# 22. Zorn Önsavı'na Giriş

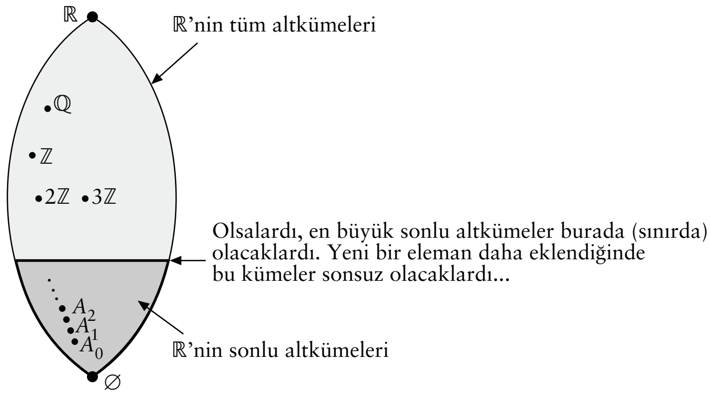
## 22.1. İmkânsız Bir Problem

İmkânsız bir problemle başlayalım: Gerçel sayılar kümesi ℝ'nin **maksimal** bir sonlu altkümesini bulmaya çalışalım...

Doğru anladınız! Dediğimiz gibi imkânsız bir problemi çözmeye çalışacağız... Gerçel sayılardan oluşan öyle bir sonlu küme bulmaya çalışacağız ki, bu kümeden daha fazla gerçel sayı içeren hiçbir gerçel sayı kümesi sonlu olamasın...

Böyle bir küme olamaz elbet. Eğer bir kümenin sonlu sayıda elemanı varsa, bu kümeye yeni bir eleman ekleyerek ondan daha büyük ama gene sonlu sayıda elemanı olan bir başka küme elde ederiz.

Biz gene de böyle bir küme bulmaya çalışalım. Çalışmakla



beyin aşınmaz! Maksat komiklik olsun.

Aradığımız, "en büyük" sonlu küme değil, yani tüm sonlu kümeleri altküme olarak içeren sonlu bir küme aramıyoruz. Sadece o sonlu kümeden daha büyük bir sonlu altküme olmamasını istiyoruz. (Aradaki küçücük farkı çaktınız mı?)

$\mathbb{R}$'nin sonlu bir altkümesini alalım. Eğer bu küme $\mathbb{R}$'nin maksimal bir sonlu altkümesiyse işimiz iş. Değilse (ki değildir!) o zaman bu kümeden daha büyük ama hâlâ sonlu bir küme daha vardır. (Kümelerimiz hep $\mathbb{R}$'nin altkümeleri olsunlar, artık bunu sürekli tekrarlamayalım.) Şimdi eskisinden daha büyük olan bu yeni kümeye bakalım. Bu yeni kümenin maksimal sonlu küme olma olasılığı eski kümeye göre daha yüksek tabii... Eğer bu yeni küme maksimal bir sonlu kümeyse, işimiz iş, istediğimizi elde ettik. Değilse, o zaman bu kümeden daha büyük sonlu bir küme daha vardır (ki var, biliyoruz). Şimdi bu en yeni sonlu kümeye bakalım, acaba bu en yeni sonlu küme maksimal bir sonlu küme mi? Eğer öyleyse maksimal bir sonlu küme bulduk ve sorunumuzu hallettik. Değilse, bu kümeden daha büyük bir sonlu altküme vardır. Şimdi bu sonlu altkümeye bakalım, acaba bu en gıcır sonlu küme maksimal bir sonlu altküme mi?..

Birinci kümemize $A_0$ diyelim. Eğer $A_0$, $\mathbb{R}$'nin maksimal bir sonlu altkümesiyse, sorun yok. (Ama olmadığını biliyoruz; eğer $a$, $A_0$'da olmayan bir gerçel sayıysa, $A_0 \cup \{a\}$, $A_0$'dan daha büyük sonlu bir kümedir. ). Diyelim şansımız yaver gitmedi (!) ve $A_0$, $\mathbb{R}$'nin maksimal bir sonlu altkümesi değil, ondan daha büyük sonlu bir küme var. $A_0$'dan daha büyük sonlu bir küme alalım ve bu kümeye $A_1$ diyelim. $A_1$, maksimal bir sonlu küme değilse, $A_1$'den daha büyük sonlu bir küme vardır. Bu kümeye de $A_2$ diyelim. Bunu böylece sürdürebiliriz:

$$A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots \subset A_n.$$

Bunların biri maksimal bir sonlu kümeyse imkânsız problemimizi çözdük demektir. Ama değilse işlemi sonsuza kadar sürdürebiliriz. Sürdürelim:

$$A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$$

Böyle bir diziye ***zincir*** adını verelim.

Yukardaki zincirin $A_n$ "halkaları" sonlu gerçel sayı kümeleri. Herbirinin bir öncekinden daha fazla elemanı var. Dolayısıyla hiçbiri maksimal bir sonlu küme değil. Bunların herbirinden daha büyük ama hâlâ sonlu bir gerçel sayı kümesi bulup bu kümenin maksimal bir sonlu küme olup olmadığına bakalım... Bulacağımız bu yeni küme $A_n$'lerin hepsini (altküme olarak) içermek zorunda olduğundan sonlu olamaz maalesef. Ama olsaydı ne güzel olurdu... Bu, bütün $A_n$'leri içeren sonlu kümeye $A_\omega$ der ve kaldığımız yerden devam ederdik... Durum şöyle olurdu:

$$A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots \subset A_\omega.$$

Eğer $A_\omega$ maksimal bir sonlu kümeyse sorunu çözmüş olurduk. Değilse (ki değil, çünkü $A_\omega$ sonlu bile değil), o zaman $A_\omega$'dan daha büyük sonlu bir küme bulur ve aynı işlemi maksimal bir sonlu altkümeye toslayana dek sürekli tekrarlardık. Bir zincire geldiğimizde ise zincirin bileşimini içeren sonlu bir küme bulmayı umup gene yolumuza devam ederdik. Bu yöntemi hiç durmadan tekrarlayarak maksimal bir sonlu küme bulmaya çalışabilirdik.

Ama ne yazık ki bunlar hayal, bütün $A_n$'leri içeren $A_\omega$ gibi sonlu bir küme yok evrende.

### 22.2. Çok Kolay Bir Problem

Gene çok kolay bir problem ele alalım, ama bu sefer lütfen çözümü olsun! Bu sefer $\mathbb{R}$'nin 1'i içermeyen maksimal bir altkümesini bulalım.

Gerçekten çok kolay bir problem bu. Tek bir çözümü var: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Yani bu sefer sadece maksimal değil, gerçekten de koşulumuzu sağlayan **<u>en</u> <u>büyük</u>** altküme var. Ama biz bu çözümü bilmediğimizi varsayarak yukardaki yöntemi deneyelim.

$\mathbb{R}$'nin 1'i içermeyen herhangi bir altkümesinden başlayalım. Bu altküme boşküme de olabilir, $\{0\}$ ya da $\{\pi\}$ kümesi de olabilir, hatta, şans bu ya, $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ kümesi de olabilir; önemli olan 1'i içermemesi. 1'i içermeyen bu ilk kümeye $A_0$ diyelim. Eğer $A_0$ kümesi 1'i içermeyen maksimal bir altkümeyse, o zaman keyfimize diyecek yok, problemi çözdük. Ama diyelim $A_0$ kümesi 1'i içermeyen maksimal bir küme değil. O zaman $A_0$'ı içeren ve $A_0$'dan daha fazla elemanı olan ama 1'i içermeyen bir $A_1$ kümesi vardır. Eğer $A_1$ kümesi 1'i içermeyen maksimal bir kümeyse, o zaman problemimizi çözdük demektir. Ama diyelim $A_1$ kümesi 1'i içermeyen maksimal bir küme değil. O zaman $A_1$'i içeren ve $A_1$'den daha fazla elemanı olan ama hâlâ daha 1'i içermeyen bir $A_2$ kümesi vardır. Eğer $A_2$ kümesi 1'i içermeyen maksimal bir kümeyse, o zaman problemimizi çözdük demektir... Bunu böylece devam ettirelim. Eğer belli bir aşamada, diyelim $n$'inci aşamada $A_n$ kümesi 1'i içermeyen maksimal bir kümeyse, o zaman problemimizi çözdük demektir... Diyelim hiçbir $A_n$, 1'i içermeyen maksimal bir küme değil, sürekli daha büyüğünü buluyoruz. Durumu resmedelim:

$$A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$$

ve özetleyelim: Bunların hepsi gerçel sayı kümeleri ve hiçbiri 1'i içermiyor ve herbirinin bir öncekinden daha fazla elemanı var.

Bunların herbirinden daha büyük ve 1'i içermeyen bir küme bulup bu kümenin 1'i içermeyen maksimal bir küme olup olmadığına bakalım. Bulacağımız bu yeni kümenin $A_n$'lerin hepsinden daha büyük olmasını istediğimizden, $A_n$'lerin hepsini altküme olarak içermek zorundadır. Bir önceki örnekte $A_n$'lerin hepsinden daha büyük ve sonlu bir küme bulamamıştık, yoktu öyle bir küme, bakalım şimdi bulabilecek miyiz? Heyecan son haddinde!

Bütün bu $A_n$'lerin bileşimini alırsak, $A_n$'lerin hepsinden daha büyük bir küme buluruz elbet. Ayrıca, $A_n$'lerin hiçbiri 1'i eleman olarak içermediğinden, bileşim de 1'i eleman olarak içermez. Ne güzel!

Demek ki tüm $A_n$'leri altküme olarak içeren ama 1'i eleman içermeyen en az bir küme vardır. $A_\omega$, bu kümelerden biri olsun.

Örneğin

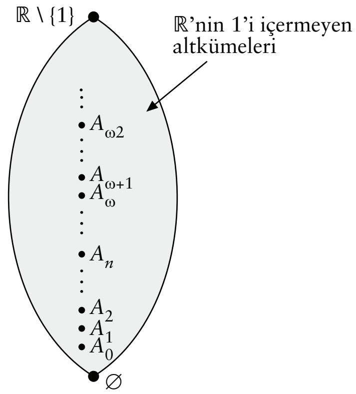
$$A_\omega = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

olabilir, ama bundan daha büyük bir küme de olabilir, ne olduğu pek önemli değil, önemli olan $A_\omega$'nın $A_n$'lerin hepsini altküme olarak içermesi ama 1'içermemesi. (Bu arada, kafa karıştırmamak için parantez içinde söyleyelim: $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$'nin küme olduğu hiç de bariz değildir. $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$'nin küme olduğu ZFC'nin aksiyomlarına dayanılarak kanıtlanmalı. Münasip $A_n$'ler seçilerek bu kanıtlanabilir. Ama okur bu yazılık bunu önemsemesin.)

Kaldığımız yerden $A_0$ yerine $A_\omega$ ile devam edelim. Eğer $A_\omega$ kümesi 1'i içermeyen maksimal bir kümeyse, o zaman başarıya ulaştık demektir... Değilse, $A_\omega$'yı altküme olarak içeren ama $A_\omega$'dan daha büyük olan ve 1'i içermeyen bir küme var demektir. Bu kümeye $A_{\omega+1}$ diyelim. Okur tahmin ediyordur bundan sonra ne yapacağımızı. Eğer $A_{\omega+1}$ kümesi 1'i içermeyen maksimal bir kümeyse, o zaman problemimizi çözdük demektir... Değilse, $A_{\omega+1}$'in, $A_{\omega+1}$'den daha büyük ve 1'i içermeyen bir üstkümesi var demektir. Bu kümeye $A_{\omega+2}$ diyelim... Bunu böylece sürdürürüz... Eğer

$$A_\omega \subset A_{\omega+1} \subset A_{\omega+2} \subset \ldots \subset A_{\omega+n} \subset \ldots$$

zincirinin $A_{\omega+n}$ halkalarından hiçbiri 1'i içermeyen maksimal bir küme değilse, bunların bileşimi örneğin, 1'i içermeyen ve yukardakilerin herbirinden daha büyük bir kümedir. Böyle bir kümeye $A_{\omega 2}$ adını verelim. Eğer $A_{\omega 2}$ kümesi 1'i içermeyen maksimal bir kümeyse, o zaman problemimizi çözdük demektir... Değilse, işlemi devam ettirebiliriz... Eğer belli bir aşamada, 1'i içermeyen maksimal bir altkümeye (yani $\mathbb{R} \setminus \{1\}$'e, ama sonucun bu olduğunu bilmiyormuş gibi dav-



ranıyoruz) rastlarsak o zaman gayretlerimiz amacına ulaşmış demektir, duralım. Ama eğer kümeleri hep 1'i içermeyecek biçimde büyütebiliyorsak, bir adım ileri gidelim. Hep ileri gidebileceğimizi biliyoruz.

$$A_{\omega 2} \subset A_{\omega 2+1} \subset A_{\omega 2+2} \subset \ldots \subset A_{\omega 2+n} \subset \ldots$$

Eğer hep başarısızlığa uğramışsak, bir sonraki aşamada bu kümelerin bileşimini içeren ama 1'i içermeyen herhangi bir küme alıp buna $A_{\omega 3}$ diyelim ve yukardaki gibi devam edelim.

Peki ama bu durmadan ileri gitmenin bir sonu gelecek mi? En sonunda, gerekirse sonsuz hatta çok sonsuz adımı aşıp $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ kümesine ulaşabilecek miyiz?

Bu sorunun yanıtı hiç de bariz değil. $\mathbb{R}$ çok büyük bir küme olduğundan ulaşmak istediğimiz $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ kümesi de bayağı büyüktür, sayılamaz sonsuzluktadır. (Bunun ne demek olduğunu bilmeyen umursamasın.) Yukardaki yöntemle zaten bildiğimiz $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ çözümüne ulaşıp ulaşamayacağımızdan emin olamayız.

### 22.3. Benzer Bir Problem

Bu sefer $\mathbb{R}$'nin maksimal bir özaltkümesini bulmaya çalışalım. Yani $\mathbb{R}$'nin öyle bir altkümesini bulalım ki, $\mathbb{R}$'nin bu altkümeden daha büyük bir altkümesi $\mathbb{R}$'ye eşit olsun. Yanıtı gene biliyoruz: Eğer $a$, $\mathbb{R}$'nin herhangi bir elemanıysa, $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ kümesi $\mathbb{R}$'nin maksimal bir özaltkümelerinden biridir, $\mathbb{R}$'nin ondan daha büyük bir özaltkümesi yoktur.

Bu sefer birden fazla yanıt var, $\mathbb{R}$'nin her $a$ elemanı için bir çözüm ($\mathbb{R} \setminus \{a\}$ çözümünü) bulabiliriz.

Aynı yöntemi denersek bu sefer de birinci örneğimizdeki zorluğa toslarız: Eğer

$$A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$$

herbiri $\mathbb{R}$'nin özaltkümesiyse, bunların hepsini birden içeren bir küme $\mathbb{R}$'ye eşit olmak zorunda olabilir, yani bunların hepsinin bileşimi $\mathbb{R}$ olabilir. Örneğin, $n \in \mathbb{N}$ için,

$$A_n = (-\infty, n)$$

aralığıysa, bu $A_n$'lerin hepsi özaltkümedir, hiçbiri maksimal bir özaltküme değildir, ama bileşimleri $\mathbb{R}$'dir.

Bu zorluğu yenmek için bu problemi bir önceki probleme dönüştürüp belli bir $a$ için ($a = 1$ olabilir), bu belirlenmiş $a$'yı içermeyen maksimal bir altkümeyi bulmaya çalışmalıyız. Şans bu ya, $a$'yı içermeyen maksimal bir altküme $\mathbb{R}$'nin maksimal bir özaltkümesidir.

## 22.4. Orta Zorlukta Bir Problem

Şimdi bir başka probleme el atalım. Bu problem daha zor olacak. Kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}$'nün çıkarma altında kapalı ve 1'i içermeyen maksimal bir altkümesini bulmaya çalışalım. Yani öyle bir $M \subseteq \mathbb{Q}$ kümesi bulmaya çalışalım ki,

1. Her $x, y \in M$ için, $x - y \in M$ olsun.
2. 1 sayısı $M$'de olmasın.
3. $M$, $\mathbb{Q}$'nün yukardaki iki koşulu sağlayan maksimal bir altkümesi olacak. Yani $M \subset N \subseteq \mathbb{Q}$ ise, $N$ ya çıkarma altında kapalı olmayacak (yani birinci koşulu sağlamayacak) ya da 1'i içerecek (yani ikinci koşulu sağlamayacak).

"Maksimal" koşulundan vazgeçip ilk iki koşulu sağlayan bir küme bulalım. $\emptyset$ ya da $\{0\}$ bu tür kümelerdendir. Çift sayılar kümesi $2\mathbb{Z}$ de çıkarma altında kapalıdır ve 1'i içermez. Bu iki özelliği sağlayan herhangi bir küme alalım ve bu kümeye $A_0$ adını verelim. Eğer $A_0$ ilk iki koşulu sağlayan maksimal bir kümeyse sorun yok, çözüme ulaştık. Değilse, ilk iki koşulu sağlayan ve $A_0$'dan daha büyük bir $A_1 \subset \mathbb{Q}$ vardır.

Bu işlemi sürdürelim.

$$A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots \subset A_n$$

kümelerini elde ederiz. Amacımıza henüz ulaşmamışsak, yani $A_n$, ilk iki koşulu sağlayan maksimal bir küme değilse devam edelim. Sonlu bir aşamada ilk iki koşulu sağlayan $\mathbb{Q}$'nün maksimal bir altkümesine rastlamamışsak şöyle bir zincir elde ederiz:

$$A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$$

Bunların her biri $\mathbb{Q}$'nün 1'i içermeyen ve çıkarma altında kapalı altkümeleri, ama hiçbiri en büyüğü değil, her biri bir öncekinden daha fazla eleman içeriyor. Bunların bileşimini alalım:

$$A_\omega = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

$A_\omega$ da 1'i içermez, çünkü $A_n$'lerin hiçbiri 1'i içermiyor. ($A_\omega$'nın 1'i içermesi için $A_n$'lerin en az birinin 1'i içermesi gerekir.) Ayrıca $A_\omega$ da çıkarma altında kapalıdır. Bunu kanıtlayalım. $A_\omega$'dan iki eleman alalım, diyelim $x$ ve $y$. Bu iki eleman $A_\omega$'da olduğundan, herbiri $A_n$'lerden birindedir, ama ikisi birden aynı $A_n$'de olmayabilir, en azından bundan henüz emin değiliz, birazdan olacağız ama... Diyelim,

$$x \in A_n \text{ ve } y \in A_m.$$

Şimdi ya $n \le m$ ya da $m \le n$. Durum $x$ ve $y$ açısından simetrik olduğundan, birinin diğerinden farkı yok, dolayısıyla gönül rahatlığıyla $n \le m$ eşitsizliğini varsayabiliriz. Böylece,

$$x \in A_n \subseteq A_m$$

olur. Demek ki hem $x$, hem de $y$, $A_m$'deler. Ama $A_m$ çıkarma altında kapalı. Buradan $x - y \in A_m$ çıkar. Ama şimdi, $A_m \subseteq A_\omega$ olduğundan, $x - y \in A_\omega$ çıkar. Böylece $A_\omega$ kümesinin çıkarma altında kapalı olduğunu kanıtlamış olduk.

Demek ki bir sonraki aşamada $A_\omega$ kümesini alabiliriz. Bu küme $A_n$'lerin hepsinden daha büyük ve ayrıca 1'i içeriyor ve de çıkarma altında kapalı. Kaldığımız yerden $A_0$ yerine $A_\omega$ ile devam edelim. Eğer $A_\omega$ kümesi, 1'i içermeyen ve çıkarma altında kapalı olan maksimal bir kümeyse, o zaman işimiz bitti, istediğimizi bulduk. Öyle değilse, o zaman, $A_\omega$'yı altküme olarak içeren (yani $A_\omega$'nın üstkümesi olan) ama $A_\omega$'dan daha fazla eleman içeren öte yandan 1'i içermeyen ve gene çıkarma altında kapalı bir küme var demektir. Bu kümeye $A_{\omega+1}$ diyelim. Eğer $A_{\omega+1}$ kümesi 1'i içermeyen ve çıkarma altında kapalı maksimal bir kümeyse, o zaman problemimizi çözdük demektir... Değilse, $A_{\omega+1}$'in, $A_{\omega+1}$'den daha büyük ve 1'i içermeyen ve çıkarma altında kapalı bir üstkümesi var demektir. Bu kümeye $A_{\omega+2}$ diyelim... Bunu böylece sürdürürüz... Eğer

$$A_\omega \subset A_{\omega+1} \subset A_{\omega+2} \subset \ldots \subset A_{\omega+n} \subset \ldots$$

zincirinin $A_{\omega+n}$ halkalarından hiçbiri 1'i içermeyen ve çıkarma altında kapalı maksimal bir küme değilse, bunların bileşimi örneğin, 1'i içermeyen ve çıkarma altında kapalı ve yukardakilerin herbirinden daha büyük bir kümedir. Böyle bir kümeye $A_{\omega 2}$ adını verelim. Eğer $A_{\omega 2}$ kümesi 1'i içermeyen ve çıkarma altında kapalı maksimal bir kümeyse, o zaman problemimizi çözdük demektir... Değilse, işlemi devam ettirebiliriz... Eğer belli bir aşamada, 1'i içermeyen ve çıkarma altında kapalı maksimal bir altkümeye rastlarsak o zaman çabalarımız amacına ulaşmış demektir, duralım. Ama eğer kümeleri hep 1'i içermeyecek ve çıkarma altında kapalı olacak biçimde büyütebiliyorsak, bir adım ileri gidelim. Hep ileri gidebileceğimizi biliyoruz.

$$A_{\omega 2} \subset A_{\omega 2+1} \subset A_{\omega 2+2} \subset \ldots \subset A_{\omega 2+n} \subset \ldots$$

Eğer sürekli başarısızlığa uğramışsak, bir sonraki aşamada bu kümelerin bileşimini içeren ama 1'i içermeyen ve çıkarma altında kapalı herhangi bir küme alıp buna $A_{\omega 3}$ diyelim ve yolumuza devam edelim...

Bir zaman sonra istediğimiz kümeye rastlayacak mıyız? Zor soru...

**Çözüm:** Yukardaki yöntemi terkedelim, belli ki bir yere varamayacak. Aradığımız kümelerden birini ayan beyan yazacağım:

$p$ herhangi bir asal sayı olsun.

$$M = \{pa/b : a, b \in \mathbb{Z} \text{ ve } p, b\text{'yi bölmüyor}\}$$

olsun. $M$ çıkarma altında kapalıdır, bunu görmek kolay. Ayrıca $M$, 1'i de içermez; çünkü aksi takdirde, $p$'nin $b$'yi bölmediği $a, b \in \mathbb{Z}$ tamsayıları için $1 = pa/b$ olur, buradan $pa = b$ ve $p$'nin $b$'yi böldüğü çıkar ki bunun böyle olmadığını biliyoruz... Demek ki $1 \notin M$.

Şimdi $M$'nin, $\mathbb{Q}$'nün bu iki özelliği olan maksimal bir altkümesi olduğunu kanıtlayalım. $N$, $M$'den daha büyük ve çıkarma altında kapalı herhangi bir kesirli sayılar kümesi olsun. 1'in $N$'de olduğunu kanıtlayacağız ve böylece istediğimiz kanıtlanmış olacak.

Önce çıkarma altında kapalı kümelerin çok bilinen ve kolay kanıtlanan bir özelliğini verelim:

**Önsav 22.1.** *Eğer $N$ çıkarma altında kapalıysa ve boşküme değilse, o zaman $0 \in N$ ve $N$ toplama altında da kapalıdır. Ayrıca $N$'de olan bir elemanın eksisi de $N$'dedir.*

**Kanıt:** $N \neq \emptyset$ olduğundan, $N$'de en az bir eleman vardır. $a$ ve $b$, (birbirine eşit ya da değil) $N$'nin herhangi iki elemanı olsun. $N$ çıkarma altında kapalı olduğundan,

$$0 = a - a \in N,$$
$$-a = 0 - a \in N$$

ve

$$a + b = a - (-b) \in N. \qquad \square$$

**Sonuç 22.2.** *$N$ ve $M$, $\mathbb{Q}$'nün çıkarma altında kapalı iki altkümesi olsun. $M \subseteq N$ ve $x \in M$ ise o zaman $M + \mathbb{Z}x \subseteq N$'dir.*

Şimdi biraz önce tanımladığımız,

$$M = \{pa/b : a, b \in \mathbb{Z} \text{ ve } p, b\text{'yi bölmüyor}\}$$

kümesinin, 1'i içermeyen ve çıkarma altında kapalı maksimal kesirli sayı kümesi olduğunu kanıtlayalım.

**Teorem 22.3.** $M$, 1'*i içermeyen ve çıkarma altında kapalı bir maksimal kesirli sayı kümesidir.*

**Kanıt:** $N$, $M$'nin çıkarma altında kapalı herhangi bir üstkümesi olsun. Diyelim, $N$'de olan ama $M$'de olmayan bir $x$ kesirli sayısı var. $a$ ve $b$ tamsayıları için, $x = a/b$ yazalım. $a$ ve $b$'nin birbirine asal olduklarını varsayabiliriz. $x$, $M$'de olmadığından, $p$, $a$'yı bölmez. Demek ki $a$ ve $p$ birbirine asallar. Dolayısıyla $pu + av = 1$ eşitliğini sağlayan $u$ ve $v$ tamsayıları vardır [S]. Dolayısıyla,

$$pu + vbx = pu + vb(a/b) = pu + va = 1.$$

Ama $pu = pu/1 \in M$ ve $vbx \in \mathbb{Z}x$. Dolayısıyla,

$$1 = pu + vbx \in M + \mathbb{Z}x \subseteq N.$$

Böylece, $M$'nin özaltkümesi olduğu çıkarma altında kapalı her kesirli sayı kümesinin 1'i içermek zorunda olduğunu kanıtladık. Demek ki $M$, 1'i içermeyen ve çıkarma altında kapalı olan $\mathbb{Q}$'nün bir maksimal altkümesidir. □

## 22.4. Çetin Bir Problem

Son olarak çetin bir problemi ele alacağız. Problemimiz bir önceki problemin benzeri olacak. Yalnız bu sefer $\mathbb{Q}$'nün değil $\mathbb{R}$'nin altkümeleriyle uğraşacağız.

$\mathbb{R}$'nin çıkarma altında kapalı ve 1'i içermeyen maksimal bir altkümesini bulmaya çalışacağız.

Yöntemimizi biliyorsunuz, eğer çıkarma altında kapalı ve 1'i içermeyen bir küme maksimalsa, duralım; değilse o kümeden bir büyüğü vardır. Şimdi o büyük kümeden hareket edelim. Bunu böylece sürdürelim. Eğer hiçbir zaman maksimal bir kümeye rastlamazsak, o zaman

$$A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$$

diye bir dizi elde ederiz. Bu dizideki kümelerin her biri bir öncekinden daha büyüktür. Her biri çıkarma altında kapalıdır. Hiçbirinde 1 yoktur. Şimdi bu kümelerin bileşimini alalım. Bu bileşim de çıkarma altında kapalıdır ve 1'i içermez. Şimdi $A_0$'la yaptığımızı bu bileşimle yapalım. Ve bunu çıkarma altında kapalı ve 1'i içermeyen maksimal bir kümeye rastlayana dek sürekli sürdürelim.

Bu yöntemle, böyle bir kümeye rastlama şansımız var mı? [Sİ] ders notlarında gördüklerimiz böyle bir maksimal kümeye rastlayacağımız konusunda bize bir güvence veremez.

Peki, bir önceki problemdeki gibi, çıkarma altında kapalı ve 1'i içermeyen maksimal bir kümeyi - sanki gökten inmiş gibi - okurlara sunabilir miyiz?

Sunamayız! Sadece biz değil kimse sunamaz.

Böyle bir kümenin varlığı bir sonraki bölümde söz edeceğimiz **Zorn Önsavı** kullanılarak kanıtlanabilir. Zorn Önsavı'nın kanıtı da Seçim Aksiyomu'nu gerektirir, Seçim Aksiyomu olmadan yapılamaz.

Seçim Aksiyomu'nun yardımıyla kanıtlayacağımız Zorn Önsavı sayesinde, elle, akılla, emek vererek bulamayacağımız matematiksel nesnelerin varlığını kanıtlayabileceğiz.