26. Zorn Önsavı'nın Birkaç Cebirsel Uygulaması

Bu kısımda Zorn Önsavı'nın çeşitli uygulamalarını verceğiz. Seviyesi teoremi anlamaya yetmeyen okur, sorun etmeden o bölümü atlasın, nasıl olsa ileride kullanılmayacak.

26.1. Maksimal İdealler

Bir halkanın en az iki ideali vardır: 0 (yani $\{0\}$) ve R. Dolayısıyla R, bir halkanın maksimal idealidir. Bu yüzden, "maksimal ideal" nitelemesi, "maksimal özideal" anlamına kullanılır. İlk teoremimiz maksimal özideallerin olduğunu söyleyecek.

Teorem 261 [ZFC]. *R değişmeli ve birim elemanlı bir halka olsun. $I \lhd R$ herhangi bir özideal olsun. O zaman R'nin I'yı içeren maksimal bir ideali vardır.*

Kanıt: $Z = \{J \lhd R : I \subseteq J$ ve $J \neq R\}$ olsun. Z'yi altküme olma ilişkisine göre yarısıralayalım:

$$J_1 \leq J_2 \Leftrightarrow J_1 \subseteq J_2.$$

$I \in Z$ olduğundan $Z \neq \emptyset$. Zorn Önsavı'nı uygulamak amacıyla, Z'nin tümevarımsal bir küme (Bölüm 23.1) olduğunu, yani Z'nin her zincirinin bir üstsınırı olduğunu kanıtlayalım. $(J_k)_{k \in K}$, Z'den alınmış herhangi bir zincir olsun. Bu şu demek-tir: $k, \ell \in \kappa$ için ya $J_k \subseteq J_\ell$ ya da $J_\ell \subseteq J_k$. Şunu kanıtlayacağız: $\bigcup_{k\in\kappa} J_k \in Z$. O zaman muradımıza ereceğiz çünkü her $k \in \kappa$ için $J_k \subseteq \bigcup_{k\in\kappa} J_k$ olduğundan, yarısıralamanın tanımına göre

$$J_k \leq \bigcup_{k\in\kappa} J_k$$

olur.

• Elbette $I \subseteq \bigcup_{k\in\kappa} J_k$.

• $\bigcup_{k\in\kappa} J_k$'nın bir ideal olduğunu kanıtlayalım. $a, b \in \bigcup_{k\in\kappa} J_k$ ve $r \in R$ olsun. $a \in J_k$, $b \in J_\ell$ içindeliklerini sağlayan $k, \ell \in \kappa$ seçelim. Diyelim $J_\ell \subseteq J_k$. O zaman hem a hem de b, J_k'nin elemanı olurlar. J_k bir ideal olduğundan,

$$a + b \in J_k \subseteq \bigcup_{k\in\kappa} J_k \text{ ve } ra \in J_k \subseteq \bigcup_{k\in\kappa} J_k$$

olur. Bu da $\bigcup_{k\in\kappa} J_k$ kümesinin bir ideal olduğunu kanıtlar.

• Son olarak $\bigcup_{k\in\kappa} J_k$ idealinin R'ye eşit olmadığını kanıtlayalım. Bunu kanıtlamak için, şu basit olguyu kullanacağız: Bir R halkasının bir J idealinin R'ye eşit olmaması için "$1 \notin J$" yeter ve gerek koşuldur. J_k ideallerinin hiçbiri R'ye eşit olmadığından, 1 elemanı hiçbirinde olamaz, dolayısıyla 1 elemanı J_k ideallerinin bileşiminde de olamaz, yani $1 \notin \bigcup_{k\in\kappa} J_k$.

Zorn Önsavı'nın koşulları gerçekleştiğinden, Zorn Önsavı'nı uygulayabiliriz. Z kümesinin maksimal bir elemanı vardır. Bu maksimal eleman elbette bir maksimal ideal olmak zorunda. Aynı zamanda I'yı da içerir. □

Notlar:

1. Benzer teorem gruplar için doğru değildir. Örneğin $\mathbb{Q}$'nün maksimal bir altgrubu yoktur. Genel olarak, ($\mathbb{Q}$ gibi) bölünebilir bir grubun maksimal altgrubu olamaz. (Bkz. Alıştırma 3.)

2. Teoremde halkanın birim elemanı olma koşulundan vazgeçemeyiz. Örneğin R halkasını şöyle tanımlayalım: Küme olarak $R = \mathbb{Q}$ olsun. Toplama, bildiğimiz toplama olsun. Çarpmayı, her $x, y \in R$ için $xy = 0$ olarak tanımlayalım. Bir halka elde ederiz. (Dikkat, bu halkada $1x = 0$'dır.) Bu halkanın idealleri aynen Q'nün altgruplarıdır. Bir önceki nottan R'nin maksimal ideali olmadığı görülür.

3. Teoremi elbette $I = 0$ idealine uygulayabiliriz.

4. K herhangi bir cisim olsun. Halkamız $R = \prod_{\mathbb{N}} K$ olsun (Kartezyen çarpım.) $I = \bigoplus_{\mathbb{N}} K$ olsun. O zaman I, R'nin bir özidealidir. Teoreme göre I'yı içeren maksimal bir ideal olmalı. Ne siz ne de başka biri, böyle bir idealin ne olduğunu anlayamaz. Ama vardır! R'nin idealleri ültrafiltrelerle verilir. Ültrafiltreler de başka bir bölümün konusu olacak. Öte yandan, sabit bir $n_0 \in \mathbb{N}$ için,

$$I_{n_0} = \{(x_n)_n : x_{n_0} = 0\},$$

maksimal bir idealdir. Bu idealler dışındaki her maksimal ideal I idealini içermek zorundadır (bkz. Alıştırma 6), dolayısıyla betimlenemezler.

4. Kanıtlanan teoremdeki maksimal ideali bulmak için.

Alıştırmalar

1. G bir grup olsun. Eğer her $g \in G$ ve $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ için $h^n = g$ eşitliğini sağlayan bir $h \in G$ varsa, G'ye ***bölünebilir grup*** denir. **1a.** $\mathbb{Q}$'nün (toplama altında) bölünebilir bir grup olduğunu kanıtlayın. **1b.** Bölünebilir ve sonlu bir grubun 1 olmak zorunda olduğunu kanıtlayın. **1c.** G bölünebilirse ve $H \triangleleft G$ ise G/H'nin de bölünebilir olduğunu kanıtlayın.

2. G değişmeli bir grup, H de G'nin (G'ye eşit olmayan) maksimal bir altgrubu olsun. G/H'nin bir p asalı için $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$'ye eşit olduğunu kanıtlayın.

3. Değişmeli bir grubun maksimal altgrubu olamayacağını kanıtlayın. (İlk iki alıştırmadan çıkar.) Dolayısıyla Q'nün maksimal altgrubu olamaz.

4. X, bir G grubunun bir altkümesi olsun. Eğer $1 \notin X$ ise, G'nin $X \cap H = \emptyset$ eşitliğini sağlayan maksimal bir altgrubu olduğunu kanıtlayın. Ama dikka,t bu H altgrubu maksimal bir altgrup değildir, sadece G'nin $X \cap H = \emptyset$ eşitliğini sağlayan altgrupları arasında maksimaldir, yani H'den daha büyük bir altgrup X ile kesişmek zorundadır.

5. Yukardaki örneği $G = \mathbb{Q}$ ve $X = \{1\}$ altkümesine uygulayalım. (Dikkat: $\mathbb{Q}$'nün etkisiz elemanı 0'dır.) O zaman yukardaki alıştırmaya göre $\mathbb{Q}$'nün 1'i içermeyen maksimal bir altgrubu vardır. Ancak bu örnekte bunu kanıtlamak için Zorn Önsavı'na ihtiyacımız yok. Nitekim, bir p asalı için,

$$H = \{pa/b : a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}\},$$

Q'nün 1'i içermeyen maksimal bir altgrubudur. Bunu kanıtlayın.

6. K herhangi bir cisim, $R = \prod_{\mathbb{N}} K$ ve $I = \bigoplus_{\mathbb{N}} K$ olsun. $n_0 \in \mathbb{N}$ için,

$$I_{n_0} = \{(x_n)_n : x_{n_0} = 0\},$$

tanımını yapalım. I_{n_0}'ın maksimal bir ideal olduğunu kanıtlayın. Bu I_{n_0}'lar dışındaki her maksimal idealin I'yı içermek zorunda olduğunu kanıtlayın.

26.2. Vektör Uzaylarının Tabanı

K bir cisim ve V, K üzerine bir vektör uzayı olsun. $X \subseteq V$ olsun.

Eğer X'in her sonlu ve birbirinden değişik $v_1, \ldots, v_n$ elemanı ve her $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ için,

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$$

önermesi sağlanıyorsa, X'e ***doğrusal bağımsız küme*** adı verilir. $\emptyset$ doğrusal bağımsızdır.

Örnekler: Doğrusal bağımsız bir kümede 0 vektörü olamaz. Eğer $v \in V \setminus \{0\}$ ise $\{v\}$ doğrusal bağımsızdır. Eğer $v \in V \setminus \{0\}$ ve $w \in V \setminus Kv$ ise ise $\{v, w\}$ doğrusal bağımsızdır. Doğrusal bağımsız bir kümenin her altkümesi doğrusal bağımsızdır. Bir kümenin doğrusal bağımsız olması için yeter ve gerek koşul, kümenin her sonlu altkümesinin doğrusal bağımsız olmasıdır. Bu, önemli bir özelliktir ve bundan alabildiğine yararlanacağız birazdan. Bu tür özelliklere "sonlu karakterli" özellik denir.

Bir küme ne kadar kalabalıksa, doğrusal bağımsız olması o kadar güçtür.

Eğer V'nin her v elemanı, $v_1, ..., v_n \in X$ ve $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ için,

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$$

olarak yazılıyorsa, X'e (V'yi) ***geren*** ya da ***üreten küme*** denir.

Örnekler: V, V'yi gerer. Geren bir kümenin her üstkümesi de V'yi gerer. Bir küme ne kadar küçükse, geren küme olması o kadar güçtür.

Eğer X hem lineer bağımsız hem de geren bir kümeyse, X'e V'nin ***tabanı*** adı verilir.

Teorem 26.2. *Her vektör uzayının bir tabanı vardır. Daha da genel olarak bir vektör uzayının her doğrusal bağımsız kümesi, maksimal bir doğrusal bağımsız kümeye genişletilebilir ve maksimal bir doğrusal bağımsız küme bir tabandır.*

Kanıt: Vektör uzayımıza V diyelim. $X \subseteq V$, doğrusal bağımsız bir altküme olsun.

$$Z = \{Y \subseteq V : X \subseteq Y \text{ ve } Y \text{ doğrusal bağımsız}\}$$

olsun. Z'yi altküme olma ilişkisiyle sıralayalım. $X \in Z$ olduğundan Z boşküme değildir. Şimdi Z'nin tümevarımsal olduğunu kanıtlayalım. $(Y_k)_{k\in\kappa}$, Z'den alınmış herhangi bir zincir olsun. $\bigcup_{k\in\kappa} Y_k \in Z$ içindeliğini kanıtlayacağız. Bileşim elbette X'i içeriyor. Şimdi bu bileşimden, sonlu sayıda birbirinden değişik vektör alalım, diyelim $v_1, ..., v_n$. Her $i = 1, ..., n$ için, $v_i \in Y_{k_i}$ içindeliğini sağlayan bir $k_i \in \kappa$ bulalım. Bu sonlu sayıdaki

$$Y_{k_1}, ..., Y_{k_n}$$

arasından biri en büyüğüdür, diyelim Y_k. O zaman $v_1, ..., v_n \in Y_k$ olur ve dolayısıyla $v_1, ..., v_n$ arasında trişkadan olmayan doğrusal bir bağımlılık olamaz. Demek ki $\bigcup_{k\in\kappa} Y_k$ doğrusal bağımsızdır ve Z'dedir. $Y_k \subseteq \bigcup_{k\in\kappa} Y_k$ olduğundan, bundan Z'nin tümevarımsal bir küme olduğu çıkar. Zorn Önsavı'na göre Z'nin maksimal bir elemanı vardır. Bu maksimal eleman elbette maksimal doğrusal bağımsız kümedir ve X'i içerir. Şimdi böyle bir kümenin taban olduğunu kanıtlayalım.

Y maksimal lineer bağımsız bir küme olsun. Diyelim v vektörü, hiçbir $v_1, ..., v_n \in Y$ ve hiçbir $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ için,

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$$

olarak yazılamıyor. Bu durumda $Y \cup \{v\}$ kümesinin lineer bağımsız olduğunu kanıtlamak kolaydır (ama bunun için K'nın bir cisim, daha doğrusu bir bölüm halkası olduğunu kullanmak gerekir. Şimdiye kadar yaptıklarımız sadece vektör uzayları için değil, modüller için de geçerlidir. Ama bundan sonra yapacaklarımız sadece vektör uzayları için geçerlidir.) Nitekim,

$v_1, ..., v_n \in Y$ ve $\lambda_1, ..., \lambda_n, \lambda \in K$ için,

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n + \lambda v = 0$$

varsayımını yapalım. Eğer $\lambda = 0$ ise, $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$ eşitliğinden ve Y'nin doğrusal bağımsızlığından $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ elde edilir. Eğer $\lambda \neq 0$ ise, $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n + \lambda v = 0$ eşitliğinden,

$$v = (-\lambda^{-1}\lambda_1) v_1 + \cdots + (-\lambda^{-1}\lambda_n) v_n$$

bulunur, ki bu da v üzerine yaptığımız varsayımla çelişir. Demek ki $Y \cup \{v\}$ doğrusal bağımsızdır, ki bu da Y'nin maksimalliğiyle çelişir. □

Bir vektör uzayının tabanının "eleman sayısı"nın (yani kardinalitesinin) tabandan bağımsız olduğu da kanıtlanabilir ama bunu yapmak için gereken "kardinal sayıları"nı henüz işlemedik. Öte yandan bu sonucu kardinal konusuna hiç dokunmadan da yazıp kanıtlayabiliriz (ama kanıtlamayacağız.)

Teorem 26.3. *Bir vektör uzayının iki tabanı arasında bir eşleme vardır.*

Zorn Önsavı Alıştırmaları

Bu alıştırmalar kolay olmayabilecekleri gibi, bazıları bazı öğrencilerin seviyesini aşabilir. Ama her biri matematikte önemlidir.

1. P bir asallar kümesi olsun. Eğer bir grubun elemanlarının derecesinin asal bölenleri P kümesindeyse, o zaman gruba ***P-grubu*** adı verilir. Her grubun maksimal bir P-altgrubu olduğunu kanıtlayın. (Eğer $P = \{p\}$ ise P-altgrubu yerine ***Sylow p-altgrubu*** denir.)

2. Değişmeli, bölünebilir ve burması olmayan ($g^n = 1$ ise ya $g = 1$ ya da $n = 0$) bölünebilir bir grubun $\bigoplus_I \mathbb{Q}$ grubuyla eşyapısal olduğunu kanıtlayın. (İpucu: Teorem 26.2)

3*. G değişmeli bir grup olsun. $H \leq G$ bölünebilir bir altgrup olsun. Bir K altgrubu için $G = H \oplus K$ eşitliğini kanıtlayın. (İpucu: Zorn Önsavı'nı $\{K \leq G : K \cap H = 1\}$ kümesine uygulayın.) Değişmeli gruplarla $\mathbb{Z}$-modüller arasında bir ayrım olmadığını anımsayarak, bu alıştırmayı tek üreteçli idealleri olan bir bölüm halkası (TÜİB) üzerine bir modüle uyarlayıp kanıtlayın.

4*. p bir asal ve G, elemanlarının en yüksek mertebesi p^n olan bir grup olsun. H, G'nin $\bigoplus_I \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ grubuna eşyapısal bir altgrubu olsun. Bir K altgrubu için $G = H \oplus K$ eşitliğini kanıtlayın. (İpucu: Zorn Önsavı'nı $\{K \leq G : K \cap H = 1\}$ kümesine uygulayın.) Değişmeli gruplarla $\mathbb{Z}$-modüller arasında bir ayrım olmadığını anımsayarak, bu alıştırmayı bir TÜİB üzerine modüller için kanıtlayın.

5*. Yukardaki alıştırmayı kullanarak, elemanlarının en büyük mertebesinin sonlu olduğu değişmeli burmalı grupların, döngüsel grupların direkt toplamına eşyapısal olduğunu kanıtlayın.

6*. Bölünebilir ve değişmeli bir p-grubun, bir I göstergeç kümesi için Prüfer p-gruplarının direkt toplamına eşyapısal olduğunu kanıtlayın.

7*. Bölünebilir ve değişmeli bir grubun bazı göstergeç kümeleri için,

$$\left(\oplus_{I_0}\mathbb{Q}\right)\oplus\left(\oplus_{p\text{ asal}}\left(\oplus_{I_p}\mathbb{Z}_{p^\infty}\right)\right)$$

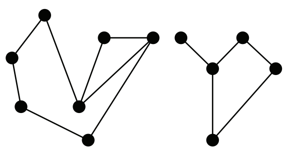
grubuyla eşyapısal olduğunu kanıtlayın. (İpucu: T, grubun burmalı elemanlarından oluşan bir altgrubu olsun. Alıştırma 3'e göre bir $K \le G$ için $G = T \oplus K$. Alıştırma 2, K'nın ne olması gerektiğini söylüyor. T'yi asal bileşenlerine ayırıp her bileşene Alıştırma 6'yı uygulayın.)

8. $H \le G$ bir grup ve bir altgrubu olsun. Eğer

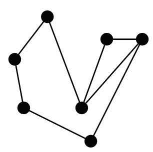
her $h \in H$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için, $h = x^n$ denkleminin G'de bir çözümü varsa H'de bir çözümü vardır

önermesi doğruysa H'ye ***G'de saf*** denir. G değişmeli bir grup ve H, G'nin saf bir altgrubu olsun ve H'nin en büyük mertebesinin sonlu olduğunu varsayalım. O zaman bir K altgrubu için $G = H \oplus K$ eşitliğini kanıtlayın. (İpucu: H'nin en büyük mertebesi üzerine tümevarımla. İlk olarak H'nin bir p asalı için bir p-grup olduğunu varsayabileceğimizi kanıtlayın. Eğer H'nin mertebesi p^n ise, $G^{p^n} \cap H = 1$ olur. Şimdi $Z = \{K \le G : G^{p^n} \le K$ ve $K \cap H = 1\}$ olsun. Zorn Önsavı'nı bu kümeye uygulayın.)

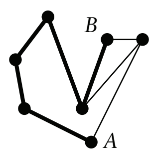
27. König Önsavı



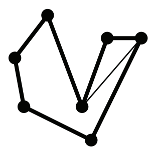
İki parçalı bir çizge



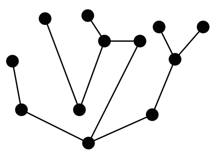
Tekparça bir çizge



A'dan *B*'ye giden bir yol

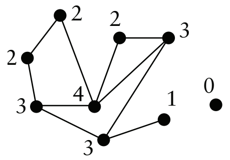


Bir döngü



Bir ağaç

Bir ***çizge***, noktalardan ve bazı nokta çiftleri arasına "çizilen" ***kenar***lardan ya da ***bağıntı***lardan oluşur. Bir noktanın bağlantılı olduğu noktalara o noktanın ***komşu***ları diyelim. Ardışık noktaların komşu oldukları bir noktalar dizisine ***yol*** denir. Herhangi bir noktadan herhangi bir başka noktaya sonlu sayıda noktadan oluşan bir yolla ulaşılabilen çizgelere ***tekparça çizge*** denir. Geçtiği bir noktadan bir daha geçmeyen yollara ***dal*** adı verilir. Başladığı noktada biten yollara



Noktaların dereceleri

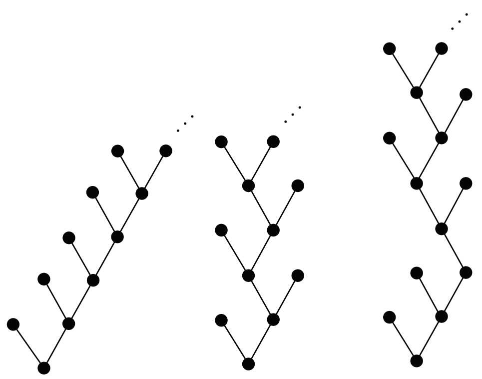
ise ***döngü*** denir. Döngüsü olmayan tekparça çizgelere ***ağaç*** denir. Bir ağaçta bir noktadan bir başka noktaya tek bir yol vardır, yoksa kolayca bir döngü elde edilir. Bir noktanın ***derece***si, o noktaya bağıntılı nokta sayısıdır. Bir noktanın derecesi sonsuz da olabilir, sonlu da. Bir noktanın bir başka noktaya ***uzaklığı*** o iki nokta arasındaki en kısa yolun uzunluğudur. Eğer iki nokta arasında yol yoksa, uzaklığın sonsuz olduğu söylenir; böyle bir durumda çizge tekparça olamaz elbet. Komşular arasındaki uzaklık 1'dir. Eğer her çizgede her noktanın derecesi sonluysa, bu çizgenin sabit bir noktasından uzaklığı n olan sonlu tane nokta vardır doğal olarak.

Şimdi artık teoremimizi yazabiliriz:

König Önsavı 27.1. *Sonsuz sayıda noktası olan ve her noktasının derecesi sonlu olan bir ağaçta sonsuz noktalı bir dal vardır.*

Kanıtı biraz geciktireceğiz.

Her şeyden önce, bunun doğruluğu çok açık bir teorem olduğunu söylemek gerekiyor. Ama kanıtı pek o kadar kolay değil. Kanıt, zorunlu olarak Seçim Aksiyomu'nu kullanır. Ancak



Hep sağdan giden dal sonsuzdur

Sağlı sollu giden dal sonsuzdur

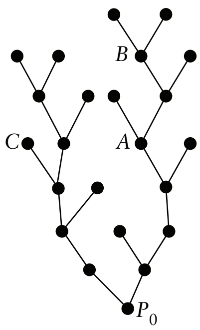
Sonsuz bir dal belli ki var, ama hangisi?

kanıtta Seçim Aksiyomu'nun tüm gücüne gerek yoktur. Seçim Aksiyomu'ndan daha hafif bir aksiyom da yeterlidir.

König Önsavı daha çok mantıkta kullanılır.

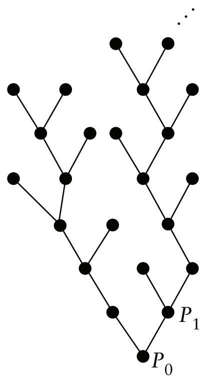
Kanıtın zorluğunu kavramak amacıyla, sonsuz sayıda noktası olan ve her noktasının derecesi sonlu olan birkaç ağaç çizip bu ağaçların her birinde sonsuz bir dal bulalım.

Aslında üç örneğin de aynı örnek olduğuna dikkatinizi çekerim. Kafa karıştırmak amacıyla değil, bir çizgede sağ sol (ya da alt üst) gibi kavramların olmadığına göstermek amacıyla aynı çizgeyi üç değişik biçimde çizdik. Eğer sağı solu iyice karıştırırsak, üçüncü çizgeyi elde ederiz ve bu çizgede sonsuz dalın hangisi olduğu pek belli değil. İşte Seçim Önsavı bu sonsuz dalın adresini vermekte kullanılacak.



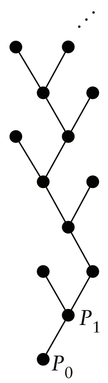
$A \leq B$, ama A ile C karşılaştırılamaz.

Bir ağacın herhangi bir noktasını seçmek, ağacın noktalarını yarısıralamamıza olanak sağlar. Bu yarısıralamayı açıklayalım, teoremin kanıtında ihtiyacımız olacak. Diyelim ağaçtan P_0 noktasını seçtik. Bu P_0 noktası, tanımlayacağımız sıralamada ağacın en küçük noktası olacak. Şimdi ağaçtan iki A ve B noktası seçelim ve $A \leq B$ ilişkisini tanımlayalım: $A \leq B$ ancak ve ancak B ile P_0 noktası arasındaki (tek) yol A'dan geçiyorsa. Bunun gerçekten bir yarısıralama olduğunun kanıtını okura bırakıyoruz. Büyük noktaları yukarıya, küçük noktaları aşağıya çizmek nerdeyse bir gelenek halini almıştır ve biz de bu geleneğe uyacağız.



Bu sıralamada bir dalın bir zincir olduğuna dikkatinizi çekeriz. (Bkz. Bölüm 22.1.)

Şimdi artık teoremimizi kanıtlayabiliriz.



Önsavın Kanıtı: Ağacımıza A adını verelim. Ağaçtan herhangi bir P_0 noktası alalım ve ağacı bu P_0 noktası ağacın en küçük noktası olacak şekilde yukarda açıklandığı gibi yarısıralayalım. Ağaç, tekparça bir çizge olduğundan, ağacın her noktasından bu P_0'a giden bir yol vardır. Bu yolların her biri elbette P_0'ın komşularının birinden geçer geçer. Ama P_0'ın derecesi sonlu olduğundan, P_0'ın sonlu sayıda komşusu vardır. Demek ki, P_0'ın öyle bir P_1 komşusu vardır ki, çizgenin sonsuz tane noktası P_0'a bu P_1 noktasından geçerek bağlanır. Şimdi tüm diğer noktaları atıp sadece bu noktaları (yani P_0 noktasını ve P_1 noktasından büyükeşit noktaları) ve aralarındaki bağıntıları tutalım. (Yandaki çizge, bir üstteki ağaçtan bu şekilde elde edilmiştir.) Kalan çizge de bir ağaçtır, çünkü sonuç olarak noktalarının her biri P_0'a (P_1'den geçen) bir yolla bağlıdır. Kalan ağaca A_1 diyelim. A_1 teoremdeki varsayımların hepsini sağlar. Şimdi, A_1 ağacının sonsuz tane noktasının her biri, P_1'in sonlu tane komşusundan birinden geçen bir yolla P_1'e bağlanır. Demek ki bu yollardan sonsuz tanesi P_1'in komşularından birinden geçecektir. P_1'in bu komşularından birini seçelim ve bu noktaya P_2 adını verelim. $P_2 \neq P_0$ elbette, hatta $P_0 < P_1 < P_2$. Şimdi çizgenin tüm noktalarını atıp P_0, P_1 ve P_2'den büyükeşit noktaları tutalım. Kalan çizgeye A_2 diyelim ve yukardaki yöntemi sürdürelim. Böylece tümevarımla, $P_0 < P_1 < P_2 < \ldots < P_n < \ldots$ noktaları tanımlanır. Bu noktalar elbette sonsuz bir dal oluştururlar..

Kanıt bitmiştir. □

Seçim Önsavı'nın tam olarak nerede kullanıldığı sanırım açıktır. Her P_n noktasından bir sonraki P_{n+1} noktasını bulmak için bir seçim yapıyoruz, belli bir özelliği olan noktalardan birini seçiyoruz.

Tümevarımsal kanıttan ve Seçim Aksiyomu'nun biraz gizlenerek kullanılmasından rahatsızlık duyan okur için Önsav'ın bir başka kanıtı verelim. Bunun için, Teorem 21.3'ü kullanacağız.

Önsavın İkinci Kanıtı: Ağacımıza gene A adını verelim. Ve gene ağaçtan herhangi bir P_0 noktası alıp ağacı bu P_0 noktası ağacın en küçük noktası olacak şekilde yarısıralayalım. Diyelim Önsav yanlış. O zaman yukardaki Teorem 21.3'ün (b) koşulu A ve üstünde tanımlanan yarısıralama için doğrudur. Demek ki, A'nın boş olmayan her altkümesinin maksimal bir elemanı vardır, dolayısıyla A'nın maksimal elemanları vardır. maksimal elemanlar arasından P_0'a en uzak elemanlardan birini seçelim. (Seçim Aksiyomu burada kullanılmıyor tabii! Seçim Aksiyomu'nu Teorem 21.3'ün kanıtında zaten kullandık.) Bu uzaklık n olsun. Demek ki, ağacın her noktasının P_0'a uzaklığı en fazla n'dir. Ama her noktasının derecesinin sonlu olan bir ağaçta, P_0'a uzaklığı en fazla n olan sonlu tane nokta vardır; demek ki ağaç sonludur. Çelişki. □

28*. Hahn-Banach Teoremi

İlksen Acunalp

Fonksiyonel analizin temel yapıtaşlarından biri olan ve kanıtında (kaçınılmaz olarak) Zorn Önsavı kullanılan ***Hahn-Banach Teoremi***'ni kanıtlayacağız.

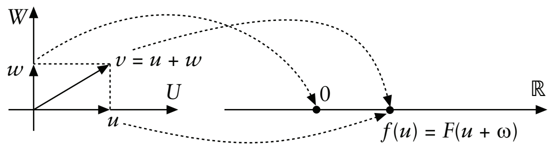
V, bir vektör uzayı, U da V'nin bir altuzayı olsun. (U'nun V'nin altuzayı olduğunu belirtmek için, alışılageldiği üzere $U \le V$ yazacağız.) Her $x, y \in U$ ve her $\lambda \in \mathbb{R}$ için,

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \text{ ve } f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

koşullarını sağlayan bir $f : U \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna U üzerine ***doğrusal fonksiyonel*** ya da kısaca ***fonksiyonel*** denir.

Eğer $F : V \to \mathbb{R}$ bir fonksiyonelse ve $U \le V$ ise, F'yi U'ya kısıtlarsak, U üzerine bir fonksiyonel elde ederiz elbet. U altuzayına kısıtlanmış bu fonksiyone $F_{|U}$ olarak gösterilir.

Bir fonksiyoneli bir U altuzayına kısıtlamak kolaydır, bunu herkes yapar. Ama V'nin bir U altuzayında tanımlanmış bir $f : U \to \mathbb{R}$ fonksiyonelini V'ye genişletmek çok daha zordur, Seçim Aksiyomu'nu gerektirir: W, U'yu V'de tümleyen bir altuzay olsun, yani $U \oplus W = V$ olsun. (Eğer V'nin boyutu sonsuzsa, W'nin varlığı ancak Seçim Aksiyomu'yla kanıtlanabilir.) Şimdi F'yi, her $u \in U$ ve $w \in W$ için, $F(u + w) = f(u)$ olarak tanımlayalım. F, V üzerine fonksiyoneldir ve f'yi U'dan V'ye genişletir.



U, V'ye eşit değilse, U üzerine tanımlanmış bir f fonksiyonelinin birden çok V'ye genişlemesi vardır.

V'nin bir U altuzayı üzerine tanımlanmış verilen bir

$$f : U \to \mathbb{R}$$

fonksiyonelini, başka bir koşul aramaksızın V'ye genişletmek, yukarda gördüğümüz gibi çözümü çok çok zor olmayan bir problemdir. Ancak, belli bir özelliği olan bir fonksiyoneli, bu özelliğini kaybetmeyecek biçimde genişletmek çok zor bir problem olabilir. Bu bölümde kanıtlayacağımız Hahn-Banach Teoremi işte bu türden bir problemin çözümüdür. Problem şu: Eğer $U \le V$ ise ve $f : U \to \mathbb{R}$ fonksiyoneli bir $p : V \to \mathbb{R}$ fonksiyoneli tarafından üstten sınırlıysa (yani her $u \in U$ için $f(u) \le p(u)$ ise), f'yi tüm uzaya gene p'yle üstten sınırlı olacak biçimde genişletebilir miyiz? Hahn-Banach Teoremi, bundan daha genel bir soruya olumlu yanıt verir:

Hahn-Banach Teoremi 28.1. *V bir vektör uzayı ve*

$$p : V \to \mathbb{R},$$

her $x, y \in V$ ve her $\lambda \in \mathbb{R}$ için,

$$p(x+y) \le p(x) + p(y) \text{ ve } p(\lambda x) = \lambda p(x)$$

özelliklerini sağlayan bir fonksiyon olsun. U, V'nin bir altuzayı ve $f : U \to \mathbb{R}$, her $u \in U$ için,

$$f(u) \le p(u)$$

eşitsizliğini sağlayan bir fonksiyonel olsun. O zaman, her $x \in V$ için,

$$F(x) \le p(x)$$

eşitsizliğini sağlayan ve f'yi genişleten (yani U*'ya kısıtlanışı f'yi veren) bir $F : V \to \mathbb{R}$ doğrusal fonksiyoneli vardır.*

Kanıt: Önce, Zorn Önsavı'nı uygulayacağımız $(\mathcal{Z}, \leq)$ yarısıralamasını tanımlayalım. $\mathcal{Z}$ kümesi,

$$\mathcal{Z} = \{(W, g) : U \leq W \leq V,\ g : W \to \mathbb{R} \text{ fonksiyonel, her } w \in W \text{ için } g(w) \leq p(w) \text{ ve her } u \in U \text{ için } g(u) = f(u)\}$$

olsun. Dikkat ederseniz, $\mathcal{Z}$, f'yi, p'yle üstten sınırlı olacak biçimde, U'yu içeren W altuzaylarına genişleten fonksiyoneller kümesi.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} & \\ U \arrow[u, "f"] & \leq W \arrow[ul, dashed, "g"'] \leq V \end{tikzcd}$$

$(U, f) \in \mathcal{Z}$'nin elemanı olduğundan $\mathcal{Z}$ boş küme değildir. Şimdi $\mathcal{Z}$ üzerine bir sıralama tanımlayalım. (W_1, g_1), (W_2, g_2) ise, $(W_1, g_1) \leq (W_2, g_2)$ ilişkisini,

"$W_1 \leq W_2$ ve g_1, g_2'nin W_1'e kısıtlanışıdır"

biçiminde tanımlayalım. Bunun bir yarısıralama olduğu tanı-

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} & & \\ U \arrow[u, "f"] & \leq W_1 \arrow[ul, dashed, "g_1"'] & \leq W_2 \arrow[ull, dashed, "g_2"'] \leq V \end{tikzcd}$$

mın her halinden ve yandaki şekilden belli. Şimdi $(\mathcal{Z}, \leq)$ sıralamasının her zincirinin bir üstsınırı olduğunu gösterelim, ki Zorn Önsavı'nı uygulayabilelim.

$\mathcal{Z}$'den herhangi bir $\mathcal{C}$ zinciri alalım.

M, $\mathcal{C}$ zincirinin tüm (W, g) elemanlarının W altuzaylarının bileşimi olsun.

M'nin V'nin bir altuzayı olduğunu savlayıp kanıtlıyoruz: $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ ve $m_1, m_2 \in M$ olsun. O zaman $\mathcal{C}$'nin iki (W_1, g_1) ve (W_2, g_2) elemanı için $m_1 \in W_1$ ve $m_2 \in W_2$ olur. W_1 ve W_2 altuzay olduklarından, $\alpha_1 m_1 \in W_1$ ve $\alpha_2 m_2 \in W_2$. Öte yandan, $\mathcal{C}$ bir zincir olduğundan,

$$\text{ya } (W_1, g_1) \le (W_2, g_2) \text{ ya da } (W_1, g_1) \le (W_2, g_2).$$

Demek ki, sıralamanın tanımından dolayı,

$$\text{ya } W_1 \le W_2 \text{ ya da } W_2 \le W_1.$$

Her iki durumda da bir $(W, g) \in \mathcal{C}$ için,

$$\alpha_1 m_1 \in W \text{ ve } \alpha_2 m_2 \in W.$$

Ama W bir altuzay olduğundan, bundan,

$$\alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 \in W \subseteq M$$

çıkar. Demek ki $\alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 \in M$ ve M, V'nin bir altuzayıdır.

Elbette, her $(W, g) \in \mathcal{C}$ için, $W \le M$'dir.

Şimdi bir $h : M \to \mathbb{R}$ fonksiyoneli tanımlayacağız. Bilene: h, $\mathcal{C}$ zincirinin tüm (W, g) elemanlarının g'lerinin bileşimi olacak [SKK]. Fonksiyonlar zincirinin bileşiminin ne demek olduğunu bilmeyenlere h'yi tanımlayalım: $m \in M$ olsun. O zaman M'nin tanımından dolayı, bir $(W, g) \in \mathcal{C}$ için, $m \in W$'dir. Şimdi $h(m)$'yi $g(m)$ olarak tanımlayalım. Yalnız bu tanımın geçerli olması için, $g(m)$'nin $\mathcal{C}$'nin (W, g) elemanına göre değişmediğini kontrol etmeliyiz. Nitekim eğer bir başka $(W_1, g_1) \in \mathcal{C}$ için, $m \in W_1$ ise, ya g, g_1'in ya da g_1, g'nin kısıtlaması olduğundan, $g(m) = g_1(m)$'tir. Dolayısıyla $h(m)$'yi $g(m)$ ya da $g_1(m)$ olarak tanımlamak arasında bir ayrım yoktur.

h'nin M üzerine bir fonksiyonel olduğu, M'nin altuzay olduğunun kanıtı gibidir. Ayrıntıları okura bırakıyoruz.

Her $(W, g) \in \mathcal{C}$ için, h fonksiyoneli g'nin M'ye bir genişletilmesidir. Bunun kolay kanıtını da okura bırakıyoruz. Bunun sonucu olarak her $(W, g) \in \mathcal{C}$ için, h fonksiyonelinin f'nin M'ye bir genişletilmesi olduğu anlaşılır.

Her $m \in M$ için $h(m) \le p(m)$ eşitliğini görmek de kolaydır.

Demek ki $(M, h) \in \mathcal{Z}$ ve (M, h), $\mathcal{C}$'nin her elemanından büyükeşit.

Şimdi artık Zorn Önsavı'nı $\mathcal{Z}$'ye uygulayabiliriz: $\mathcal{Z}$'nin bir maksimal (M, h) elemanı vardır. Eğer M'nin V'ye eşit olduğunu kanıtlayabilirsek, $F = h$ alarak teoremimizin kanıtını bitirmiş oluruz.

M'nin V'ye eşit olduğunun kanıtı yukarda kanıtladıklarımız kadar standart değil. Biraz çaba gerektiriyor.

Diyelim $M < V$. O zaman $V \setminus M$ boşküme değildir. $w \in V \setminus M$ ve $N = M + \mathbb{R}w$ olsun. $w \in N \setminus M$ olduğundan, $M < N$'dir. Şimdi h'yi,

$$(M, h) < (N, g) \in \mathcal{Z}$$

olacak şekilde N üzerinde tanımlanmış bir g'ye genişleteceğiz. Bu da (M, h)'nin maksimallığıyla çelişecek ve istediğimizi verecek. Başlıyoruz:

Her $x, y \in M$ için,

$$\begin{aligned} h(x) + h(y) &= h(x + y) \leq p(x + y) \\ &= p(x - w + y + w) \\ &\leq p(x - w) + p(y + w) \end{aligned}$$

ve

$$-p(x - w) + h(x) \leq p(y + w) - h(y)$$

olur. Demek ki,

$$\sup_{x \in M} [-p(x-w) + h(x)] \leq \inf_{x \in M} [p(x+w) - h(x)].$$

Bu iki sayı arasından bir α seçelim. O zaman her $x \in M$ için,

$$\alpha \leq p(x+w) - h(x) \text{ ve } -\alpha \leq p(x-w) - h(x)$$

dir. Bu eşitsizlikleri birazdan kullanacağız.

Artık g'yi tanımlayabiliriz: $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $x \in M$ için

$$g(x + \lambda w) = h(x) + \lambda\alpha$$

olsun. g, elbette h'nin N üzerine genişletilmesi olan bir fonksiyoneldir. Şimdi her $y \in N$ için $g(y) \leq p(y)$ eşitsizliğini gösterelim. Belli bir $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $x \in M$ için $y = x + \lambda w$ olur. Eğer $\lambda = 0$ ise, $(M, h) \in \mathcal{Z}$ olduğu için,

$$g(y) = g(x + \lambda w) = h(x) \leq p(x) = p(x + \lambda w) = p(y)$$

olur. Eğer $\lambda > 0$ ise,

$$\begin{aligned} g(y) &= g(x + \lambda w) = h(x) + \lambda\alpha = \lambda(h(x/\lambda) + \alpha) \\ &\leq \lambda(h(x/\lambda) + p(x/\lambda+w) - h(x/\lambda)) \\ &= \lambda p(x/\lambda + w) = p(x + \lambda w) = p(y) \end{aligned}$$

olur. Eğer $\lambda = -\mu < 0$ ise,

$$\begin{aligned} g(y) &= g(x + \lambda w) = h(x) - \mu\alpha \\ &= \mu[-\alpha + h(x/\mu)] \\ &\leq \mu[p(x/\mu - w) - h(x/\mu) + h(x/\mu)] \\ &= \mu p(x/\mu - w) = p(x - \mu w) = p(x + \lambda w) = p(y) \end{aligned}$$

olur.

Kaynakça

[1] T. Terzioğlu, **Fonksiyonel Analizin Yöntemleri**, Matematik Vakfı Yayınları, 1998.
[2] K. Ciesielski, J. W Bruce, **Set Theory for the Working Mathematician**, Cambridge University Press, 1997.

29*. Banach-Tarski Paradoksu

Ali Altuğ ve Aykut Arslan

Sonsuzluğun yol açtığı paradokslar binyıllardır (tam 2,5 binyıldır) biliniyor. Zeno'nun paradokslarını okurlarımızın bilmesi gerekir [SKK]. Galile de doğal sayılarla doğal sayıların kareleri arasında bir eşleme olduğunu görüp, parçanın bütünü kadar elemanı olabilmesine şaşırmıştır. Bu yöntemle, sonsuz bir kümeden, bu kümeyle aynı "büyüklükte" birkaç küme çıkarılabilir. Dolayısıyla Galile'ye göre "daha büyük" ya da "eşit" gibi nitelemeler sonsuz nesnelere uygulanamaz. Artık modası geçmiş de olsa, sonsuzlukla ilgili bu tür düşünceler insanoğlunu uzunca bir süre meşgul etmiştir. Bu bölümde sonsuz bir kümeyi parçalayarak neler yapılabileceğini göreceğiz.

Seçim Aksiyomu'nun bazı sonuçlarını ve eşdeğer ifadelerini önceki bölümlerde gördük. Bu bölümde Seçim Aksiyomu'nun o masum dış görünüşünün altında yatan "canavarın" bir yüzünü göreceğiz.

Hemen belirtelim: Her ne kadar bölümün başlığında "paradoks" sözcüğü geçse de aslında başımıza gelecekler Seçim Aksiyomu'nun bir sonucu olacak. Kabul ettiğimiz aksiyomların sonuçlarına katlanmalıyız. Matematiksel anlamda bir paradokstan sözetmeyeceğiz; sözedemeyiz de, çünkü bugün, matematiksel bir paradoks bilinmemektedir. Eski paradoksların her biri, matematiğin aksiyomlarının (örneğin ZF ya da ZFC sistemleriyle) belirlenmesi sayesinde artık birer paradoks olmaktan çıkmışlar ve hiçbiri günümüze kadar hayatta kalmayı becerememiştir.

Burada "paradoks" sözcüğü "bize imkânsız gibi gelen, sezgilerimize ters düşen, bir türlü inanmak istemediğimiz" bir durum anlamında kullanılmıştır. Örneğin bir futbol topundan aynı ebatta iki futbol topu yaratmak paradoksaldır, bize saçma gelir, "olmaz öyle şey" ya da "bu ancak masallarda ve fantastik öykülerde olabilir" deriz.

Seçim Aksiyomu'nu ilk kez gören biri Seçim Aksiyomu'na matematikte neden özel bir yer ayrıldığını, bu konuda neden bu kadar yazılıp çizildiğini anlamayabilir. Sonuç olarak, her gün seçim yaparız, o zaman seçim yapmak neden bir sorun yaratsın ki? Seçim yapmaktan daha doğal ne olabilir ki? İşte bu doğallık duygusu bu bölümde oldukça sarsılacak.

1924'te, her ikisi de Polonyalı olan Stefan Banach ve Alfred Tarski tarafından kanıtlanan Banach-Tarski Teoremi (ya da Paradoksu), Seçim Aksiyomu kabul edildiğinde, bir topu (içi dolu bir küreyi) sonlu sayıda parçaya (5 parça yetiyor, parçalardan biri de sadece merkezi içeren tek noktalı küme) ayırıp, bu parçaları sadece öteleyip ve döndürüp (yani hacim değiştirmeyen dönüşümlerden geçirip) birbirine yapıştırarak ilk topla aynı boyutta iki tane top elde edilebileceğini söylüyor bize. Yöntem çok doğal: Bir top al, topu parçala, parçaları döndür, ötele ve sonra eğip bükmeden, çekip çekiştirmeden tekrar yapıştır, al sana iki top! Top doğurdu! Bunu patatesle ya da köfteyle yapabilseydik dünyanın açlık sorununu kökünden çözerdik.

Aslında Banach'la Tarski Seçim Aksiyomu'nun ne kadar tuhaf sonuçlar doğurduğunu göstermek için kanıtlamışlardır bu teoremi, ancak istedikleri gerçekleşmemiş ve Seçim Aksiyomu gene de matematikçilerin çok büyük çoğunluğu tarafından kabul görmüştür.

Gruplar

İçinde yaşadığımız üç boyutlu uzayda, yani $\mathbb{R}^3$'te çalışacağız. Yazı boyunca $\mathbb{R}^3$'ün iki tür dönüşümünü kullanacağız: Ötelemeler ve döndürüler.

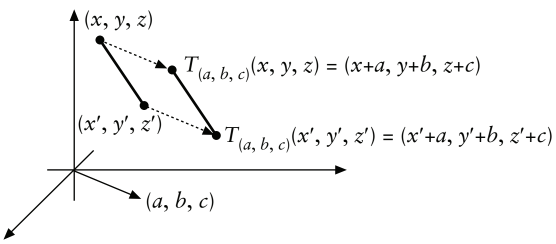
Görece daha basit olduklarından önce ötelemelerden başlayalım. $\mathbb{R}^3$'te herhangi bir (a, b, c) vektörünü sabitleyelim ve $\mathbb{R}^3$'ün her (x, y, z) vektörünü $(x+a, y+b, z+c)$ vektörüne götüren dönüşümünü $T_{(a, b, c)}$ olarak gösterelim. Demek ki,

$$T_{(a, b, c)} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

dönüşümü,

$$T_{(a, b, c)}(x, y, z) = (x+a, y+b, z+c)$$

kuralıyla tanımlanmıştır. $\mathbb{R}^3$'ün bu tür dönüşümlerine ***öteleme***



Ötelemeler, uzunluğu, alanı ve hacmi değiştirmezler

adı verilir. $\mathbb{R}^3$'ün ötelemeler kümesine T diyelim. Kolayca görüleceği üzere,

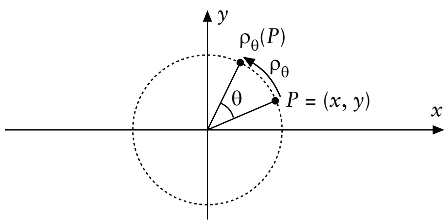
G1. $T_{(0, 0, 0)} = \mathrm{Id} =$ Özdeşlik dönüşümü $\in T$,

G2. $T_{(a, b, c)} \circ T_{(a', b', c')} = T_{(a+a', b+b', c+c')} \in T$,

G3. $T_{(a, b, c)}^{-1} = T_{(-a, -b, -c)} \in T$

dir. Yani T dönüşümler kümesi özdeşlik fonksiyonunu içerir, bileşke altında kapalıdır ve her elemanının tersini de içerir. Bu özellikleri olan dönüşüm kümelerine ***grup*** denir.

Şimdi ***döndürü***leri açıklayalım. $\mathbb{R}^2$'nin ve $\mathbb{R}^3$'ün "O merkezli döndürüleri"nden sözedeceğiz. $SO_2(\mathbb{R})$ ve $SO_3(\mathbb{R})$ olarak göstereceğimiz gruplar, sırasıyla $\mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{R}^3$'ün O'yu sabit bırakan döndürülerinden oluşan grup olacak.



$\rho_\theta(P) = (x\cos\theta - y\sin\theta,\ x\sin\theta + y\cos\theta)$

$\mathbb{R}^2$'nin O merkezli döndürüleri, $\mathbb{R}^2$ düzleminin noktalarını O etrafında belli bir θ açısıyla döndüren ρ_θ dönüşümleridir. Bunların kümesi $SO_2(\mathbb{R})$ olarak simgelenir.

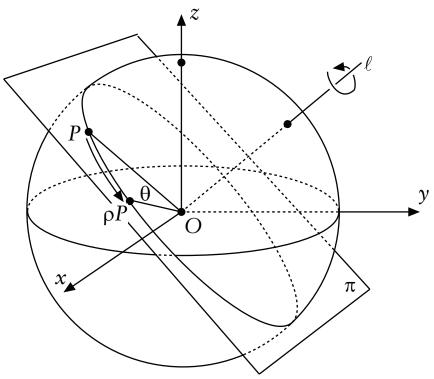
ρ_0 = Id = Özdeşlik dönüşümü $\in SO_2(\mathbb{R})$,

$\rho_\theta^{-1} = \rho_{-\theta} \in SO_2(\mathbb{R})$,

$\rho_\theta \circ \rho_\varphi = \rho_{\theta+\varphi} \in SO_2(\mathbb{R})$

özellikleri doğrudur. Demek ki $SO_2(\mathbb{R})$ de bir gruptur.

$\mathbb{R}^3$'ün döndürülerinden oluşan $SO_3(\mathbb{R})$, anlaşılması biraz daha güç olan bir gruptur. O noktasından geçen herhangi bir ℓ doğrusu (ekseni) ve bir θ açısı seçelim. $\mathbb{R}^3$'te bir P noktası alalım. π, bu ℓ doğrusuna dik olan ve P ve O'dan geçen bir düzlem olsun. π düzleminde P noktasını saatin ters yönünde O etrafında (ya da ℓ etrafında, aynı şey) θ kadar döndürelim. Bu dönüşüme $\rho_{\ell,\theta}$ diyelim. Tüm $\rho_{\ell,\theta}$ dönüşümlerin kümesine $SO_3(\mathbb{R})$ diyelim. Son özelliğin kanıtlanması zor da olsa $SO_3(\mathbb{R})$ bir gruptur:



$$\rho_{\ell,0} = \mathrm{Id} = \text{Özdeşlik dönüşümü} \in SO_3(\mathbb{R}),$$
$$\rho_{\ell,\theta}{}^{-1} = \rho_{\ell,-\theta} \in SO_3(\mathbb{R}),$$
$$\rho_{\ell,\theta} \circ \rho_{\ell',\theta'} \in SO_3(\mathbb{R}).$$

$\rho_{\ell,\theta} \circ \rho_{\ell',\theta'}$ dönüşümünün hangi ℓ'' doğrusu ve hangi θ'' açısı için $\rho_{\ell'',\theta''}$ dönüşümüne eşit olduğunu bulmak hiç de kolay bir uğraş değildir, ama öyledir.

G_3 olarak göstereceğimiz grup ise $\mathbb{R}^3$'ün döndürüleri ve ötelemelerini içeren en küçük grup olacak. G_3'ün her elemanı (tek) bir $t \in T$ ve (tek) bir $\rho \in SO_3(\mathbb{R})$ için $t\rho$ biçiminde yazılır yani,

$$G_3 = T \cdot SO_3(\mathbb{R}) = \{t\rho : t \in T \text{ ve } \rho \in SO_3(\mathbb{R})\}$$

dir: Sağ taraf T'yi ve $SO_3(\mathbb{R})$'yi içerir elbet. Sağ tarafın bir grup olduğunu kanıtlamak gerekiyor:

$$(t\alpha)(s\beta) = tss^{-1}\alpha s\beta = (ts)(s^{-1}\alpha s\beta)$$

eşitliğinden ve $ts \in T$ olduğundan, $s^{-1}\alpha s$ elemanının bir döndürü olduğunu kanıtlamak yeter. Ayrıntıları okura bırakıyoruz.

Grupların Kümelere Etkisi

Tanımlarla başlayalım.

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\},$$
$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$
$$T^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$$

olsun. Uzunca bir süre (G, X) çifti,

$$(SO_2(\mathbb{R}), S^1),\ (SO_3(\mathbb{R}), S^2),\ (G_3, \mathbb{R}^3)$$

çiftlerinden birini simgeleyecek. G'ye ***grup***, X'e de G'nin ***etki ettiği küme*** denir. Her $g \in G$ ve $x \in X$ için, $g(x)$ noktasının gene X'te olduğuna dikkatinizi çekeriz. $g, h \in G$ için, $g \circ h$ yerine gh yazmayı tercih edeceğiz. Ayrıca eğer $x \in X$ ise $g(x)$ yerine gx yazdığımız da olacak.

E1. $\mathrm{Id}(x) = x$,

E2. $g(h(x)) = (gh)(x)$.

eşitlikleri önemli olacak.

Tanım. *$E \subseteq X$ olmak üzere,*

$$E = \cup_i g_i(A_i) = \cup_j h_j(B_j)$$

olacak şekilde, E'nin, ikişerli kesişimleri boşküme olan

$$A_1, A_2, ..., A_m, B_1, B_2, ..., B_n$$

altkümeleri ve G'nin

$$g_1, g_2, ..., g_m, h_1, h_2, ..., h_n$$

*elemanları varsa, E kümesine (G, X)-**çelişik** ya da kısaca G-**çelişik** diyeceğiz.*

Eğer bu tanımda $E = X = T_3$, $G = G_3$ ve

$$A_1 \cup ... \cup A_m \cup B_1 \cup .. \cup B_n = T_3$$

olarak alabilirsek, o zaman amacımıza ulaşmış olacağız. Demek ki bir biçimde T_3'ün (G_3, T_3)-çelişik olduğunu kanıtlamalıyız.

Tanım. *A ve B, X'in iki altkümesi olsun. Eğer*

- $A = \cup_i A_i$, $B = \cup_i B_i$,
- *her* $0 < i < j \leq n$ *için*, $A_i \cap A_j = B_i \cap B_j = \emptyset$,
- $g_1, g_2,..., g_n \in G$ *için* $g_i(A_i) = B_i$

*koşullarını sağlayan $A_1, ..., A_n \subseteq A$, $B_1, ..., B_n \subseteq B$ altkümeleri varsa, A ve B kümelerine (G, X)-**eşparçalanabilir** ya da kısaca G-**eşparçalanabilir** denir.*

A ile B, G-eşparçalanabilirse bunu $A \sim_G B$ olarak göstereceğiz. Eşparçalanabilirliğin yararını Önsav 1'de göreceğiz.

Banach-Tarski Paradoksu'nun Kanıtı

Kanıtımız birkaç parçadan oluşacak. Öncelikle, birazdan tanımlayacağımız uygun bir D altkümesi için $S^2 \setminus D$'nin SO_3-çelişik olduğunu göstereceğiz. (Buna ***Hausdorff paradoksu*** denir.) Bu paradoksun kanıtı biraz teknik ve sıkıcı olacak ama napalım ki teoremimizin ana hattı bundan oluşacak. Bu noktada, o sıkıcı kısmı bir kenara bırakıp Hausdorff Paradoksu'nu kabul ederek Banach-Tarski Paradoksu'nu kanıtlayalım, sonra da geri dönüp boşlukları doldurarak Hausdorff Paradoksu'na bakalım.

Önsav 29.1. *A, B, X'in G-eşparçalanabilen iki altkümesi olsun. Eğer A, G-çelişikse, B de G-çelişiktir.*

Kanıt: Çok kolay; okura bırakılmıştır. □

Teorem 29.2. *Eğer $P \in S^1$ ise, $S^1 \setminus \{P\} \sim_{SO_2(\mathbb{R})} S^1$.*

Kanıt: $\mathbb{R}^2$'yi $\mathbb{C}$'yle, S^1'i de $\{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}$ ile gösterelim. Kanıtın kolaylığı açısından P noktamızı $e^0 = (1, 0)$ noktası olarak seçelim.

$$A = \{e^{in} : n = 1, 2, \dots\}$$

olsun. 2π irrasyonel olduğundan, A'nın bütün elemanları birbirinden değişiktir. g ile düzlemin saat yönünde 1 radyanlık döndürüsünü gösterelim: Her $z \in \mathbb{C}$ için, $g(z) = e^{-i}z$. Elbette $g \in SO_2(\mathbb{R})$.

$$gA = A \cup \{e^0\}$$

olduğuna dikkat ediniz. Şimdi buradan

$$\begin{aligned} S^1 \setminus \{P\} &= ((S^1 \setminus \{P\}) \setminus A) \cup A \\ &\sim_{SO_2(\mathbb{R})} (S^1 \setminus \{P\}) \setminus A \cup g(A) = S^1 \end{aligned}$$

elde edilir, yani $S^1 \setminus \{P\} \sim_{SO_2(\mathbb{R})} S^1$. □

Teorem 29.3. *Sayılabilir herhangi bir D altkümesi için*

$$S^2 \setminus D \sim_{SO_3(\mathbb{R})} S^2$$

olur.

Kanıt: "Eğer $m \neq n$ ise $p^m(D) \cap p^n(D) = \emptyset$" yani, "eğer $k = 1, 2, \dots$ ise, $p^k(D) \cap D = \emptyset$" özelliğini sağlayan bir $p \in SO_3(\mathbb{R})$ bulduğumuzu varsayalım.

$$C = \cup \{p^k(D) : k = 0, 1, 2, \dots\}$$

alalım. O zaman

$$S^2 = (S^2 \setminus C) \cup C \sim_{SO_3(\mathbb{R})} S^2 \setminus C \cup p(C) = S^2 \setminus D$$

olur ve teoremimiz kanıtlanır.

Yukardaki özelliği sağlayan bir p bulalım. Önce 0'dan geçen ve D'yi kesmeyen herhangi bir ℓ ekseni seçelim. A, ℓ eksenli ve bir $n > 0$ tamsayısı için, $r^n(D) \cap D \neq \emptyset$ özelliğini sağlayan r döndürülerinin kümesi olsun. D sayılabilir sonsuzlukta olduğundan A da sayılabilir sonsuzluktadır. Öte yandan ℓ eksenli döndürüler kümesi sayılamaz sonsuzluktadır ($[0, 2\pi)$ kadardırlar). Şimdi p'yi ℓ eksenli ama A'da olmayan bir döndürü olarak seçelim. □

Teorem 29.4 (Hausdorff Paradoksu). *$S^2 \setminus D$'nin SO_3-çelişik olduğu sayılabilir bir D kümesi vardır.*

Kanıt: Kanıt asıl teoremden sonra verilecek.

Sonuç 29.5. *S^2, $SO_3(\mathbb{R})$-çelişiktir.*

Kanıt: Hausdorff Paradoksu bize $S^2 \setminus D$'nin $SO_3(\mathbb{R})$-çelişik olacağı sayılabilir bir $D \subseteq S^2$ kümesinin olduğunu söylüyor. Teorem 29.3,

$$S^2 \setminus D \sim_{SO_3(\mathbb{R})} S^2$$

diyor. Şimdi Önsav 29.1'i kullanarak, S^2'nin $SO_3(\mathbb{R})$-çelişik olduğunu görürüz. □

Teorem 29.6 (Banach-Tarski). *Merkezi O'da olan içi dolu herhangi bir top $SO_3(\mathbb{R})$-çelişiktir. $\mathbb{R}^3$'te içi dolu herhangi bir top G_3-çelişiktir.*

Kanıt: Kanıtımızda topun çapının bir önemi olmadığı için T_3 ile çalışabiliriz.

Birinci Adım: $T_3 \setminus \{O\} \sim_{SO_3(\mathbb{R})} T_3$.

Topumuzun içinde olan ve O noktasından geçen bir çember alalım. Bu çemberden O noktasının çıkmış haline C diyelim. O zaman, Teorem 29.2'den dolayı,

$$\begin{aligned} T_3 \setminus \{O\} &= ((T_3 \setminus \{O\}) \setminus C) \cup C \\ &\sim_{SO_3(\mathbb{R})} (T_3 \setminus \{O\}) \setminus C \cup (C \cup \{O\}) = T_3. \end{aligned}$$

olur.

İkinci Adım: $T_3 \setminus \{O\}$, $SO_3(\mathbb{R})$-*çelişiktir.*

S^2'nin herhangi bir parçalanışından,

$$T_3 \setminus \{O\} = \{\alpha p : p \in S^2 \text{ ve } 0 < \alpha \leq 1\}$$

eşitliği yardımıyla, $T_3 \setminus \{O\}$ kümesinin bir parçalanışını elde edebiliriz. S^2, $SO_3(\mathbb{R})$-çelişik olduğu için, $T_3 \setminus \{O\}$ de $SO_3(\mathbb{R})$-çelişiktir.

Üçüncü Adım: T_3, $SO_3(\mathbb{R})$-*çelişiktir.*

İkinci ve üçüncü adımlardan ve Önsav 29.1'den hemen çıkar.

Teoremin ikinci önermesi için, G_3'te bütün ötelemelerin olduğunu anımsayalım ve topumuzu merkezi O'ya gelecek şekilde öteleyelim. □

Bu noktada bölümün asıl amacına ulaştık ama küçük bir teoremi kanıtını eksik bıraktık. Geri kalan bölümde de bu küçük teoremi kanıtlayacağız. Aslında Banach-Tarski Paradoksu, 100 yıl önce kanıtlanmış o küçük teoremin (Hausdoff Paradoksu'nun) bir sonucudur. Bu yüzden Banach-Tarski Paradoksu'na kimi zaman daha hakkaniyetli olan Hausdorff-Banach-Tarski Paradoksu denir.

Yukarda (G, X) çiftini aşağıdaki üç örnekten biri olarak almıştık:

$$(G, X) = (SO_2(\mathbb{R}), S^1), (SO_3(\mathbb{R}), S^2), (G_3, \mathbb{R}^3).$$

Oysa, yaptıklarımız bir X kümesi üzerine "etki yapan" her G grubu için geçerlidir. Örneğin, bir G grubunun kendi üstüne de etkisi vardır: X'i G'ye eşit alalım ve $g \in G$ ve $x \in X$ için $g(x)$'i gx (grup çarpması) olarak tanımlayalım. (Yazının bu aşamasından sonrası için grup teoriyle aşinalık gerekebilir.)

Tanım. *G bir grup olsun. Eğer G, G-çelişikse kısaca buna "G **çelişiktir**" diyeceğiz.*

Teorem 29.7. *İki üreteçli bir F serbest grubu (F'nin elemanlarıyla soldan çarpmaya göre) çelişiktir.*

Kanıt: Grubumuza F diyelim. F, α ve β elemanları tarafından üretilsin. $\chi \in F$ için, $B(\chi)$, F'nin, sadeleştirilmiş gösterimi χ ile başlayan elemanları kümesini simgelesin. O zaman,

$$F = \{1\} \cup B(\alpha) \cup B(\alpha^{-1}) \cup B(\beta) \cup B(\beta^{-1})$$

dir. Öte yandan,

$$F = B(\alpha) \cup \alpha B(\alpha^{-1}) \text{ ve } F = B(\beta) \cup \beta B(\beta^{-1})$$

dir. Bu kümelerin ikişerli kesişimleri boşküme olduğundan F'nin çelişik olduğu çıkar. □

Buraya kadar bölümün hiçbir yerinde Seçim Aksiyomu'ndan sözetmedik, ama şimdi zamanı geldi. Aşağıdaki teoremin kanıtında Banach-Tarski Paradoksu'nun Seçim Aksiyomu'yla olan ilişkisini göreceğiz.

Önce bir tanım verelim. G grubunun X kümesi üzerine bir etkisi olsun; yani her $g \in G$ ve her $x \in X$ için, E1 ve E2'yi sağlayan bir $g(x) \in X$ elemanı verilmiş olsun. $g(x)$ yerine daha basit olarak gx yazmak bir gelenektir. Eğer (bir tek $x \in X$ için bile) $gx = x$ eşitliği sadece g birim elemanı olduğu zaman sağlanıyorsa, G'nin X üzerine etkisine ***özgür etki*** denir.

Teorem 29.8. *G grubu X kümesini özgürce etkilesin. Eğer G çelişikse, X de (G, X)-çelişiktir.*

Kanıt: G çelişik olduğundan, belli bir n ve m pozitif tamsayıları ve her $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., m$ için,

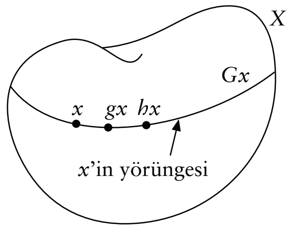
$$G = \cup g_i(A_i) = \cup h_j(B_j)$$

eşitliklerini sağlayan ve ikişerli kesişimleri boş olan $A_i, B_j \subseteq G$ altkümeleri ve $g_i, h_j \in G$ elemanları vardır.

Bir $x \in X$ için, X'in,

$$Gx = \{gx : g \in G\}$$

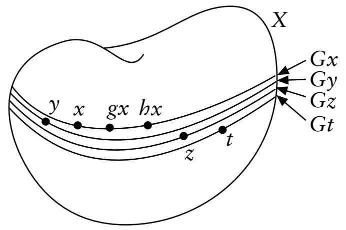
altkümelerine X'in ***yörüngesi*** denir. Her $x \in X$ için, $x \in Gx$ ol-



duğundan, X'in tüm yörüngelerinin bileşimi olarak yazılabileceği açıktır, yani

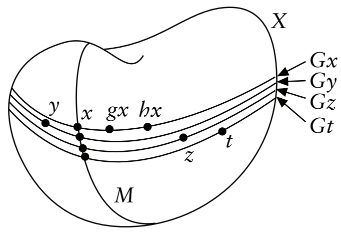
$$X = \cup_{x \in X} Gx.$$

Kolayca kanıtlanabileceği üzere, eğer iki yörünge birbirine eşit değilse ayrıktırlar, yani kesişimleri boşkümedir. Dolayısıyla yörüngeler X'in bir parçalanışını verir: $X = \sqcup_{x \in X} Gx$.



Yörüngeler ya eşittir ya da ayrık

M, her yörüngeden tek bir eleman (bir temsilci) içeren bir küme olsun. Yani M, her Gx yörüngesiyle ortak tek bir elemanı olan bir kümedir. Seçim Aksiyomu'nu kabul ettiğimizden böyle



M, her yörüngeden bir temsilci içerir.

bir M kümesi vardır: Nitekim, eğer f, $\{Gx : x \in X\}$ kümesinin bir seçim fonksiyonuysa, M'yi f'nin imgesi olarak alabiliriz.

Sav. $X = \cup_{g\in G}\, gM$ *ve* $g \neq h$ *ise*, $gM \cap hM = \emptyset$.
Bu savın kanıtı kolaydır ve okura bırakılmıştır.

O zaman elimizde X kümesinin bir parçalanışı var. Şimdi bu parçalanıştan faydalanarak, $i = 1, ..., n$, $j = 1,...,m$ için,

$$g_i(A_i)(M) = \cup\{g_i g(M) : g \in A_i\}$$

ve

$$h_j(B_j)(M) = \cup\{ h_j h(M) : h \in B_j\}$$

kümelerini oluşturalım. Artık okur

$$X = \cup_i\, g_i(A_i)(M) = \cup_j\, h_j(B_j)(M)$$

eşitliklerini ve ikişerli kesişimlerin boşküme olduğunu kolaylıkla gösterebilir. □

Teorem 29.9. $SO_3(\mathbb{R})$*'de, bir k pozitif doğal sayısı ve hepsi birden* 0 *olmayan* a_i, b_j *tamsayıları için*

$$T^{a_1} S^{b_1} T^{a_2} S^{b_2} \ldots T^{a_k} S^{b_k} = 1$$

türünden hiçbir eşitliği sağlamayan T ve S döndürüleri vardır. Bir başka deyişle, derecesi (rank'ı) 2 *olan serbest bir grubu geren T ve S* $\in SO_3(\mathbb{R})$ *vardır.*

Kanıt: Kanıt biraz uzun ve teknik olduğundan sadece bu tip döndürülere bir çift örnek vereceğiz. $\cos^{-1}(1/3)$ radyanla z-ekseni etrafındaki döndürüyle, yine aynı açıyla x-ekseni etrafındaki döndürü teoremdeki koşulları sağlar. Okura alıştırma. □

Kanıttaki iki döndürünün gerdiği F serbest grubuna bakalım. $F \subset SO_3(\mathbb{R})$ elbette. Şimdi Hausdorff Paradoksu'ndaki D kümemizi seçeceğiz. F'nin birim olmayan elemanlarının S^2'de sabitlediği noktaları alalım ve bunların kümesine D diyelim. (D sayılabilir sonsuzluktadır çünkü $SO_3(\mathbb{R})$'nin birim olmayan her elemanı S^2'de tam iki nokta sabitler.) İşte bu D kümesi teoremdeki kümemiz olacak. Öte yandan F grubu $S^2 \setminus D$ üzerine özgürce etki eder, çünkü sabit noktaları D'nin içine koymuştuk. Bu noktada aklımıza hemen Teorem 29.8 geliyor, ama bize S^2'nin F-çelişik olması değil $SO_3(\mathbb{R})$-çelişik olması gerekiyor. Bir sonraki teoremle bunu da gösterip Hausdorff Paradoksu'nun kanıtını bitireceğiz.

Teorem 29.10. *Eğer G'nin çelişik bir altgrubu varsa, G de çelişiktir.*

Kanıt: H, G üzerine soldan çarpmayla özgürce etki eder. Teorem 29.8'ten dolayı G, H-çelişiktir. H de G'nin altgrubu olduğundan G kendisi çelişiktir. □

Hausdorff Paradoksu. *$S^2 \setminus D$'nin $SO_3(\mathbb{R})$-çelişik olduğu sayılabilir bir D kümesi vardır.*

Kanıt: D kümemizi yukarıdaki gibi seçelim. O zaman Teorem 29.7 ve 29.8'ten dolayı $S^2 \setminus D$, F-çelişiktir. Öte yandan da Teorem 29.10'dan dolayı $S^2 \setminus D$ kümesi $SO_3(\mathbb{R})$-çelişiktir. □

Hausdorff paradoksuyla beraber, Banach-Tarski paradoksunun kanıtını da tamamladık. Yani artık elimizde bir küre olduktan sonra istediğimiz kadar küre yapabiliriz! Tabii ki işlerin böyle yürümediği kanıttan görülebilir. Kanıtımız Seçim Aksiyomu kabul edildiğinde bir toptan iki tane aynı boyutta top yapılabileceğini söylüyor, nasıl yapılacağına ilişkin bir ipucu ise vermiyor.

Nitekim bir toptan iki top elde etmek için elde edilen sonlu sayıdaki parça, hacmi hesaplanamayan parçalardır. Aksi takdirde, $4\pi r^3/3$ hacimli bir toptan toplam $4\pi r^3/3$ hacmi olan iki top elde edemezdik. $\mathbb{R}^3$'ün "Lebesgue hacmi" hesaplanamayan altkümeleri Seçim Aksiyomu olmadan bulunamaz.

Kaynakça

[1] Wagon, Stan, **The Banach-Tarski Paradox**, Cambridge University Press, 1985.
[2] Su, Francis Edward, **The Banach-Tarski Paradox**, Minor Thesis, Harvard University, 1990.