20. Seçim Aksiyomu Neden Doğaldır?

Bu bölümde okuru Seçim Aksiyomu'nun neden doğal bir aksiyom olduğuna ikna etmeye çalışacağız. Bu bölüm de okuru ikna etmezse hiçbir şey etmez!

Çıkış noktamız Bertrand Russell'ın çok bilinen sonsuz sayıda çorap çifti örneği. Sonsuz sayıda çorap çiftimiz var ve her çorap çiftinden bir tane çorap seçeceğiz. Çorap yerine ayakkabı çifti olsaydı, örneğin hep sol ayakkabıyı seçerek kolayca bir seçim yapabilirdik. Ama çorap çiftlerinin sağı solu belli olmadığından, sonsuz sayıdaki çorap çiftinin her birinden bir tekini seçmekte zorlanırız. Sonlu sayıda çorap çifti olsa, sorun olmaz da, sonsuz sayıda çorap çiftinden birini hiçbir kurala bağlı kalmaksızın seçim yapabilmek hiç de bariz değildir.

Russell'ın örneğini aklımızda tutup, bir başka konuya geçelim. Bağlantıyı daha sonra kuracağız.

Sayılabilir sonsuzlukta bir X kümemiz olsun. Sayılabilir sonsuzlukta olduğundan, X'in elemanlarını

$$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$$

olarak sıraya dizebiliriz.

Şimdi de her x_n'nin iki elemanlı bir küme olduğunu varsayalım. Elemanları, x_{n0} ve x_{n1} olsun. Demek ki,

$$
\begin{aligned}
x_0 &= \{x_{00}, x_{01}\},\\
x_1 &= \{x_{10}, x_{11}\},\\
x_2 &= \{x_{20}, x_{11}\},\\
x_3 &= \{x_{30}, x_{11}\},\\
&\dots\\
x_n &= \{x_{n0}, x_{n1}\},\\
&\dots
\end{aligned}
$$

Şimdi bu x_n kümelerinin bileşimini alalım:

$$
\begin{aligned}
\cup X &= \cup_{n=0}^{\infty} x_n\\
&= \{x_{00}, x_{01}\} \cup \{x_{10}, x_{11}\} \cup \dots \cup \{x_{n0}, x_{n1}\} \cup \dots\\
&= \{x_{00}, x_{01}, x_{10}, x_{11}, \dots, x_{n0}, x_{n1}, \dots\}.
\end{aligned}
$$

Görüldüğü gibi $\cup X$ sayılabilir sonsuzlukta bir kümedir, elemanlarını 0, 1, 2, 3 diye doğal sayılarla sayabiliyoruz. Nitekim, $y_{2n+i} = x_{ni}$ olsun:

$$
\begin{aligned}
y_0 &= x_{00},\\
y_1 &= x_{01},\\
y_2 &= x_{10},\\
y_3 &= x_{11},\\
y_4 &= x_{20},\\
y_5 &= x_{21},\\
y_6 &= x_{30},\\
y_7 &= x_{31},\\
&\dots\\
y_{2n} &= x_{n0},\\
y_{2n+1} &= x_{n1},\\
&\dots
\end{aligned}
$$

Burada bir teorem kanıtladık.

Teorem 20.1. *Her elemanı iki elemanlı bir küme olan sayılabilir sonsuzlukta bir kümenin elemanlarının bileşimi sayılabilir sonsuzlukta bir kümedir.*

Şimdi çorap sorununa geri dönelim. Yukardaki her x_n bir çorap çiftini simgelesin. Çorapların teki x_{n0}, diğeri x_{n1}. Çorapları yukarıdaki gibi $y_{2n+i} = x_{ni}$ yöntemiyle numaralandıralım. Şimdi göstergeci çift olan çorapları, yani y_0, y_2, y_4, y_6, ... çoraplarını seçelim...

Hani sonsuz tane çorap çiftinin her birinden bir tane seçemezdik? Seçtik işte!

Yukardaki kanıt biraz yanlış. Yanlışın nerede olduğunu açıklayalım.

x_n iki elemanlı bir küme (bir çorap çifti) olsun. x_n'nin iki elemanı olduğundan bu iki elemandan birini **seçip** bu elemana x_{n0}, diğerine x_{n1} adını verebiliriz. Ama tüm x_n'ler için böyle bir seçim ve kodlama yapmaya hakkımız yok. (En azından hakkımızın olup olmadığını bilmiyoruz.)

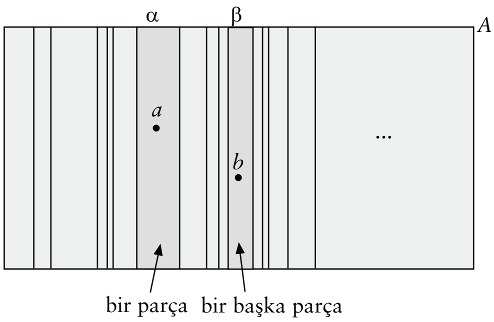
Her x_n kümesiyle $\{0, 1\}$ kümesi arasında tam iki eşleme vardır. x_n'nin elemanlardan birine x_{n0}, diğerine x_{n1} adını vermek demek, bu iki eşlemeden birini seçmek demektir. Eğer eşlemelere f_n ve g_n dersek, her $\{f_n, g_n\}$ kümesinden bir eleman seçtik... Gene sonsuz bir kümeden yazılı bir kurala bağlı kalmaksızın seçim yapıyoruz... Bu ancak Seçim Aksiyomu'yla mümkündür.

Yukardaki teorem ancak Seçim Aksiyomu'nun yardımıyla kanıtlanabilir. Teoremin doğruluğuna inanıyorsanız (en azından elemanları 2 elemanlı kümelerden oluşansayılabilir sonsuzluktaki kümeler için) Seçim Aksiyomu'na inanmalısınız.

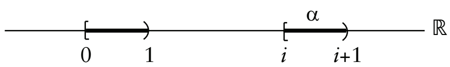
21. Seçim Aksiyomu'nun Yaygın Bir Kullanımı

21.1. Eleman Seçmek

Bir A kümesi verilmiş olsun ve A, bir biçimde, hiçbiri boş olmayan ayrık altkümelere ayrılmış olsun. A'nın bu ayrık altkümelerine "parça" diyelim. Demek ki A, parçalara ayrılmış bir küme.



Örnek 21.1. $A = \mathbb{R}$ olsun. A'nın ayrık parçaları, i tamsayıları için, $[i, i + 1)$ aralıkları olsun. Bu aralıklar gerçekten ayrıktırlar ve bileşimleri A'dır.



Örnek 21.2. Gene $A = \mathbb{R}$ olsun. $r \in \mathbb{R}$ için,

$$r + \mathbb{Q} = \{r + q : q \in \mathbb{Q}\}$$

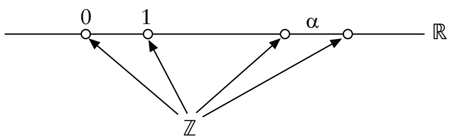
olsun. Herhangi iki r ve s gerçel sayısı için,

$$\text{ya } r + \mathbb{Q} = s + \mathbb{Q} \text{ ya da } (r + \mathbb{Q}) \cap (s + \mathbb{Q}) = \emptyset$$

olur. (Okura alıştırma.) Demek ki $\mathbb{R}$'nin $r + \mathbb{Q}$ biçimindeki altkümeleri $\mathbb{R}$'yi ayrık parçalara böler.

Şimdi bu iki örneği ayrı ayrı irdeleyelim:

Birinci örnekte her $[i, i+1)$ parçasından kolaylıkla bir sayı (tabir caizse, bir temsilci) seçebiliriz; örneğin aralığın en küçük sayısı (ve aynı zamanda tek tamsayısı) olan i'yi seçebiliriz. Parçalardan teker teker seçtiğimiz bu sayılar çok iyi bildiğimiz $\mathbb{Z}$ kümesini oluştururlar. $\mathbb{Z}$, her parçayı bir ve tek bir noktada, parçadan seçtiğimiz noktada keser. İşte resim:



X, parçalarımızın kümesi olsun:

$$X = \{[i, i+1) : i \in \mathbb{Z}\}.$$

Parçalardan seçilen sayıların oluşturduğu $\mathbb{Z}$ kümesinin şu iki özelliği vardır:

(P) *Her* $\alpha \in X$ *için*, $\alpha \cap \mathbb{Z}$ *kümesinin bir ve bir tek elemanı vardır*.

$\mathbb{Z}$, bir anlamda, parçaların temsilci meclisi; $\mathbb{Z}$'de her parçadan bir ve bir tane eleman (temsilci) var.

Her parçanın en küçük elemanı seçeceğimize, her parçanın orta noktasını da seçebilirdik, yani $[i, i+1)$ parçasından $i + 1/2$ noktasını da seçebilirdik. Bunlar, bir j tek sayısı için $j/2$ türünden yazılan kesirli sayılardır. Şimdi Z bu temsilcilerin kümesi olsun:

$$Z = \{j/2 : j \in \mathbb{Z} \text{ ve } j \text{ tek sayı}\}.$$

O zaman, Z aynen yukardaki (P) özelliğini sağlar.

(P) *Her* $\alpha \in X$ *için*, $\alpha \cap Z$ *kümesinin bir ve bir tek elemanı vardır*.

Şimdi benzer şeyi ikinci örnekte yapmaya çalışalım. İkinci örneğin parçalarından birini ele alalım. Diyelim $r + \mathbb{Q}$'yü ele aldık. Şimdi bu parçadan bir eleman seçelim. $r \in r + \mathbb{Q}$ olduğundan bu parçadan bal gibi r elemanını seçebiliriz. Buraya kadar bir sorun yok.

Bu örnekte de birinci örnekte olduğu gibi her parçadan bir eleman seçtik. Yalnız ikisinin arasında çok önemli bir fark var ve bu önemli fark Seçim Aksiyomu'nun özünü oluşturuyor.

Birinci örnekte X'in bir α elemanından seçilen eleman, α'nın en küçük elemanıydı (yani α'nın tek tamsayısıydı). Biri size ve bir arkadaşınıza α'yı verse ve α'nın en küçük elemanını bulun dese, hata yapmadığınız takdirde ikiniz de aynı elemanı bulursunuz, çünkü α'nın bir ve bir tane en küçük elemanı vardır.

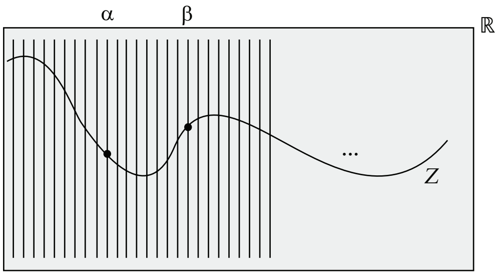
Şimdi gelelim ikinci örneğe. Diyelim size ve bir arkadaşınıza ikinci örnekteki X kümesinden bir α elemanı verildi ve bu α elemanından bir eleman seçmeniz istendi. Yöntemimizi uygulayalım: α elemanının bir $r \in \mathbb{R}$ için $r + \mathbb{Q}$ kümesine eşit olduğunu biliyoruz. Yukarda açıkladığımız yöntem, α'dan, yani $r + \mathbb{Q}$'den r'yi seçiyordu. Ama α, birçok $r \in \mathbb{R}$ için $r + \mathbb{Q}$'ye eşittir. Hatta α'dan hangi r elemanını seçerseniz seçin, $\alpha = r + \mathbb{Q}$ olur. Bu r'lerden hangisini seçmeliyiz? Anlattığımız yöntemle, X'in verilen bir α elemanından sizin ve arkadaşınızın aynı elemanı elde etme olasılığı oldukça düşüktür, o kadar düşüktür ki 0'a eşittir.

Birinci örnekte X'in her α elemanından bir eleman seçme yöntemi verilmişti ve bu yöntemi kim uygularsa uygulasın hep aynı eleman seçiliyordu. İkincisinde böyle bir şey sözkonusu değil. İkinci örnekte α kümesi ancak $r + \mathbb{Q}$ biçiminde yazılarak verilmişse, yani özel bir r elemanı gözler önüne serilmişse bu kümeden **tek** bir eleman (r'yi) seçmesini biliyoruz.

İkinci örneğimizi irdelemeye devam edelim. Birinci örnekte (P) özelliğini sağlayan bir Z kümesi bulmuştuk. Bunu ikinci örnekte yapmaya kalkışalım.

$$X := \{r + \mathbb{Q} : r \in \mathbb{R}\}$$

olsun. X, aynen birinci örnekteki gibi $\mathbb{R}$'yi parçalayan kümelerin kümesi. Şimdi $\mathbb{R}$'nin öyle bir Z altkümesi bulalım ki, Z, X'in her α elemanını tek bir noktada kessin. İşte bulmak istediğimiz Z'nin resmi:



Böyle bir Z bulmak çok zor değil, X'in her α elemanından bir sayı seçmek yeterli bunun için. X'in hiçbir α elemanı boşküme olmadığından, X'in her α elemanından bir sayı seçmek mümkündür. Ancak bu seçimlerle Z'yi küme yapmak zordur, hatta Seçim Aksiyomu kullanılmaksızın, seçim nasıl yapılırsa yapılsın, Z'nin bir küme olduğu bu ikinci örnekte kanıtlanamaz.

Güçlük, X'in her α elemanını tek bir sayıda kesen bir Z **topluluğu** bulmakta değil, güçlük, o Z topluluğunu **küme** olarak bulabilmektir.

Seçim Aksiyomu'yla (P)'yi sağlayan bir $Z \subseteq \mathbb{R}$ bulmak çok kolaydır: f, X'in seçim fonksiyonu olsun. Seçim Aksiyomu, X'in böyle bir fonksiyonunun olduğunu söylüyor. Demek ki f fonksiyonu X'ten $\mathbb{R}$'ye gidiyor ve her $\alpha \in X$ için $f(\alpha) \in \alpha$ özelliğini sağlıyor. Şimdi $Z = f(X)$ olsun. Z bir kümedir. (Fonksiyonun tanımından dolayı bir fonksiyonun imgesi her zaman bir kümedir, bkz. [Sİ]) Ayrıca Z, (P) özelliğini sağlar.

Seçim Aksiyomu olmaksızın $\mathbb{R}$'nin (P) özelliğini sağlayan bir Z alt**küme**sini bulamazdık. (Ama bunu bu ders notlarında kanıtlamamız mümkün değildir.)

Seçim Aksiyomu sayesinde, herhangi bir A kümesi ayrık altkümelere (parçalara) ayrılmışsa, A'nın, her parçadan tek bir eleman içeren bir Z altkümesini bulabiliriz. Bunu aynen yukarda yaptığımız gibi kanıtlayabiliriz. Kanıtlayalım, çünkü dikkatli olmamız gereken bir nokta var.

Teorem 21.1 [ZFC]. *A herhangi bir küme olsun. $X \subseteq \wp(A)$ olsun. X üzerine, $\emptyset \notin X$ ve*

"*X'in değişik her α ve β elemanı için $\alpha \cap \beta = \emptyset$*"

varsayımlarını yapalım. O zaman öyle bir $Z \subseteq A$ vardır ki, her $\alpha \in X$ için $Z \cap \alpha$'nın tek bir elemanı vardır.

Kanıtta X'in bir küme olduğunu kullanacağız. Yoksa teorem yanlış olur. Teoremde yazdığımız "$X \subseteq \wp(A)$" tümcesi, X, $\wp(A)$'nın bir **altkümesi** demektir, yani hem X'in her elemanı $\wp(A)$'nın bir elemanıdır hem de X -üstüne basa basa söylüyoruz- bir **kümedir**.

Ayrıca kanıtta Seçim Aksiyomu'nu kullanacağız. Aksi takdirde teoremi kanıtlayamayız.

Son bir not daha: Örneklerimizde $\cup X = A$ idi. Buna ihtiyacımız yok. Gerekirse, A yerine $\cup X$ alarak bu varsayımı sağlayabiliriz ama dediğimiz gibi gerek yok.

Kanıta başlıyoruz ve başlar başlamaz da bitiriyoruz:

Kanıt: f, X kümesinin bir seçim fonksiyonu olsun. $Z = f(X)$ olsun. Gerisi kolay. □

Seçim Aksiyomu'nu kullanarak yukardaki teoremi kanıtladık. Yukardaki teoremi varsayarak (ZF'de elbette) Seçim Aksiyomunu da kanıtlayabiliriz.

Teorem 21.2 [ZF]. *Bir önceki teorem doğruysa Seçim Aksiyomu da doğrudur.*

Kanıt: X, boşkümeyi içermeyen herhangi bir küme olsun. X'in elemanları $\cup X$ kümesinin altkümeleridir, yani $X \subseteq \wp(\cup X)$ dir. Eğer $A = \cup X$ olarak alırsak nerdeyse bir önceki teoremin varsayımlarına düşeceğiz; tek sorun, X'in elemanlarının birbirinden ayrık olmadığı durum.

Şimdilik X'in elemanlarının birbirinden ayrık olduklarını varsayıp X'in bir seçim fonksiyonunu bulalım. $A = \cup X$ olsun. Bir önceki teoreme göre, A'nın,

her $\alpha \in X$ için $Z \cap \alpha$'nın tek bir elemanı vardır

özelliğini sağlayan bir Z altkümesi vardır. Her $\alpha \in X$ için bu elemana $f(\alpha)$ diyelim. Şimdi f, X'ten A'ya giden ve her $\alpha \in X$ için $f(\alpha) \in \alpha$ koşulunu sağlayan bir fonksiyondur, yani X'in bir seçim fonksiyonudur.

Evet, eğer X'in elemanları ayrık olsalardı, işimiz bitmişti. Gelgelelim, X'in elemanları birbirinden ayrık olmayabilirler. Şimdi, X'in ayrık olmayan elemanlarını belki biraz yapay olarak ayrıklaştıracağız. X'in her α elemanını $\{\alpha\} \times \alpha$ elemanıyla değiştireceğiz. α ve β ayrık olmasa da, $\alpha \neq \beta$ ise $\{\alpha\} \times \alpha$ ile $\{\beta\} \times \beta$ kümeleri ayrıktırlar.

$$Y = \{\{\alpha\} \times \alpha : \alpha \in X\}$$

olsun. (ZF'nin en basit aksiyomlarını kullanarak Y'nin küme olduğunu kanıtlamak zor değildir. Bu ayrıntıyı okura bırakıyoruz.) Şimdi Y, boşkümeyi içermiyor ve elemanları ayrık kümeler. Varsayıma göre, Y'nin bir seçim fonksiyonu vardır. Bu seçim fonksiyonuna g diyelim. Tabii ki, her $\alpha \in X$ için,

$$g(\{\alpha\} \times \alpha) \in \{\alpha\} \times \alpha,$$

yani bir $f(\alpha) \in \alpha$ için,

$$g(\{\alpha\} \times \alpha) = (\alpha, f(\alpha)).$$

İşte bu f, X'in bir seçim fonksiyonudur. □

Alıştırma. Seçim Aksiyomu'nun "*Elemanları boş olmayan ayrık kümeler olan her kümenin bir seçim fonksiyonu vardır*" önermesine eşdeğer olduğunu kanıtlayın.

21.2. Yanlış Anlaşılmasın...

Boş olmayan bir kümeden bir eleman seçmek için Seçim Aksiyomu'na ihtiyaç yoktur... Kimi zaman hangi eleman seçildiği bilinmese bile boş olmayan bir kümenin bir elemanı (bir anlamda) seçilebilir.

Örneğin, eğer "ikiz asallar sanısı" doğruysa X kümesi çift tamsayılar kümesi $2\mathbb{Z}$ olsun, yanlışsa tek sayılar kümesi $2\mathbb{Z} + 1$ olsun. İkiz asallar sanısının doğru olup olmadığı şimdilik bilinmediğinden X'in $2\mathbb{Z}$'ye mi yoksa $2\mathbb{Z} + 1$'e mi eşit olduğu da şimdilik bilinmemektedir. Ama her iki durumda da X'in boşküme olmadığı belli. X'ten bir eleman seçebilir miyiz? Bir anlamda evet! X'ten x elemanını seçelim... x'i 4 ya da 5 olarak alabiliriz, ama hangisi olduğunu bilemeyiz.

X'in elemanlarını bilmiyorsak bile, X'in boşküme olmadığını biliyorsak, X'ten bir eleman "seçmek" zor değildir. Bunun için Seçim Aksiyomu'na ihtiyaç yoktur.

Seçim Aksiyomu, sonsuz tane boş olmayan küme olduğunda ve bu kümelerin hiçbiri boşküme olmadığında, bu kümelerin herbirinden birer eleman seçmeye yarar. Tabii burada işin püf noktası, seçilen bu elemanlar topluluğunun bir küme oluşturmasıdır.

Sonlu sayıda kümeden birer eleman seçmek her zaman mümkündür, çünkü sonlu sayıda eleman her zaman bir küme oluşturur. (ZFC'nin 4 ve 5'inci aksiyomlarından çıkar bu.)

21.3. Seçim Aksiyomu'nun Bir Uygulaması

Teorem 21.3. X, *yarısıralı bir küme olsun. Aşağıdaki koşullar eşdeğerdir.*

a. X*'in boş olmayan her altkümesinin maksimal bir elemanı vardır.*

b. X*'in artan her* $(x_n)_n$ *dizisi bir zaman sonra sabitleşir.*

Kanıt: (**a** $\Rightarrow$ **b**). $(x_n)_n$, X'in hiç azalmayan bir dizisi olsun, yani $n \leq m$ doğal sayıları için, $x_n \leq x_m$ olsun. x_N, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

kümesinin maksimal elemanı olsun. O zaman her $n \geq m$ için, $x_n = x_N$ olur, yani bu aşamadan sonra dizi sabitleşir.

(b ⇒ a). Y, X'in boş olmayan ama maksimal elemanı olmayan bir altkümesi olsun. O zaman her $y \in Y$ için,

$$\{t \in Y : y < t\}$$

olarak tanımlanan (y, ∞) kümesi boş değildir. Elemanları bu

$$(y, \infty)$$

kümelerinden oluşan kümeye Z diyelim. Z'nin bir seçim fonksiyonu vardır. Bu seçim fonksiyonuna f diyelim. $i : Y \to Z$ fonksiyonu da $i(y) = (y, \infty)$ olarak tanımlansın. $g = f \circ i$ olsun. Demek ki, her $y \in Y$ için,

$$g(y) \in (y, \infty),$$

yani $y < g(y)$. Şimdi Y'den bir y_0 elemanı seçelim ve y_n'yi tümevarımla,

$$y_{n+1} = g(y_n)$$

olarak tanımlayalım. $(y_n)_n$ dizisi hiçbir zaman sabitleşmez, bir çelişki. □

Dikkat: Kanıttaki $(y_n)_n$'nin bir dizi olduğu, yani

$$\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$$

topluluğunun bir küme olduğunun kanıtı için bkz [Sİ, Sonuç 3.23].