18. Seçim Fonksiyonları ve Seçim Aksiyomu

Sonsuz sayıda ayakkabı çifti var ve biri sizden her çiftten bir adet getirmenizi istiyor... Her çiftten sol ayakkabıyı seçebilirsiniz örneğin. Ya da hep sağ ayakkabıyı... Ya da bir sağ bir sol ayakkabıyı... Yani iki ayakkabıdan birini seçmek için bir kural bulabilirsiniz.

Şimdi, diyelim sonsuz sayıda ayakkabı çifti degil de, sonsuz sayıda çorap çifti var. Her çiftten birini seçeceksiniz... Çorapların sağı solu belli olmadığından bu sefer belli bir kural bulamazsınız. Çorapların biri sağda biri solda olsa ya da biri üstte biri altta olsa ya da biri yırtık biri pırtık olsa, o zaman çorap seçme kuralını koymak kolay. Sorun, sonsuz sayıda çorap çifti olduğunda ve çiftleri oluşturan çoraplardan birini diğerinden ayırdedemediğimizde.

Ayaktakımını bir kenara bırakıp matematik dünyasına dönelim.

$$X = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, ...\}$$

olsun. Yani X bir küme ve elemanları bir n doğal sayısı için,

$$\{2n + 1, 2n + 2\}$$

biçiminde. X'in her elemanı iki elemanlı bir küme. Amacımız X'in her elemanından bir eleman seçmek. X'in her elemanı iki doğal sayıdan oluştuğuna göre, bu doğal sayıların en büyüğünü seçebiliriz: {1, 2}'den 2'yi, {3, 4}'ten 4'ü ve genel olarak

$$\{2n + 1, 2n + 2\}$$

kümesinden $2n + 2$ elemanını seçebiliriz.

Başka seçim yöntemleri de olabilir elbet. Amacımız seçim yöntemlerinden birini bulmaktı ve başardık.

Bir başka örnek: Eğer

$$X = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, ...\}$$

ise, 1, X'in her elemanında olduğundan, hep 1'i seçebiliriz. Böylece X'in her elemanından bir eleman (1'i) seçmiş olduk.

Birazdan örneklerimizi artıracağız ve seçimin her zaman kolay, hatta kimileyin mümkün bile olmadığını göreceğiz.

Soruyu daha matematiksel olarak şöyle ifade edelim. Elinizde bir X kümesi var. Bu kümenin elemanları da küme ve hiçbiri boş değil. X'in her elemanından bir eleman (örnek, numune, eşantiyon) seçmek istiyoruz. Eğer $x \in X$ ise, x'ten seçilen numuneye $f(x)$ adını verelim. $f(x)$'ten tek istediğimiz x'in bir elemanı olması, yani $f(x) \in x$ koşulu.

Bir başka deyişle, kalkış kümesi X olan öyle bir f fonksiyonu bulmak istiyoruz ki, her $x \in X$ için, $f(x) \in x$ olsun. Böyle bir fonksiyona X'in ***seçim fonksiyonu*** denir.

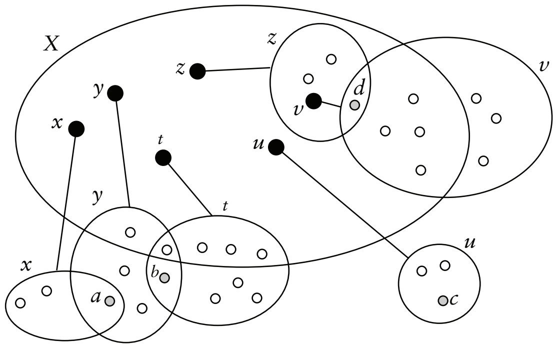
Elbette X'in bir seçim fonksiyonu olabilmesi için, X'in elemanlarının (ki bu elemanlar da birer küme) hiçbirinin boşküme olmaması gerekir.

Bu bölümde soracağımız soru şu: *Boş olmayan kümelerden oluşan her kümenin bir seçim fonksiyonu var mıdır?*

Sorunun zorluk derecesini örneklerle ölçeceğiz. Bundan sonraki bölümlerde de sorunu derinlemesine tartışacağız.

18.1. Kolay Şıklar

Eğer X, aşağıdaki şekildeki gibi, elemanları boş olmayan kümeler olan **sonlu** bir kümeyse, o zaman X'in bir seçim fonksiyonunu bulmak çok basittir: X'in her elemanından bir eleman alın, olsun bitsin! Sonlu tane çorap çiftinin her birinden



Yukarda, X kümesinin x, y, z, t, u ve v olmak üzere 6 elemanı görülüyor. Bu elemanları resimde siyah noktalar olarak gösterdik. x, y, z, t, u ve v'nin herbiri ayrıca birer küme. x, y, z, t, u ve v'yi ayrıca bir de küme olarak, "oval patates" olarak gösterdik. Bu altı kümenin elemanlarını (biri hariç, v) içi beyaz ya da gri "nokta"larla gösterdik. Örneğin a, hem x'in hem de y'nin bir elemanı. v'nin z'nin bir elemanı olduğuna dikkat edin. X kümesinin bir seçim fonksiyonu şöyle olabilir:
$f(x) = a \in x$, $f(y) = a \in y$, $f(t) = b \in t$, $f(u) = c \in u$, $f(z) = v \in z$, $f(v) = d \in v$.

bir adet seçmeyi herkes bilir... Sorun X sonsuz olunca...

X sonlu olduğunda bir seçim fonksiyonunun olduğu X'in eleman sayısı üzerine tümevarımla kolaylıkla tanımlanabilir. Kanıtı okura bırakıyoruz.

Eğer X'in elemanlarının ortak bir elemanı varsa, o zaman da kolay, hep o ortak elemanı seçelim. Örneğin yukardaki örneklerden birinde, 1, X'in bütün elemanlarının ortak elemanıydı ve biz hep 1'i seçmiştik.

Eğer X'in her elemanında (ki bu elemanlar da birer küme, tekrarlıyoruz), a ve b diye adlandıracağımız iki elemandan biri varsa, o zaman da seçim kolay: X'in herhangi bir x elemanını alalım. Eğer $a \in x$ ise a'yı seçelim, yani $f(x) = a$ olsun. Eğer $a \notin x$ ise, o zaman x'ten b'yi seçelim, yani bu durumda $f(x) = b$ olsun.

Bunlar kolay şıklar. Şimdi işi biraz zora sokalım.

18.2. İşler Zorlaşıyor

$\wp(A)^*$, A'nın boş olmayan altkümelerinden oluşan küme olsun: $\wp(A)^* = \wp(A) \setminus \{\emptyset\}$. Yazının bundan sonrasında çeşitli A'lar için $\wp(A)^*$ kümesinin bir seçim fonksiyonunu bulmaya çalışacağız. Eğer A'nın n elemanı varsa, $\wp(A)^*$ kümesinin 2^n-1 tane elemanı vardır, ama bizi daha çok A'nın sonsuz olduğu durumlar ilgilendiriyor.

Örnek 18.1. $\wp(\mathbb{N})^*$ *kümesinin seçim fonksiyonu.*

Boş olmayan her doğal sayı kümesinden kolaylıkla bir eleman seçebiliriz; örneğin kümenin en küçük elemanını seçebiliriz. Bu yöntemle, sözgelimi, $\{1, 5, 8\}$ kümesinden 1'i, çift sayılar kümesinden 0'ı, asal sayılar kümesinden 2'yi seçeriz. Yani, seçim fonksiyonuna f dersek,

$$f(\{1, 5, 8\}) = 1$$

olur.

Bu soru da oldukça kolaydı. Şimdi biraz daha zor bir soru soralım:

Örnek 18.2. $\wp(\mathbb{Z})^*$ *kümesinin seçim fonksiyonu.*

Boş olmayan her tamsayı kümesinden de belli bir yöntemle bir eleman seçebiliriz. Örneğin şu yöntemi alalım: $\emptyset \neq x \subseteq \mathbb{Z}$ olsun. Eğer x'in en büyük elemanı varsa o en büyük elemanı seçelim. Eğer x'in en büyük elemanı yoksa o zaman $x \cap \mathbb{N}$ kümesi boşküme olamaz, bu kümenin en küçük elemanını seçelim. Böylece boş olmayan her tamsayı kümesinden bir eleman seçmiş olduk.

Bu yöntemle $\{-5, 2, 6\}$ kümesinden en büyük sayı olan 6'yı, $5\mathbb{Z} + 3$ kümesinden 3'ü seçeriz.

Bunun da üstesinden geldik.

$\wp(\mathbb{Z})^*$ kümesinin başka seçim fonksiyonları da vardır. Biz, bunlardan sadece birini bulduk. Hepsini bulmak gibi bir amacımız yoktu.

Dikkat ederseniz her seferinde x'ten seçilen $f(x)$ elemanı için bir kural ortaya koyuyoruz. Bu kurala uyan biri söylenen elemanı seçmek zorundadır, "onu mu seçeyim, bunu mu seçeyim" gibi bir ikilemi olamaz.

Örnek 18.3. $\wp(\mathbb{Q}^{\geq 0})^*$ *kümesinin seçim fonksiyonu.*

Boş olmayan bir pozitif kesirli sayılar kümesinden bir sayı nasıl seçeriz? Birçok seçim yöntemi vardır. İşte bunlardan biri: Kümeye x diyelim. Şimdi şu kümeyi tanımlayalım:

$$A(x) = \{a + b : a \in \mathbb{N},\ b \in \mathbb{N} \text{ ve } a/b \in x\}.$$

x boşküme olmadığından, $A(x)$ de boş değildir. Boş olmayan her doğal sayı kümesi gibi, $A(x)$'in en küçük elemanı vardır. Bu elemana $n(x)$ diyelim. Şimdi,

$$\{a/b \in x : a \in \mathbb{N},\ b \in \mathbb{N} \text{ ve } a + b = n(x)\}$$

kümesine bakalım. Bu, sonlu bir kesirli sayılar kümesidir, ayrıca boşküme değildir, dolayısıyla en küçük elemanı vardır. İşte x'ten bu elemanı seçelim.

Örneğin,

$x = \{a^2/b \in \mathbb{Q}^{\geq 0} : a$ asal, $b \in \mathbb{N}$ ve $a^2 + b^2$ sayısı 4'e ve 5'e bölünmez$\}$ ise, $A(x) = \{c + d : a^2 + b^2$ sayısının 4'e ve 5'e bölünmediği bir a asalı ve bir $b \in \mathbb{N}$ sayısı için, $c/d = a^2/b\}$ kümesidir. $A(x)$ kümesinin en küçük elemanı 7'dir ($a = 2$, $c = 4$, $b = d = 3$ alın.) Dolayısıyla yukarda açıkladığımız yöntemle x'ten 2/3 sayısını seçeriz.

Bulduğumuz bu seçim fonksiyonu aşağıda gerekecek, ona bir ad verelim: f. Örneğin, yukardaki örnekte, $f(x) = 2/3$.

Küme karmaşıklaştıkça seçim fonksiyonu bulmanın da zorlaştığına dikkatinizi çekerim. Bir zaman sonra imkânsız hale gelecek.

Örnek 18.4. $\wp(\mathbb{Q})^*$ *kümesinin seçim fonksiyonu.*

Boş olmayan kesirli sayı kümelerinden de birer eleman seçebiliriz. $X \subseteq \mathbb{Q}$, boş olmayan herhangi bir küme olsun. Eğer $X \cap \mathbb{Q}^{\geq 0}$ boşküme değilse, yukardaki yöntemi kullanalım ve $f(X \cap \mathbb{Q}^{\geq 0})$ elemanını seçelim. Eğer $X \cap \mathbb{Q}^{\geq 0}$ boşkümeyse, o zaman $X \cap \mathbb{Q}^{<0}$ ve $-X \cap \mathbb{Q}^{>0}$ kümeleri boş değildir; bu durumda X'ten $-f(-X \cap \mathbb{Q}^{>0})$ elemanını seçelim.

Genel olarak, eğer X sayılabilir bir kümeyse (yani doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ ile aralarında bir eşleme varsa), $\wp(X)^*$ kümesinin bir seçim fonksiyonunu bulmak oldukça kolaydır. Nitekim, $f : X \to \mathbb{N}$ fonksiyonu X'ten $\mathbb{N}$'ye giden bir eşleme olsun. Ve $\emptyset \neq x \subseteq X$ olsun. Eğer n, $f(x)$'in en küçük elemanıysa, o zaman x'ten $f^{-1}(n)$ elemanını seçeriz.

Örnek 18.5. *Aralıklar kümesinin seçim fonksiyonu.*

Gerçel sayıların boş olmayan aralıklarından da belli bir yöntemle bir eleman seçebiliriz. İşte bir yöntem:

$$[a, b], [a, b), (a, b], (a, b)$$

aralıklarından "orta noktayı", yani $(a + b)/2$ sayısını, $(-\infty, a]$ ve $(-\infty, a)$ aralıklarından $a - 1$ sayısını, $[a, \infty)$ ve (a, ∞) aralıklarından $a + 1$ sayısını ve son olarak $(-\infty, -\infty)$ aralığından 0 sayısını (gene orta noktayı!) seçelim.

Örnek 18.6. $\wp(\mathbb{R})^*$ *kümesinin seçim fonksiyonu.*

İşte şimdi en civcivli soruya geldik. Yukardaki örneklerde kimileyin kolayca kimileyin biraz zorlanarak da olsa, her seferinde bir seçim fonksiyonu bulduk. Ama bu kez bir seçim fonksiyonu bulmak hiç kolay değil.

Hemen söyleyelim: $\wp(\mathbb{R})^*$ kümesinin bir seçim fonksiyonunu bulamazsınız. İstediğiniz kadar deneyin... Sadece siz değil, kimse bulamaz!

Bu kümenin seçim fonksiyonu yok demiyorum. Yoksa elbet bulamazsınız. Var da demiyorum... Ama varsa da bulamazsınız!

Bu kümenin bir seçim fonksiyonunun olduğu ancak şu aksiyomla kanıtlanabilir:

Seçim Aksiyomu (C): *Elemanları boş olmayan kümeler olan her kümenin bir seçim fonksiyonu vardır.*

Bu aksiyom kullanılarak $\wp(\mathbb{R})^*$ kümesinin bir seçim fonksiyonu olduğu kanıtlanabilir (elbette!), ama o seçim fonksiyonunun kuralı bulunamaz! Yani açık açık seçim fonksiyonunu yazamazsınız. Bir başka deyişle, varlığı **anca**k yukardaki aksiyom kullanılarak kanıtlanan bir seçim fonksiyonunun "kuralı" yoktur. Olamaz da.

Okur haklı olarak böyle bir fonksiyonun neden olamayacağını soruyordur; hatta belki de iyi anlayamadığını sanıyordur.

Şöyle bir örnek verelim. X, elemanları ayrık kümelerden oluşan sonsuz bir küme olsun. Daha tane tane söyleyelim: X bir küme, X'in elemanları da küme ve X'in herhangi iki elemanının kesişimi boşküme. Diyelim X, sayılabilir sonsuzlukta. X'in elemanlarını teker teker sayıp numaralandıralım: Bu elemanlara

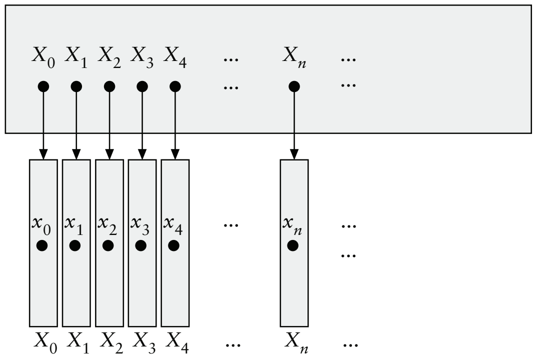
$$X_0, X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n, \ldots$$

diyelim. Bunların her biri bir küme, hiçbiri boş değil, ama herhangi ikisinin kesişimi boşküme. Bu boş olmayan her kümeden bir eleman seçmek istiyoruz.

Birinci küme olan X_0'dan x_0 adını vereceğimiz bir eleman seçelim. X_0 boş olmadığından, böyle bir elemanın varlığını biliyoruz. Herkes X_0'dan aynı elemanı seçmeyebilir, ama bu bir sorun değil bizim için. Şimdi sıra X_1 kümesinde. Bu kümeden de rahatlıkla bir eleman seçebiliriz. Seçtiğimiz elemana x_1 diyelim. Bunu böylece hep sürdürebiliriz. X_n kümesinden seçilen elemana x_n diyelim. Şimdi f fonksiyonunu

$$f(X_n) = x_n$$

olarak tanımlayalım. Her n için $f(X_n) \in X_n$ olduğundan sorun yok gibi görünebilir. Ama var... Sorun f'nin bir fonksiyon olduğunu kanıtlamada. f, bir fonksiyon olmayabilir. Fonksiyonlar da dahil olmak üzere matematikte her şey bir kümedir. f'nin bir fonksiyon olması için de x_n'leri içeren $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ nesnesinin bir küme olması gerekir. Bu nesnenin bir küme olduğu da şu ana kadar gördüğümüz kümeler kuramının ilk 9 aksiyomuyla kanıtlanmalıdır. İşte bu kanıtı yapmaktan aciziz.

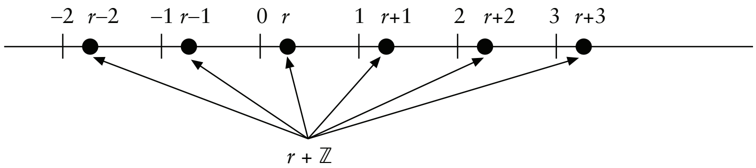


Örnek 18.7. $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ *kümesinin seçim fonksiyonu.*

Her r gerçel sayısı için,

$$r + \mathbb{Z} = \{r + n : n \in \mathbb{Z}\}$$

olsun. Bu örnekte her $r + \mathbb{Z}$ kümesinden bir eleman seçmeye çalışacağız.



Elbette r, $r + \mathbb{Z}$ kümesinin bir elemanıdır, dolayısıyla $r + \mathbb{Z}$ kümesinden r'yi seçelim diyebilirsiniz. Ama $r + \mathbb{Z}$ kümesi r'yi belirlemiyor ki... Nitekim, birbirinden değişik r ve s sayıları için, $r + \mathbb{Z} = s + \mathbb{Z}$ olabilir. Örneğin,

$$\sqrt{2} + \mathbb{Z} = (1 + \sqrt{2}) + \mathbb{Z} = (-3 + \sqrt{2}) + \mathbb{Z}$$

dir.

Yukarda sözü edilen sorunu iyice anlamak için sorumuzu şöyle görelim:

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{r + \mathbb{Z} : r \in \mathbb{R}\}$$

olsun. Amacımız $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$'nin her elemanından bir eleman seçmek. $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$'den herhangi bir eleman alalım. Bu elemana α diyelim. Elemanı özellikle α diye yazdık, $r + \mathbb{Z}$ diye r'yi önplana çıkaracak biçimde yazmadık. Her ne kadar α, birçok r için $r + \mathbb{Z}$'ye eşitse de, tüm bu r'ler arasından hangisini seçmeliyiz?

Aslında her bir $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ için, $\alpha = r + \mathbb{Z}$ eşitliğini sağlayan bir $r \in \mathbb{R}$ seçebiliriz. Ama bu seçimlerde bir düzen olmazsa, yani seçimleri belli bir kurala bağlı kalarak yapmazsak, o zaman seçilen r'lerin bir küme oluşturduğunu bu aşamaya kadar verdiğimiz aksiyomlarla kanıtlayamayız.

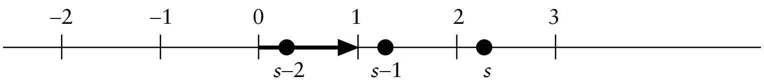
Bu örnekte, belli bir kurala bağlı kalarak, her $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ için, $\alpha = r + \mathbb{Z}$ eşitliğini sağlayan bir $r \in \mathbb{R}$ seçebiliriz. Nitekim, her $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ için, $\alpha = r + \mathbb{Z}$ eşitliği sağlayan **bir ve bir tek** $r \in [0, 1)$ vardır. İşte α'dan, $[0, 1)$ aralığındaki bu r sayısını seçelim. Bu sefer binlerce (!) r'den rastgele birini seçmedik, $[0, 1)$ aralığında bulunan $\alpha = r + \mathbb{Z}$ eşitliğini sağlayan tek r'yi seçtik.

Bu yöntemle, $\pi + \mathbb{Z}$ kümesinden $\pi - 3$'ü, $\sqrt{2} + \mathbb{Z}$ kümesinden $\sqrt{2} - 1$'i seçeriz.

Eğer bir $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ elemanı verilmişse, $\alpha = r + \mathbb{Z}$ eşitliğini sağlayan $r \in [0, 1)$ pratikte nasıl bulunur? Şöyle bulunur: Önce,

$$\alpha = s + \mathbb{Z}$$

eşitliğini sağlayan herhangi bir s alınır. Böyle bir s'nin varlığını biliyoruz. Şimdi, s'ye yeterince 1 ekleyerek ya da s'den yeterince 1 çıkararak, $\alpha = r + \mathbb{Z}$ eşitliğini sağlayan bir $r \in [0, 1)$ sayısına ulaşırız. Ayrıca, $[0, 1)$ aralığında bu eşitliği sağlayan başka bir sayı da yoktur.



$r = s - 2 \in [0, 1)$

Burada s'yi belli bir kurala uymadan seçtiğimizi belirtelim. Seçim Aksiyomu'nu kullanmadan buna hakkımız var mı? Var! Çünkü $[0, 1)$ aralığında bulunan r sayısı s'nin seçiminden bağımsızdır. $\alpha = s + \mathbb{Z}$ eşitliğini sağlayan hangi s'yi seçersek seçelim, aynı r'ye ulaşırız. Burada Seçim Aksiyomu'na ihtiyacımız yok. Aslında r, $s - [s]$'dir ve α'dan hangi s seçilirse seçilsin, $s - [s]$ hep aynı sonucu verir. Burada Seçim Aksiyomu'nu kullanmadık. Her α için bir $s \in \alpha$ seçtik ama kanıtımızda bu seçimlerin bir küme oluşturmasına ihtiyacımız olmadı.

Sonuç: Yukarda tanımlanan f fonksiyonu $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$'nin bir seçim fonksiyonudur ve Seçim Aksiyomu'na ihtiyaç duyulmadan bulunmuştur.

[0, 1) aralığının şu özelliği önemli: Her $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ için,

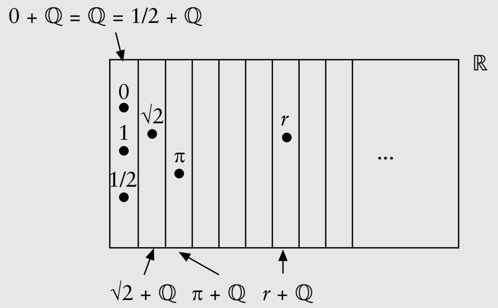
$$|\alpha \cap [0, 1)| = 1.$$

Örnek 18.8. $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ *kümesinin seçim fonksiyonu.*

Her r gerçel sayısı için,

$$r + \mathbb{Q} = \{r + q : q \in \mathbb{Q}\}$$

olsun. Bu sefer her $r + \mathbb{Q}$ kümesinden bir eleman seçmeye çalı-

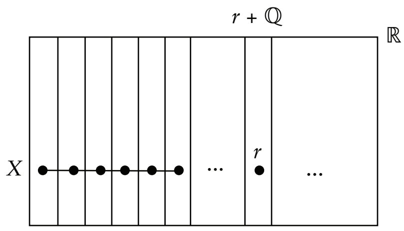


$r, s \in \mathbb{R}$ için, $r + \mathbb{Q}$ ve $s + \mathbb{Q}$ kümeleri ya eşittir ya da ayrıktırlar. (Okura alıştırma.)

şacağız. Yani,

$$\mathbb{R}/\mathbb{Q} = \{r + \mathbb{Q} : r \in \mathbb{R}\}$$

ise, $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$'nün bir seçim fonksiyonunu bulacağız. Bu, her $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ için, $|\alpha \cap X| = 1$ eşitliğini sağlayan bir $X \subseteq \mathbb{R}$ altkümesi



bulmaya eşdeğerdir.

Elle bulamayız. Sadece biz değil kimse bulamaz. Böyle bir seçim fonksiyonunu ancak yukardan birileri bize verebilir, ama kuralını söylemeden...

Bu sefer seçim fonksiyonunu bulmak için Seçim Aksiyomu'nu kullanmak zorundayız. Seçim Aksiyomu olmadan böyle bir fonksiyon bulamayız. İnanmazsanız bulmaya çalışın! Başaramayacağınızı göreceksiniz.

Seçim Aksiyomunu kullandığımız sonuçların başına kimi zaman "[ZFC]" ibaresi koyacağız. [ZF] koyduğumuzda Seçim Aksiyomu kanıtta kullanılmıyor demektir.

19. ZFC Kümeler Kuramı

Tüm matematiği kümeler kuramına dayandırabiliriz, yani matematik, en azından kuramsal olarak, kümeler kuramında ifade edilebilir, kümeler kuramının içinde yer alabilir. Örneğin topoloji, analiz, cebir, sayılar kuramı, diferansiyel denklemler, kompleks analiz gibi duyduğunuz ya da duymadığınız her matematik dalı kümeler kuramının bir altdalı olarak görülebilir. (Matematikte pek de merkezi olmayan kategori kuramını kaideyi bozmayan istisna olarak kabul edelim. Kategori kuramı küme olmayan nesnelerle ilgilenir.)

Dolayısıyla kümeler kuramı çelişkisizse, o zaman tüm matematik çelişkisiz demektir. Eğer 0 = 1 eşitsizliği kümeler kuramında kanıtlanamıyorsa, kümeler kuramının ***çelişkisiz*** olduğu söylenir. Çelişkili bir kuramda, doğru olsun ya da olmasın, her önerme kanıtlanabilir.

Ama ne yazık ki kümeler kuramının çelişkisiz olduğu kanıtlanamaz. Bu, Gödel'in, çağının en büyük matematikçisi Hilbert de dahil olmak üzere, birçok kişiyi düşkırıklığına uğratan derin bir teoremidir.

Öte yandan kümeler kuramının çelişkili olduğu kanıtlanabilir. Bunun için 0 = 1 eşitliğini kanıtlamak yeterlidir. Birazdan açıklayacağımız kümeler kuramında henüz böyle bir eşitlik kanıtlanamamıştır, umarız hiçbir zaman da kanıtlanamaz.

Bugün kimse ciddi olarak kümeler kuramının çelişkili olabileceğine ihtimal vermiyor. Genel kanı, “çelişkili olsaydı bugüne kadar bir çelişki bulunurdu” şeklinde.

Yukarda, birinci paragrafta, “matematik, en azından **kuramsal olarak**, kümeler kuramında ifade edilebilir” dedik. Burada “kuramsal olarak” sözleri hafife alınmamalı. Matematiğin her dalını kümeler kuramına dayandırmaya çalışmak her ne kadar mümkünse de, böyle bir uğraşa girmek akla zarardır ve bu çabanın makul bir süre içinde başarıya ulaşması mümkün değildir. Üstelik bunu başarmak uygulamada pek bir işe de yaramaz.

Matematiğin merkezine yerleştirdiğimiz “kümeler kuramı”nın ne olduğu sorusu bu aşamada doğal, doğru ve sorulması gereken bir sorudur. [Sİ]’de ve önceki bölümlerde kümeler kuramından ve aksiyomlarından (yani aksiyomlarından) sözetmiştik. Bu bölümde konuyu toparlayıp kümeler kuramının aksiyomlarını toplu halde vereceğiz.

Birbirine aşağı yukarı eşdeğer birkaç kümeler kuramı vardır. Bunlardan en yaygın olarak kullanılanı ZFC kısaltmasıyla anılan ve büyük ölçüde ilk kez Ernst Zermelo tarafından ifade edilen kuramdır. Bunun dışında, örneğin, Bertrand Russell’ın tipler kuramı ve von Neumann, Bernays ve Gödel’in kümeler kuramı (NBG) vardır. Biz burada sadece ZFC’yi açıklamakla yetineceğiz.

ZFC kümeler kuramının tanımsız iki terimi vardır: “Küme” ve “elemanı olmak”.

Küme. ZFC’de sözü edilen her nesne (elemanlar, fonksiyonlar, sıralamalar vs) bir kümedir. Örneğin, “öyle bir x var ki” diye başlayan bir önerme, aslında “öyle bir x kümesi var ki” olarak okunmalıdır.

Elemanı Olmak. Bu, iki küme arasında bir ilişkidir ve bu da tanımsız olarak verilmiştir. “$x \in y$” yazılımı, “x, y’nin bir elemanıdır” anlamına gelir demeyeceğiz, çünkü tanımsız olduğundan “x, y’nin bir elemanıdır”ın anlamı yoktur; ama “$x \in y$” yazılımı,

"x, y'nin bir elemanıdır" olarak okunur ve öyle de hissedilir.

"$x \notin y$" yazılımı ise, "x, y'nin bir elemanı değildir" anlamına gelir. Artık "x, y'nin bir elemanıdır" önermesinin anlamını bildiğimizi varsaydığımızdan, bu varsayıma dayanarak, "x, y'nin bir elemanı değildir"in ne demek olduğunu biliyoruz.

Kümeler kuramında (en azında ZFC'de) her şey küme olduğundan, bir kümenin elemanları da kümedir. (Ortaokullarda ve liselerde elemanla küme apayrı şeylermiş gibi gösterilir, oysa kümeler kuramında öyle değildir.)

Tanımsız verilmiş bu "küme" ve "elemanı olmak" terimlerinin aşağı yukarı ne anlama gelmeleri gerektiğini biz sezgilerimizle biliriz elbet, ne de olsa hayat tecrübemiz var, ama kuram bunu bilmez.

Kümeler kuramının (ve matematiğin) diğer tüm tanımları bu iki terim kullanılarak yapılır. Örneğin, eğer x kümesinin her elemanı y kümesinin de bir elemanıysa, x'e y'nin bir altkümesi denir. Bunun gibi matematiğin doğal sayı, gerçel sayı, karmaşık sayı, fonksiyon, türev, süreklilik gibi kavramları kümeler kuramına indirgendiğinde, tanımlanmamış ve hiçbir zaman da tanımlanmayacak olan "küme" ve "elemanı olmak" terimleri kullanılarak tanımlanırlar.

Aşağıdaki ZFC'nin aksiyomlarını bulacaksınız.

Aksiyomların sayısı sonlu (10 tane) gibi gözükebilir ama bu yanıltıcı: 3'üncü ve 9'uncu aksiyomlar aslında sonsuz sayıda aksiyomdan oluşuyorlar, her biri her φ özelliği için ayrı birer aksiyomu simgeler. [Sİ]'de açıklamıştığımız "özellik"in tam ne anlama geldiğini bilmek pek önemli olmayacak, okur yeter ki "asal sayı olmak" gibi sözlü ifade edebildiği her şeyin aslında matematiksel anlamda bir özellik olduğuna ikna olsun.

ZFC'nin Z'si yukarda da dediğimiz gibi Zermelo'nun Z'sidir. Bertrand Russell'dan bağımsız olarak zamanının kümeler kuramında bir çelişki yakalayan Zermelo, çelişkiden kurtulmak için kümeler kuramını aksiyomlaştırma çabasına girişir.

Kümeler kuramının aksiyomlarının çoğu ona aittir.

Zermelo, sisteminin çelişkisiz olduğunu kanıtlamaya çalışmışsa da başaramamıştır. Başaramamasının nedeni vardı: Sistemin çelişkisiz olduğunun kanıtlanamayacağını bugün Gödel sayesinde biliyoruz.

ZFC'nin F'si ise 1922'de Temellendirme ve Yerleştirme aksiyomlarına gereksinildiğinin farkına varan Adolf Fraenkel'in F'sidir. Thoralf Skolem de, Fraenkel'den bağımsız olarak Yerleştirme Aksiyomu'nu aynı yıl keşfetmiştir. İki kişinin birden aynı aksiyomu bulması manidardır elbet, bu, aksiyomun gerçekten gerektiğine dair bir delildir. (Öte yandan kümeler kuramına ciddi olarak eğilmemiş birinin Temellendirme Aksiyomu'na ihtiyaç duyması olanaksızdır.)

19.2. ZFC Aksiyom Sistemi

1. Boşküme Aksiyomu. *Hiç elemanı olmayan bir küme vardır*: $\emptyset$.

2. Eşitlik Aksiyomu. *Aynı elemanlara sahip iki küme birbirine eşittir.*

3. Tanımlanabilir Altküme Aksiyomu. *Eğer* φ *bir özellikse ve* x *bir kümeyse*, x*'in* φ *özelliğini sağlayan elemanlarını eleman olarak içeren ve bunlardan başka eleman içermeyen bir küme vardır*: $\{y \in x : \varphi(y)\}$.

4. Bileşim Aksiyomu. *Eğer* x *bir kümeyse*, *eleman olarak sadece ve sadece*x*'in elemanlarının elemanlarını içeren bir küme vardır*: $\bigcup x = \bigcup_{y \in x} y = \{z : \text{bir } y \in x \text{ için } z \in y\}$.

5. İki Elemanlı Küme Aksiyomu. *Eğer* x *ve* y *birer kümeyse*, *eleman olarak sadece ve sadece* x *ve* y*'yi içeren bir küme vardır*: $\{x, y\}$.

6. Altkümeler Kümesi Aksiyomu. *Eğer* x *bir kümeyse*, *eleman olarak sadece ve sadece* x*'in altkümelerini içeren bir küme vardır*:

$$\wp(x) = \{y : y \subseteq x\}$$
$$= \{y : y\text{'nin her elemanı } x\text{'in de elemanıdır}\}.$$

7. Tümevarımsal Küme Aksiyomu. *Boşkümeyi içeren ve içerdiği her x kümesi için* $x \cup \{x\}$ *kümesini de içeren (en küçük) bir küme vardır.*

8. Temellendirme Aksiyomu. [Fraenkel] *Eğer x boş olmayan bir kümeyse, o zaman x'in* $x \cap y = \varnothing$ *eşitliğini sağlayan bir y elemanı vardır.* (Bu aksiyom sadece kümeler kuramında kullanılır.)

9. Yerleştirme Aksiyomu. [Fraenkel ve Skolem] *a bir küme ve* $\varphi(x, y)$ *bir özellik olsun. Her* $x \in a$ *için,* $\varphi(x, y)$ *özelliğini sağlayan bir ve bir tane y kümesi varsa o zaman bir* $x \in a$ *için* $\varphi(x, y)$ *özelliğini sağlayan y'ler bir küme oluştururlar. Yani*

$$\{y : \exists x\ (x \in a \wedge \varphi(x, y))\}$$

topluluğu bir kümedir.

10. Seçim Aksiyomu (C). *Elemanları boş olmayan kümeler olan her kümenin bir seçim fonksiyonu vardır.*

Bugüne dek hiç gereksinmediğimiz Temellendirme Aksiyomu'ndan [Sİ]'de uzun uzun sözettik. Bu aksiyom matematikte sadece kümeler kuramında kullanılır.

İlk 9 aksiyoma ZF adı verilir. Sonuncusu da eklenirse, sistem ZFC adını alır. C, "seçim"in İngilizcesi olan "choice" sözcüğünün (ilk!) c'sidir.

ZFC kümeler kuramında sonsuz sayıda aksiyom vardır. Montague 1961'de bu sistemin sonlu sayıda aksiyoma indirgenemeyeceğini kanıtlamıştır. Gödel, Bernays ve von Neumann'ın bulduğu aksiyom sistemi (NBG) sonludur ve her iki sistemde de kümelerle ilgili aynı sonuçların kanıtlanacağı biliniyor. Ancak NBG siteminde küme olmayan sınıflardan da söz edildiğinden, sonlu olmasına karşın, bir anlamda NBG sistemi ZFC'den daha karmaşıktır diyebiliriz. Bir başka deyişle, ZFC sisteminin dili $\forall$, $\vee$, = gibi standard matematik simgeleri dışında sadece ∈ simgesini kulanırken, NBG sistemi ∈ simgesi dışında, küme olmayan topluluklardan sözedebilmek için fazladan bir simge daha kullanmaktadır.

Seçim Aksiyomu. Son aksiyom (Seçim Aksiyomu ya da kısaca C, bazen AC) diğer aksiyomlardan farklıdır, çünkü (ikincisi dışında) diğer aksiyomlar "yapıcı" nitelikte aksiyomlardır, bir ya da birkaç kümeden yeni bir küme inşa etme yöntemini söylerler. İlk on aksiyomla inşa edilen her küme kullanılan aksiyom tarafından tanımlanmış ve belirlenmiştir; bu aksiyomlarla inşa edilen o kümeden sadece bir tane vardır. (7'nci aksiyom bu dediğimize bir istisna belki ama olsun... Önemsemeyin. 7'nci aksiyomun varlığını söylediği kümenin biricik olmaması bu aksiyomun en önemli niteliği değildir. Bu aksiyomu birazcık değiştirerek, (en küçük) parantezini ekleyerek, tek bir kümenin varlığını söyler hale getirebiliriz.) Oysa Seçim Aksiyomu'nda varlığı söylenen kümenin (daha doğrusu fonksiyonun, ama fonksiyonlar da bir kümedir) nasıl bir şey olduğuna dair bir şey söylenmemektedir. Seçim Aksiyomu sadece bir fonksiyonun varlığından sözetmektedir, fonksiyonun hangi fonksiyon olduğunu söylememektedir. Seçim Aksiyomu'nda varlığı söylenen fonksiyonlardan birkaç tane olabilir, ki genellikle öyledir, ve bu fonksiyonlardan birini göstermek imkânsızdır.

Varlığı Seçim Aksiyomu'yla kanıtlanmak **zorunda** olan fonksiyonlar açık seçik tanımlanamazlar. Bu yüzden Seçim Aksiyomu uygulamada işe yarar bir biçimde, örneğin bilgisayarlarda ya da teknolojide) kullanılamaz, Seçim Aksiyomu'nun sadece kuramsal bir önemi vardır.

Hilbert'in teşvikiyle kümeler kuramıyla ilgilenmeye başlayan Zermelo, her kümenin iyi sıralanabileceğini kanıtlayarak genç yaşında ünlenmiş, ancak kanıtında herkes tarafından kabul görmeyen Seçim Aksiyomu'nu kullanmıştır (1904). Bugün Seçim Aksiyomu'yla Zermelo'nun bu teoreminin eşdeğer olduğu biliniyor, yani Zermelo, teoremini kanıtlamak için Seçim Aksiyomu'nu kullanmak zorundaydı, başka türlü yapamazdı. Bu eşdeğerliliği 24. İyisıralama Teoremi'nde kanıtlayacağız.

Seçim Aksiyomu Zermelo'dan önce de kullanılmıştı, ancak kümeler kuramı henüz aksiyomlaşmadığından ve matematikçilerin böyle bir sorunu da olmadığından kimse bunun farkına varmamıştı.

Bağımsızlık. 1935'te Gödel, eğer ZF çelişkisizse ZFC'nin de çelişkisiz olduğunu kanıtlamıştır.

1963'te Cohen, eğer ZF çelişkisizse, ZF'ye C'nin değillemesi olan ¬**C** önermesi (yani C'nin yanlış olduğu) eklendiğinde de elde edilen kuramın çelişkisiz olduğunu kanıtlamıştır.

Seçim Aksiyomu'nun Değillemesi (¬**C**). *Elemanları boş olmayan kümeler olduğu halde seçim fonksiyonu olmayan bir küme vardır.*

Aşağıdaki olguyu kanıtlamak hiç de kolay değildir. Böyle bir uğraş bu ders notlarının amaçlarını kat kat aşar. Ama gene de bu önemli olguyu not edelim.

Olgu (Gödel ve Cohen). *Eğer* **ZF** *çelişkisizse*, *hem* (**ZF** + **C**) *hem de* (**ZF** + ¬**C**) *çelişkisizdir.*

Bundan C'nin ZF'den bağımsız olduğu sonucu çıkar: Eğer ZF çelişkisizse, ZF'ye C'yi de, değillemesi olan ¬C'yi de eklesek çelişkisiz bir kuram elde ederiz.

Bu aşamada, C'yi mi yoksa ¬C'yi mi aksiyom olarak kabul etmeli gibi artık matematiği aşan felsefi bir problemle karşı karşıyayız. Ne C'yi ne de C'nin değillemesini kabul edip sadece ZF'yle yetinmek de bir seçenektir elbet.

C'yi Kabul Etmeli mi Etmemeli mi? C'yi kabul edersek daha çok teorem kanıtlarız elbet, çünkü kuramımız C'nin kabulüyle daha da zenginleşmiştir, örneğin C'nin kendisi bu teoremlerden biridir. C'nin değillemesini kabul edersek de daha çok teorem elde ederiz ama C'yi kabul ederek daha "olumlu" teoremler elde edilir, çünkü C sonuç olarak bir fonksiyonun varlığını söylüyor; C'nin değillemesi ise böyle bir fonksiyonun her zaman olmayabileceğini söylüyor, üstelik ne zaman olmayacağından hiç sözetmeden...

Eğer sadece olumlu teorem (varlık teoremleri) elde etmek bizi ilgileniyorsa, o zaman C'yi kabul etmeliyiz.

Ama C'yi kabul edip etmemek felsefi bir sorun olarak da görülebilir (ve hatta görülmeli). Sonuç olarak matematikle gerçeği anlamaya ve açıklamaya çalışıyoruz. Gerçeğe uymadığını düşündüğümüz bir önermeyi aksiyom olarak kabul etmemeliyiz. Yani C'yi kabul edip etmemek gerçeği nasıl algıladığımızla ve gerçeğin ne olduğuyla ilgili bir sorundur. Gerçek yaşamda (her ne demekse!) C'nin doğru olduğunu düşünüyorsak o zaman C'yi kabul etmeliyiz, yoksa etmemeliyiz.

En iyisi C'nin sonuçlarına bakmak. Eğer C'nin sonuçları kabul edilebilir, beklenen, çok şaşırtmayan sonuçlarsa o zaman C'yi kabul etmeliyiz. Ama eğer C'nin sonuçları tüyleri diken diken eden sonuçlarsa, o zaman C'yi kabul etmemeliyiz.

Bu sayıda C'nin birçok sonucunu göreceğiz. Bunlardan ikisini alalım bu bölüme.

Seçim Aksiyomu'ndan çok "doğal" sonuçlar çıkabildiği gibi hiç de doğal görünmeyen sonuçlar çıkar. Her ikisinden de birer örnek vereceğiz.

"Doğal" Bir Sonuç. X sonsuz bir küme olsun. X'in sayılabilir sonsuzlukta bir altkümesi var mıdır? Yani X'ten öyle x_0, x_1, x_2, x_3, ... elemanları bulabilirmiyiz ki,

$$\{x_0, x_1, x_2, x_3, ...\}$$

sayılabilir sonsuzlukta, yani $\mathbb{N}$ ile aralarında

$$n \mapsto x_n$$

gibi bir eşleme olan bir küme olsun?

Seçim Aksiyomu olmadan böyle bir kümenin varlığını kanıtlanamaz. Zorluk şurdadır:

$$\{x_0, x_1, x_2, x_3, ...\}$$

diye X'in sayılabilir sonsuzlukta elemanını içeren bir "nesne" bulabiliriz. Ama bu nesnenin küme olduğunu kümeler kuramının **ZF** aksiyomlarıyla kanıtlamak gerekiyor, oysa Seçim Aksiyomu olmadan bu kanıtlanamaz. Bazı X kümeleri için kanıtlanabilir, ama her sonsuz küme için kanıtlanamaz. Küme olmanın bazı koşulları vardır. $\{x_0, x_1, x_2, x_3, ...\}$ nesnesinin bu koşulları yerine getirdiğini kanıtlayamayız.

"Doğal Olmayan" Bir Sonuç. 1 yarıçaplı (içi dolu) bir küre alalım. Şimdi çok şaşırtıcı bir şey söyleyeceğim. Bu küreyi öyle beş parçaya bölebilirim ki ve bu beş parçayı döndürerek ve öteleyerek (yani hacim ve alan değiştirmeyen dönüşümlerden geçirdikten sonra) öyle bir araya getirebilirim ki, parçalardan ikisinden yarıçapı 1 olan bir küme, geri kalan üçünden gene yarı çapı 1 olan bir küme elde edebilirim. Bu saçmasapan görünen teorem Seçim Aksiyomu'yla kanıtlanabilir ancak. Matematikte buna *Banach-Tarski Paradoksu* denir. Ama aslında bir paradoks değildir, sadece şaşırtıcıdır, paradoksa benzer. Beş parçanın hiçbirinin hacmi olamaz elbet, yoksa hacmi büyütemezdik.) Seçim Aksiyomu'nun yardımıyla, $\mathbb{R}^3$ uzayının hacmi hesaplanamayan altkümelerini bulabiliriz.

Banach-Tarski Paradoksu bu ders notlarında ileride kanıtlanacak.

Seçim Aksiyomu ve Peano

Seçim Aksiyomu'ndan tarihte ilk sözeden Peano'dur. Zermelo'dan 14 yıl önce Seçim Aksiyomu'nun farkına varmıştır. 1890'da yazdığı "Démonstration de l'integrabilité des équations différentielles" [Math. Ann. 37 (1890) 182-229] makalesinin 210'uncu sayfasında sonsuz sayıda seçim yapılamayacağını açıkça yazarak Seçim Aksiyomu'nu kullanmayı reddetmiştir. Daha da ilginci, bundan beş yıl önce 1985'te, "Sull'integrabilità della equazioni differenziali di primo ordine" [Atti Acad. Sci. Torino 21 (1885/86) 677-685] adlı makalesinde,

> R, *$\mathbb{R}^2$'de kapalı bir dikdörtgen ve* f, *$\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden sürekli bir fonksiyon olsun. Her* $(x, y) \in R$ *için, bu noktanın bir* U *komşuluğunda tanımlı ve türevlenebilir öyle bir* h *fonksiyonu vardır ki,* $h(x) = y$ *ve her* $u \in U$ *için,*
> $$h'(u) = f(u, h(u))$$
> *eşitlikleri geçerlidir*

teoremini kanıtlarken, her $0 < i < 2^n$ için, hiçbiri boş olmayan $A(n, i) \subseteq \mathbb{R}$ kümelerinden birer eleman seçmek zorunda kaldığında, Peano, çok şaşırtıcı bir biçimde, burada tuhaf bir yöntem uygulamak üzere olduğunu ayrımsamış ve rastgele bir seçimin mümkün olmaması gerektiğini açık ve net bir biçimde söylemiştir:

> *Mais comme on ne peut appliquer une infinité de fois une loi arbitraire avec laquelle à une classe α on fait correspondre un individu de cette classe, on a formé ici une loi déterminée avec laquelle à chaque classe α, sous des hypothèses convenables, on fait correspondre un individu de cette classe.*

Nitekim, $A(n, i)$ kümelerinden her biri kapalı ve üstten sınırlı olduğundan, Peano bu kümelerin maksimal elemanını almıştır ve böylece Seçim Aksiyomu'nu kullanmamıştır.