $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ üzerine (gerçel sayılardan bulaşan) "doğal" sıralamayı değiştirebiliriz: Her $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ için,

$$\alpha \prec \beta \Leftrightarrow \varphi(\alpha) < \varphi(\alpha)$$

olarak tanımlayalım. $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}], +, \times, \prec)$ yapısı da sıralı bir cisim olur ve $\sqrt{2}$ bu sıralamada negatif olur.

Ya Diğer Eksik Sayılar?

$\sqrt{2}$'nin kesirli sayı olmama sorununu ve benzer sorunları çözmek için, kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}$'den çok çok daha büyük bir küme olan gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$'yi yaratacağız.

Sorun sadece 2'nin karekökünü yaratmak olsaydı, $\mathbb{R}$'den çok daha küçük olan

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$$

cismi işimizi görürdü ve $\mathbb{R}$'yi yaratmak yerine, yaratması çok daha kolay olan ve cebirsel yöntemlerle yaratılabilen $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ cismini yaratmamız yeterli olurdu.

Sadece $\sqrt{2}$'yi değil, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, $5^{1/3}$ gibi sayıları, hem de dördünü birden cebirsel yöntemlerle yaratmak da oldukça kolaydır.

Hatta π sayısını ve, n herhangi bir tamsayı olmak üzere, π^n sayılarının hepsini de cebirsel yöntemlerle kolaylıkla yaratabiliriz.

n bir kesirli sayı olmak üzere π^n sayılarının hepsini birden yaratmak biraz daha fazla uğraş gerektirir ve bu yöntem çok daha az bilinir ama bu da mümkündür.

(Toplama ve çarpma işlemlerini tanımlamak görece kolaydır ama bu sayı cisimlerini sıralamak çok daha zordur.)

Demek istediğimiz şu: Kesirli sayıların en büyük kusuru $\sqrt{2}$ gibi bir sayının olmaması değildir. Kesirli sayıların çok daha büyük bir kusuru vardır. Eğer $\sqrt{2}$'nin olmaması, komşunun bahçesinden elma çalmaksa, $\mathbb{Q}$'nün diğer büyük suçu banka soymaktır! Gerçel sayıları yaratarak bu kusuru gidermeye çalışacağız.

Bu büyük kusur öylesine büyük bir kusurdur ki, telafi etmek için cebir yetmez, analiz de gerekir.

7B. √2'ye Yakınsamak İsteyen Bir Dizi

√2'nin kesirli bir sayı olmadığını biliyoruz. √2, kesirli bir sayı değildir ama kesirli sayılarla √2'ye dilediğimiz kadar yaklaşabiliriz. Örneğin √2'yle

$$1,414213562373$$

kesirli sayısı arasındaki fark 0,000000000001 sayısından küçüktür. Dilersek, √2'ye uzaklığı en fazla

$$0,000000000000000000000001$$

olan kesirli bir sayı bulabiliriz. Bulacağız da.

Bu bölümde, gittikçe √2'ye daha fazla yaklaşan ve "sonsuzda √2 olmaya meyilli" olan bir kesirli sayı dizisini ele alacağız. Hemen bu diziyi tanımlayalım.

$(x_n)_n$ dizisinin terimlerini tümevarımla şöyle tanımlayalım:

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 2}{x_n + 1}. \qquad (*)$$

Eğer uygun bir x_0 verilmişse, bu tanım sayesinde tüm x_n'leri hesaplayabiliriz. Örneğin eğer $x_0 = 1$ ise,

$$x_3 = 17/12 = 1,41666...$$

buluruz ki, bu, Mezopotamyalıların, daha iyisini bilmediklerinden, √2 yerine kullandıkları değerdir. Pek de fena bir değer değildir aslında:

$$(17/12)^2 = 2,00694444...$$

Eğer $x_0 = 0$ alırsak,

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ x_1 = 2/1 &= 2 \\ x_2 = 4/3 &= 1{,}3333333... \\ x_3 = 10/7 &= 1{,}4285714285714... \\ x_4 = 24/17 &= 1{,}4117647058823... \\ x_5 = 58/41 &= 1{,}4146341463414... \\ x_6 = 140/99 &= 1{,}4141414141414... \end{aligned}$$

buluruz. Bu dizinin giderek √2'ye daha çok yaklaştığını, hiçbir zaman tam olarak √2'ye eşit olmasa da dizinin terimleriyle √2'ye istediğimiz kadar yaklaşabileceğimizi göstereceğiz. Örneğin, belli bir aşamadan sonra tüm x_n'ler √2'ye en fazla milyarda 1 uzaklıktadırlar; bunun için n'yi 18 ya da daha büyük seçmenin yeterli olduğunu göreceğiz. Seçtiğimiz $\varepsilon > 0$ sayısı ne kadar küçük olursa olsun, bir zaman sonra - yani belli göstergeçten sonra- tüm x_n'ler √2'ye en fazla bu ε mesafesi kadar uzaklıkta olurlar. Matematikte bu olgu "$(x_n)_n$ dizisi √2'ye ***yakınsar***" olarak ifade edilir. Ders notlarının son kısmında yakınsama kavramına özel yer ayıracağız. Bu bölümü ısınma hareketleri olarak telakki edebilirsiniz.

Eğer diziyi hesaplamaya $x_0 = -1$ ile başlamaya kalkışırsak, bir sonraki terimi hesaplamak için $x_0 + 1$'e yani 0'a bölmek zorunda olduğumuzdan, diziyi devam ettiremeyiz. Aynı şekilde, eğer $x_0 = -3/2$ ise $x_1 = -1$ olur ve bu sefer de x_2'yi hesaplayamayız. Ama eğer $x_0 \geq 0$ ise, tümevarımla kolayca görüleceği üzere, her $x_n \geq 0$ olur ve dizinin her terimini hesaplayabiliriz. Bu dizinin, seçilmiş her $x_0 \geq 0$ (kesirli) sayısı için √2'ye yaklaştığını göstereceğiz. Daha doğrusu, henüz √2 diye bir sayıyı icat etmediğimizden, x_n'lerin karelerinin giderek 2'ye yakınsadığını göstereceğiz. Yakınsamanın ne demek olduğunu henüz bilmediğimizden, tam matematiksel olamayacağız ama gene de okur gerçeği hissedecek diye umuyoruz.

$|2 - x_n^2|$ sayılarına bakalım. Önce,

$$\left|2 - x_{n+1}^2\right| = \left|2 - \left(\frac{x_n + 2}{x_n + 1}\right)^2\right|$$
$$= \left|2 - \frac{x_n^2 - 4x_n + 4}{x_n^2 + 2x_n + 1}\right|$$
$$= \frac{\left|2 - x_n^2\right|}{(x_n + 1)^2}$$

eşitliğinin farkına varalım. Eğer $1 \leq x_n$ eşitsizliğini kanıtlayabilirsek, o zaman $(x_n + 1)^2 \geq 4$ olur ve yukardaki eşitsizlikten,

$$\left|2 - x_{n+1}^2\right| \leq \frac{\left|2 - x_n^2\right|}{4}$$

eşitsizliği çıkar ve böylece 2'yle x_n^2 arasındaki farkın her adımda, bir önceki farkın 4'te 1'inden daha küçük olacağı anlaşılmış olur. Tabii bu da aradaki farkın n büyüdükçe 0'a yaklaşacağı anlamına gelir.

Şimdi x_n'nin 1'den büyük olduğunu kanıtlayalım diyeceğim ama bu dediğim, eğer $x_0 < 1$ seçilirse, en azından $n = 0$ için doğru olmaz. Öte yandan, eğer $x_0 > -1$ ise, o zaman $x_0 + 1 > 0$ olur ve (*) tanımından kolayca kanıtlanacağı üzere, $n \geq 1$ için tüm x_n'ler 1'den büyük olurlar. (Çünkü paydaki $x_n + 2$ sayısı her zaman paydadaki $x_n + 1$'den daha büyüktür.) Böylece

$$\left|2 - x_{n+1}^2\right| \leq \frac{\left|2 - x_n^2\right|}{4}$$

eşitsizliği kanıtlanmış olur. Demek ki,

$$\left|2 - x_n^2\right| \leq \frac{\left|2 - x_{n-1}^2\right|}{4} \leq \frac{\left|2 - x_{n-2}^2\right|}{4^2} \leq \ldots \leq \frac{\left|2 - x_0^2\right|}{4^n}$$

yani

$$\left|2 - x_n^2\right| \le \frac{\left|2 - x_0^2\right|}{4^n}$$

eşitsizliğini buluruz. Örneğin, $x_0 = 1$ alırsak,

$$|2 - x_n^2| \le 1/4^n$$

buluruz, ki fena bir aşağıyukarılık değil. Buradan, eğer bir an için $\sqrt{2}$ sayısının varlığını bildiğimizi varsayarsak,

$$|\sqrt{2} - x_n| < |\sqrt{2} - x_n||\sqrt{2} + x_n| = |2 - x_n^2| \le 1/4^n,$$

yani

$$|\sqrt{2} - x_n| < 1/4^n$$

buluruz. Eğer $n = 2m$ alacak olursak,

$$|\sqrt{2} - x_{2m}| < 1/4^{2m} = 1/16^m < 1/10^m$$

buluruz. Örneğin, eğer $\sqrt{2}$'ye kesirli bir sayıyla milyarda 1 kadar yaklaşmak istiyorsak, $x_0 = 1$ ve $m = 9$ seçip x_{18}'i hesaplayabiliriz:

$$x_{18} = 9369319/6625109 = 1{,}414213562...$$

Aslında $\sqrt{2}$'ye 18'inci terimden çok daha çabuk milyarda 1 kadar yaklaşırız, yukardaki eşitsizliklerde oldukça hoyrat davrandık, daha ince bir yaklaşım daha güzel sonuçlar verir.

Burada önemli olan nokta şu: Eğer x_0'ı kesirli bir sayı seçersek, hesaplanabilen her x_n elbette kesirli bir sayı olur. x_n kesirli sayısının payını ve paydasını hesaplamanın kolay bir yolu var:

$$p_{n+1} = p_n + 2q_n$$
$$q_{n+1} = p_n + q_n$$

olarak tanımlarsak,

$$x_n = p_n/q_n$$

olarak tanımlanan dizi (*) eşitliğini sağlar. (Alıştırma.) Yukarda bulduğumuz

$$x_{18} = 9369319/6625109$$

için $p_0 = q_0 = 1$ aldık ve p_n ve q_n'leri $n = 18$'e kadar teker teker hesapladık.

Limit Kavramını Bilenlere: Yukardaki tanımla verilen $(x_n)_n$ dizisi eğer bir sayıya yakınsıyorsa, bu sayı $\pm\sqrt{2}$ olmak zorundadır. Nitekim, eğer limite x dersek ve (*) tanımında, x_{n+1} ve x_n yerine x koyarsak,

$$x = (x + 2)/(x + 1)$$

elde ederiz ve buradan da önce,

$$x(x + 1) = x + 2$$

ve sadeleştirdikten sonra da,

$$x^2 = 2$$

çıkar. Demek ki x ya $\sqrt{2}$ ya da $-\sqrt{2}$ olabilir.

Aslında, $x_0 = -\sqrt{2}$ dışında, dizinin hesaplanabildiği tüm x_0 değerleri için limit ancak $\sqrt{2}$ olabilir. Bunun pek o kadar kolay olduğunu sanmadığımız kanıtını okura bırakıyoruz. Bir başka ilginç alıştırma da dizinin hesaplanamayacağı tüm x_0 değerlerini bulmak. Sonuç çok hoş çıkıyor.

Alıştırma. Aynı şeyi $\sqrt{2}$ yerine $\sqrt{3}$ için yapmaya çalışın, örneğin $|x - \sqrt{3}| < 10^{-9}$ eşitsizliğini sağlayan bir x kesirli sayısı bulun.

Karekök İşareti

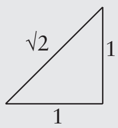
√ işaretinin tarihi 1525'e uzanır. Bu simgeye benzer bir simge, köklü sayılar için Alman Matematikçi Christoff Rudolff (1499-1545) tarafından **Coss** adlı kitabında kullanılmıştır.

Coss, Almanca dilinde yayımlanmış ilk cebir kitabıdır.

Coss, *cosa*'dan gelir. *Cosa* da, "bilinmeyen" anlamına kullanılan "şey"in Latincesidir. Cebircilere uzunca bir zaman bu yüzden "kosistler" denirdi. Cebire de "kosik sanat" denmiştir.

$\sqrt{2}$'nin Öyküsü

Yunanlı filozof Aristo'ya (MÖ 384-322) göre, $\sqrt{2}$'nin kesirli olmadığını ilk kez MÖ 430 yıllarında Pisagor anlamıştır.



Pisagor olmasa da, bu buluşun bir felsefe ekolü olan Pisagorcular tarafından bulunduğu kesin. Bu buluş Pisagorcuların felsefesinin ve inancının temelini yıkıyordu. Pisagorculara göre var olan her şeyin temeli doğal sayılardı ve her şey (örneğin her uzunluk) doğal sayılar ya da doğal sayıların doğal sayılara bölünmesiyle (yani kesirli sayılarla) ifade edilebilirdi. Ama iki kenarı 1 uzunluğunda olan bir diküçgenin hipotenüsünün uzunluğu $\sqrt{2}$'ydi ve $\sqrt{2}$ kesirli bir sayı değildi. Bu yüzden Pisagorcular uzunca bir süre $\sqrt{2}$'nin kesirli olmadığını bir sır olarak saklamışlardır.

Öklid'in (MÖ 325-265) ünlü **Elemanlar** adlı eserinin 10'uncu cildinde tamkare olmayan her kesirli sayının karekökünün kesirli bir sayı olmadığını kanıtlamıştır.

7C. Kesirli Sayılar Kümesinin Kusurları

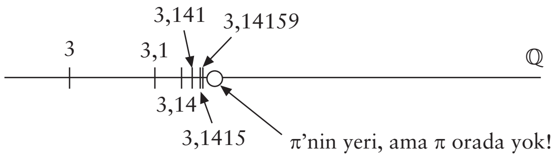
Bir önceki bölümde, kesirli bir sayı olmayan √2'ye çok çok yaklaşan bir kesirli sayılar dizisi bulmuştuk. Bu kesirli sayı dizisi, √2'ye erişmek için elinden geleni yapıyordu. Hatta "sonsuzda" √2 olmak için yanıp tutuşuyordu ama √2 orada olmadığı için (çünkü √2 kesirli bir sayı değil) sonsuzda bile √2 olamıyordu...

Sadece √2'ye değil, herhangi bir gerçel sayıya yakınsamaya çalışan bir, hatta birden çok kesirli sayı dizisi bulabiliriz. Örneğin,

$$x_0 = 3$$
$$x_1 = 3{,}1$$
$$x_2 = 3{,}14$$
$$x_3 = 3{,}141$$
$$x_4 = 3{,}1415$$
$$x_5 = 3{,}14159$$
$$\ldots$$

dizisi belli ki π sayısına yakınsamak üzere yola çıkmıştır ama hiçbir zaman π sayısına eşit olamayacaktır, "sonsuzda" bile, çünkü π kesirli bir sayı değildir[1] ve orada yoktur! Bu dizi sürekli olarak artıyor ve giderek daha fazla π'ye yaklaşıyor ve

1 π'nin kesirli sayı olmadığını kanıtlamak √2'nin kesirli sayı olmadığını kanıtlamaktan daha zordur.



sonsuzda olmak istediği yere gelince, bir de bakıyor ki o sayı orada yok! Çünkü dünyası ℚ'den ibaret! Hicran!

Kesirli sayıların yukardaki gibi bir resmini yaparsak, π'nin olması gerektiği yerde bir delik görürüz. √2'nin yerinde de yeller esiyordur. Kesirli sayılarda daha birçok delik vardır. Hatta kesirli sayılarda kesirli sayıdan çok daha fazla delik vardır!

İşte kesirli sayılar kümesinin en büyük kusuru bu delikler ve bu deliklerin çokluğudur. Notların geri kalan bölümünde kesirli sayıların deliklerini doldurarak gerçel sayıları elde edeceğiz.

Daha kolay anlaşılan bir örnek verelim:

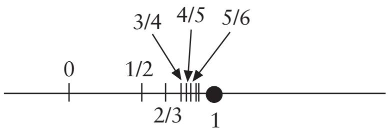
$$1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \ldots$$

dizisi 0'a giderek daha çok yaklaşır ve ilerde tanımlayacağımız anlamda ℚ'da 0'a yakınsar. Ama ℚ yerine 0'ı atıp $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ kümesinde ya da (0, 1] aralığında çalışırsak, bu dizi 0'a yakınsamak için elinden gelen her şeyi yapar ama, 0 orada olmadığından, $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ya da (0, 1] kümesinde 0'a yakınsayamaz...

Kesirli sayıların bir başka kusurunu da bulalım. Şu kesirli sayı kümesini ele alalım:

$$A = \{0, 1/2, 2/3, 3/4, 4/5, 5/6, \ldots\}.$$

Bu kümede, $n \in \mathbb{N}$ için, $n/(n+1)$ biçiminde yazılan kesirli sayılar bulunuyor. A'nın her sayısı 1'den küçük elbet; 2'den de küçükler. Bu yüzden 1 ve 2'nin A'nın ***üstsınırı*** oldukları söylenir. A'nın katrilyonlarca, hatta daha da fazla üstsınırı vardır: 1'den büyükeşit her sayı A'nın bir üstsınırıdır. Ama 1'in bu üstsınırlar arasında bir ayrıcalığı vardır: 1, A'nın üstsınırlarının en küçüğüdür.



Bir A sayı kümesinin üstsınırlarının en küçüğüne ***en küçük üstsınır*** denir ve bu sayı sup(A) ya da eküs(A) olarak yazılır. Yukardaki örnekte, sup(A) = 1. Bunun matematiksel kanıtını okura alıştırma olarak bırakıyoruz.

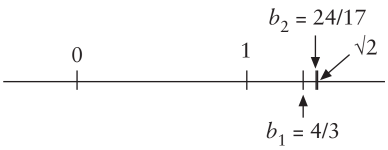
Şimdi, $b_0 = 0$ olmak üzere,

$$b_{n+1} = \frac{3b_n + 4}{2b_n + 3}$$

ilişkisiyle tanımlanmış $(b_n)_n$ kesirli sayı dizisini ele alalım. Dizinin ilk dört terimini yazalım:

$$b_0 = 0$$
$$b_1 = 4/3$$
$$b_2 = 24/17$$
$$b_3 = 140/99$$

Dikkat ettiyseniz (etmediyseniz de kolayca kanıtlayabilirsiniz) b_n, geçen bölümde tanımlanan x_{2n}'ye eşit. Dolayısıyla $(b_n)_n$ dizisi de $(x_n)_n$ dizisi gibi (henüz olmayan!) √2'ye yakınsamaya



çalışır. Ayrıca $(b_n)_n$ dizisi sürekli artan bir dizidir. (Alıştırma. Önce tümevarımla $b_n^2 < 2$ eşitsizliğini kanıtlayın, ardından, $b_n < b_{n+1}$ eşitsizliğini.) Şimdi,

$$B = \{b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots\}$$

olsun. B'deki her eleman √2'den küçüktür, dolayısıyla √2, B'nin bir üstsınırıdır. √2'nin B'nin en küçük üstsınırı olduğu da kolaylıkla kanıtlanır:

$$\sup(B) = \sqrt{2}.$$

Kanıtın tek zorluğu √2'nin henüz var olmayışıdır! Bu zorluktan kaçınmak istiyorsanız, geçen bölümde yaptığımız gibi, $(b_n)_n$ dizisinin karesinin 2'ye yakınsadığını kanıtlayabilirsiniz.

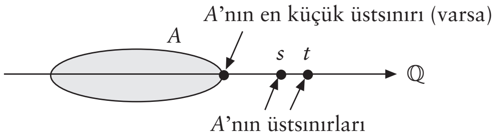
Ama √2 yoksa, B'nin en küçük üstsınırının √2 olduğunu söyleyebilir miyiz?

En küçük üstsınır tanımımızda bir sorun var. “Üstsınır” ve “en küçük üstsınır” kavramları mutlak kavramlar değildir, göreceli kavramlardır. $\mathbb{Q}$’de üstsınırla (henüz tanımlamadığımız) $\mathbb{R}$’de üstsınır aynı şey demek değildir. sup(B) yazmak yerine kavramın göreceliğini gösteren $\sup_{\mathbb{Q}}(B)$ ve $\sup_{\mathbb{R}}(B)$ yazmak gerekirdi.

B’nin $\mathbb{R}$’de en küçük üstsınırı $\sqrt{2}$’dir. Ama B’nin $\mathbb{Q}$’de en küçük üstsınırı yoktur. Yani $\sup_{\mathbb{R}}(B) = \sqrt{2}$’dir ama $\sup_{\mathbb{Q}}(B)$ yoktur! Çünkü $\sqrt{2}$ kesirli bir sayı değildir.

Üstsınır ve en küçük üstsınır tanımlarımızı gözden geçirelim:

$A \subseteq \mathbb{Q}$ ve $s \in \mathbb{Q}$ olsun. Eğer her $a \in A$ için, $a \le s$ eşitsizliği doğruysa, s’ye A’nın ($\mathbb{Q}$’de) ***üstsınırı*** denir. Eğer s, A’nın bir üstsınırıysa, s’den büyük her t kesirli sayısı da A’nın bir üstsınırıdır



elbette. Örneğin, 1 ve 1’den büyük her sayı hem (0, 1) hem de [0, 1] aralığının üstsınırıdır. Öte yandan $\mathbb{Z}$’nin $\mathbb{Q}$’de üstsınırı yoktur. Her kesirli sayı boşkümenin bir üstsınırıdır. (Neden?) Üstsınırların en küçüğüne, eğer varsa, olmayabilir çünkü, ($\mathbb{Q}$’de) ***en küçük üstsınır*** adı verilir.

Yani $s \in \mathbb{Q}$ sayısının A’nın en küçük üstsınırı olması için, önce A’nın bir üstsınırı olması, sonra A’nın her üstsınırından küçükeşit olması gerekir. Eğer bir kümenin en küçük üstsınırı varsa, bu en küçük üstsınır ancak bir tane olabilir: Eğer s ve t birer en küçük üstsınırsa, s en küçük üstsınır, t de bir üstsınır olduğundan, $s \le t$ olmak zorundadır; aynı nedenden $t \le s$ olmak zorunda; demek ki $s = t$.

Bir $A \subseteq \mathbb{Q}$ kümesinin $\mathbb{Q}$’deki en küçük üstsınırı $\sup_{\mathbb{Q}}(A)$ olarak gösterilir. Ama dikkat! $\sup_{\mathbb{Q}}(A)$ olmayabilir; olduğunda da A’nın bir elemanı olabilir de olmayabilir de. Örneğin

$$\sup_{\mathbb{Q}}((0, 1)) = 1 \notin (0, 1)$$

ama

$$\sup_{\mathbb{Q}}((0, 1]) = 1 \in (0, 1].$$

Yukardaki paragraflarda $\mathbb{Q}$'leri silip yerine $\mathbb{R}$ yazarsanız, $\mathbb{R}$'de üstsınır ve $\mathbb{R}$'de en küçük üstsınır kavramlarını elde edersiniz. (Tabii $\mathbb{R}$'nin ne demek olduğunu sezgisel olarak bildiğinizi varsayıyoruz burada, matematiksel olarak $\mathbb{R}$ henüz tanımlanmadı.)

Bir altkümenin en küçük üstsınırı olması için, her şeyden önce üstsınırı olmalıdır. Üstsınırı olmayan bir kümenin en küçük üstsınırı da olamaz.

Şimdi canalıcı soruyu soralım: Üstsınır olması en küçük üstsınır olması için yeterli midir?

Yanıt olumsuz: Boşkümenin üstsınırları vardır ama en küçük üstsınırı yoktur!

Peki aynı soru boş olmayan kümeler için doğru mu? Belli ki $\mathbb{Q}$'de bu doğru değil. Yukardaki B kümesinin üstsınırı var, örneğin 2, B'nin bir üstsınırıdır, ama B'nin $\mathbb{Q}$'de en küçük üstsınırı yok.

Yani $\mathbb{Q}$'de üstten sınırlı ama en küçük üstsınırı olmayan altkümeler vardır. Bu, $\mathbb{Q}$'nün büyük kusurlarından biridir ve tahmin edileceği gibi bir önceki büyük kusura eşdeğerdir. Bu iki kusurdan biri düzeltilirse, diğeri de kendiliğinden düzelir.

Öte yandan boş olmayan bir altkümenin $\mathbb{R}$'de üstsınırının olması, en küçük üstsınırının da olması anlamına gelir. Yani $\mathbb{R}$'de üstten sınırlı olan ve boşküme olmayan her altkümenin en küçük üstsınırı vardır. Tabii $\mathbb{R}$'yi henüz tanımlamadığımızdan bunu şu an kanıtlayamayız. $\mathbb{R}$'yi tanımladığımızda ilk işimiz bu önemli olguyu kanıtlamak olacak.

Son olarak bir elemanın $\sup_{\mathbb{Q}}(A)$ olması için gerek ve yeter koşulları görelim.

Önsav 7C.1. *$A \subseteq \mathbb{Q}$ ve $s \in \mathbb{Q}$ olsun. s'nin A'nın en küçük üstsınırı olması için,*

1. *Her $a \in A$ için, $a \leq s$,*
2. *Her $\varepsilon > 0$ kesirli sayısı için, $s - \varepsilon < a$ eşitsizliğini sağlayan bir $a \in A$ vardır*

koşulları gerek ve yeter koşullardır.

Kanıt: Birinci koşul s'nin A'nın bir üstsınırı olduğunu söylüyor. İkinci koşul da s'den küçük hiçbir sayının A'nın bir üstsınırı olmadığını söylüyor. Demek ki iki koşul birden s'nin A'nın en küçük üstsınırı olduğunu söylüyor. □

7D. Gerçel Sayıları Belirleyen Özellikler

Geçen bölümde kesirli sayıların iki önemli kusurunu ortaya koymuştuk. Bu yazılarda bu iki kusuru düzelterek gerçel sayıları yaratacağız.

Kesirli sayıların birinci kusuru $\sqrt{2}$, π gibi sayıların olmamasıydı. Bu sayıların yerleri boş, oralarda delikler var... Gene de bu olmayan sayılara kesirli sayılarla istediğimiz kadar yaklaşabiliriz, o olmayan sayıya ulaşmak için can atan kesirli sayı dizileri bulabiliriz. Bunu gördük.

Kesirli sayıların ikinci kusuru ise üstten sınırlı ve boş olmayan her kesirli sayı kümesinin bir en küçük üstsınırının olmamasıydı. Bazı kesirli sayı kümelerinin en küçük üstsınırları vardır, ama hepsinin yoktur. Geçen bölümde bunlara örnekler gördük.

Bu iki kusurdan birini giderirsek, diğeri de kendiliğinden giderilmiş olacak.

Birinci kusuru gidermek için bir yere yakınsamaya can atan diziler kullanılır. Bu tür dizilere ***temel diziler*** adı verilir. Matematiksel tanımları daha sonraki bölümlerde göreceğiz.

İkinci kusuru gidermek için de ***Dedekind kesitleri*** denilen kesirli sayı kümeleri kullanılır.

İki yöntem de birbirine matematiksel anlamda eşdeğerdir. Bir yöntemle kurulan gerçel sayılar kümesiyle diğer yöntemle kurulan gerçel sayılar kümesi arasında matematiksel olarak hiçbir ayrım yoktur. Bunu da daha sonraki bölümlerden birinde kanıtlayacağız.

Dedekind kesitleri yöntemi temel dizileri kullanan yöntemden çok daha sadedir. Ama temel diziler yöntemi de çok öğreticidir. Biz temel dizileri kullanan yöntemi seçeceğiz. Dedekind kesitlerinden bir başka bölümde sözedeceğiz.

($\mathbb{Q}$, +, ×, ≤, 0, 1) yapısı sıralı bir cisimdir, yani aşağıdaki özellikleri sağlar. ($\mathbb{R}$, +, ×, ≤, 0, 1) yapısı da sıralı bir cisim olacak, ancak $\mathbb{Q}$'nün yukarda sözettiğimiz kusurları olmayacak. Bu kusurları olmayan sıralı bir cisim, "öz itibarıyla biriciktir". Bu da kanıtlanacak.

Sıralı Cizimler