15. Ordinallerde Üs Alma Denemesi (Bir Fiyasko Öyküsü)

Geçen iki bölümde ordinallerde toplama ve çarpma işlemlerini tanımlamıştık. α ve β ordinallerini (bu sırayla) toplamak için α sıralamasının sonuna β sıralamasını eklemiştik; çarpmak için ise $\alpha \times \beta$ kartezyen çarpımını ters alfabetik sıralamayla sıralamıştık.

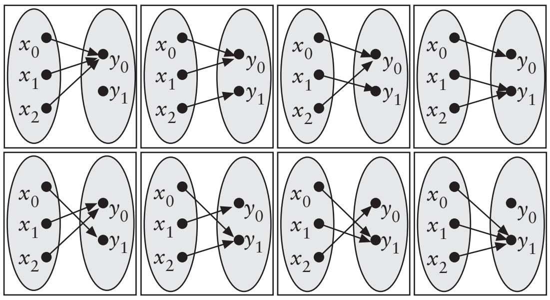
Ya "α üssü β" (yani α^{β}) ordinalini tanımlamak için ne yapmalı? Toplama ve çarpmaya benzetmeye çalışırsak, "α üssü β kadar" elemanı olduğunu düşündüğümüz bir Z kümesi bulup Z'yi iyisıralamalıyız ve α^β ordinalini de Z'nin bu iyisıralamasına eşyapısal olan biricik ordinal olarak tanımlamalıyız.

Eğer bu dediklerimizi bir de "doğal biçimde" yapmayı başarırsak, o zaman üs alma işleminin toplama ve çarpma işlemleriyle uyumlu olacağını umma hakkına sahip olabiliriz.

Doğal sayılardan esinlenelim. Eğer X ve Y, sırasıyla m ve n elemanı olan sonlu iki kümeyse, n^m tane elemanı olan bir küme bulabilir miyiz? Evet! X'ten Y'ye giden tam tamına n^m tane fonksiyon vardır. Nitekim, eğer

$$X = \{x_0, \ldots, x_{m-1}\}$$

ise, X'ten Y'ye giden bir f fonksiyonunu belirlemek için, X'in her x_i elemanı için Y'nin bir $f(x_i)$ elemanını belirlemeliyiz. Her bir x_i için tam n tane seçeneğimiz olduğundan, ve toplam m tane x_i olduğundan, X'ten Y'ye giden toplam fonksiyon sayısı tam tamına n^m'dir.

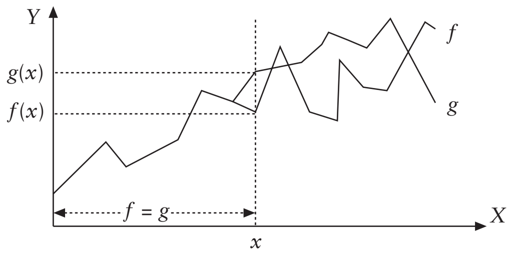


3 elemanlı $X = \{x_0, x_1, x_2\}$ kümesinden 2 elemanlı $Y = \{y_0, y_1\}$ kümesine giden $2^3 = 8$ fonksiyon.

Şimdi X ve Y iyisıralanmış iki küme olsun. Her iki kümenin sıralamasını da aynı simgeyle, < simgesiyle gösterelim. Fonk(X, Y), X'ten Y'ye giden fonksiyonlar kümesi olsun. Fonk(X, Y) kümesi üzerine şu < ikili ilişkiyi tanımlayalım:

$f < g \Leftrightarrow f \neq g$ ve eğer x, X'in $f(x) \neq g(x)$ eşitsizliğini sağlayan en küçük elemanıysa o zaman $f(x) < g(x)$.

Bu ikili ilişkinin bir tamsıralama olduğunu göreceğiz.



x'ten öncesine kadar $f = g$. Ama x'te f ve g değişik değerler alıyorlar. Eğer $f(x) < g(x)$ ise $f < g$ deniyor. x'ten sonra alınan değerlerin önemi yok. Fonksiyonların ayrıştıkları ilk noktaya bakılıyor.

Sayfanın başındaki resimde, 8 fonksiyonu yukarda tanımlanan ilişkiye göre küçükten büyüğe doğru sıraladığımıza dikkatinizi çekerim. Eğer bu örnekte, bir f fonksiyonunu,

$$(f(x_0), f(x_1), f(x_2))$$

üçlüsü olarak gösterirsek, o zaman fonksiyonlar küçükten büyüğe doğru (yani soldan sağa doğru) şöyle yazılırlar:

$$(y_0, y_0, y_0), (y_0, y_0, y_1), (y_0, y_1, y_0), (y_0, y_1, y_1)$$
$$(y_1, y_0, y_0), (y_1, y_0, y_1), (y_1, y_1, y_0), (y_1, y_1, y_1)$$

Eğer y_0 yerine 0, y_1 yerine 1 yazarsak ve parantezleri ve virgülleri atarsak, o zaman fonksiyonlar küçükten büyüğe doğru,

000, 001, 010, 011
100, 101, 110, 111

olarak yazılırlar. Sıralamaya dikkat ettiniz mi? Aynen sayılar gibi (mesela 2 tabanında):

0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, ...

Bundan da bu tanımın oldukça doğal bir tanım olduğu kanısına varabiliriz.

Yukarda tanımlanan ikili ilişkinin bir tamsıralama olduğunu kanıtlayalım.

1. Hiçbir f fonksiyonu için $f < f$ olamaz, çünkü tanımda $f < g$ olabilmesi için $f \neq g$ olması gerektiği yazıyor.

2. Şimdi $f < g$ ve $g < h$ eşitsizliklerini varsayıp $f < h$ eşitsizliğini kanıtlayalım. f ve g'nin ayrıştıkları ilk nokta x_0 olsun. Demek ki her $x < x_0$ için $f(x) = g(x)$ ama $f(x_0) < g(x_0)$. g ve h'nin ayrıştıkları ilk noktaya da x_1 diyelim. Üç şık var, üçünü de teker teker ele alalım.

Eğer $x_0 < x_1$ ise o zaman x_0'dan küçük her x için $f(x) = g(x) = h(x)$, ama $f(x_0) < g(x_0) = h(x_0)$. Demek ki x_0, f ve h'nin ayrıştıkları ilk nokta ve $f(x_0) < h(x_0)$. Tanıma göre $f < g$.

Eğer $x_0 = x_1$ ise o zaman x_0'dan küçük her x için $f(x) = g(x) = h(x)$ ama $f(x_0) < g(x_0) < h(x_0)$. Demek ki x_0, f ve h'nin ayrıştıkları ilk nokta ve $f(x_0) < h(x_0)$. Tanıma göre $f < g$.

Eğer $x_1 < x_0$ ise o zaman x_1'den küçük her x için $f(x) = g(x) = h(x)$ ama $f(x_1) = g(x_1) < h(x_0)$. Demek ki x_0, f ve h'nin ayrıştıkları ilk nokta ve $f(x_0) < h(x_0)$. Tanıma göre $f < g$.

Her üç durumda da $f < g$ eşitsizliğini gösterdik.

Demek ki fonksiyonlar kümesinde tanımlanan < ilişkisi bir sıralamadır. Şimdi bu sıralamanın bir tamsıralama olduğunu gösterelim. Ama bu çok kolay... Eğer $f \neq g$, iki fonksiyonsa,

$$\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$$

boşküme değildir, dolayısıyla (X bir iyisıralama olduğundan) Y'nin $f(x) \neq g(x)$ eşitsizliğini sağlayan bir en küçük x elemanı vardır. Y bir tamsıralama olduğundan ya $f(x) < g(x)$ ya da $g(x) < f(x)$. Birinci durumda $f < g$, ikinci durumda $g < f$.

Buraya kadar her şey yolunda gitti ama bundan ötesi yolunda gitmeyecek. $F(X, Y)$ üzerine tanımladığımız bu tamsıralama ne yazık ki genellikle bir iyisıralama değildir; X ve Y'nin birer iyisıralama olduğu durumda bile.

Bir örnek verelim. $X = \omega$ ve $Y = 2 = \{0, 1\}$ olsun. X'ten Y'ye giden bir fonksiyonu bir 01-dizisi olarak gösterebiliriz. Örneğin,

$$0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$$

dizisi çift sayılarda 0, tek sayılarda 1 değerini alan fonksiyonu simgelesin. Hatta terimlerin arasındaki virgülleri de atarak bu fonksiyonu,

$$01010101\ldots$$

olarak da gösterebiliriz. Şimdi,

$$\begin{aligned} f_0 &= 1111111\ldots. \\ f_1 &= 0111111\ldots \\ f_2 &= 0011111\ldots \\ f_3 &= 0001111\ldots \\ &\ldots \end{aligned}$$

fonksiyonlarını alalım. Bunlar ilk n sayıda 0, daha sonra hep 1 değeri alan fonksiyonlar. Bu fonksiyonlar kümesi A olsun. A'nın en küçük elemanı yoktur. Çünkü tüm f_n'lerden küçük fonksiyonların en büyüğü hep 0 değerini alan 0000000... fonksiyonudur, bu da A'da değildir. Dolayısıyla bu sıralama bir iyisıralama olmuyor.

Ordinallerde üs almayı, toplama ve çarpmada olduğu gibi o kadar doğal bir biçimde tanımlayamayız. Bu uğraşa bir sonraki bölümde girişeceğiz ve üs almayı tümevarımla kanıtlayacağız.

$F(X, Y)$ kümesi üzerine yukarda tanımladığımız tamsıralama gene de ilginç bir sıralamadır. Bu sıralamayla ilgili bir iki alıştırmayla bitirelim bölümü.

Alıştırmalar

Y iyisıralı bir küme olsun.

15.1. $F(\omega, Y)$'nin boş olmayan her altkümesinin en büyük altsınırı olduğunu gösterin. Yani $\emptyset \neq A \subseteq F(\omega, Y)$ ise, öyle bir $f \in F(\omega, Y)$ vardır ki,

a. Her $a \in A$ için, $f \leq a$,

b. Eğer $g \in F(\omega, Y)$ "her $a \in A$ için, $g \leq a$" koşulunu sağlıyorsa o zaman $g \leq f$.

15.2. $F(\omega, Y)$'nin boş olmayan her altkümesinin en küçük üstsınırı her zaman var mıdır?

15.3. İlk alıştırmayı ω yerine iyisıralı bir X alarak yapın.

15.4. $f, g \in F(\omega, Y)$ olsun. Eğer $f \neq g$ ise, n, $f(n) \neq g(n)$ eşitsizliğini sağlayan en küçük doğal sayı olsun. $d(f, g) = 1/2^n$ olsun. $d(f, f) = 0$ olarak tanımlansın. Şunları gösterin:

a. $d(f, g) \geq 0$ ve, $d(f, g)$, ancak ve ancak $f = g$ ise 0 olabilir.

b. $d(f, g) = d(g, f)$.

c. $d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g)$.

Dolayısıyla d, $F(\omega, Y)$ üzerine bir "mesafe"dir. d mesafesinin (c)'den daha güçlü bir özelliği vardır:

d. $d(f, g) \leq \max\{d(f, h), d(h, g)\}$.

16. Ordinallerde Üs Alma (Bir Başarı Öyküsü)

Ordinallerde toplama ve çarpmayı oldukça doğal bir biçimde tanımladıktan sonra, bir önceki bölümde üs almayı da aynı doğallıkta yapmaya çalıştık ama beceremedik. Bu bölümde ordinallerde üs almayı tümevarımla tanımlayacağız. Önceki bölümlerde şu sonuçları kanıtlamıştık.

Tümevarımla Ordinal Toplaması 13.11. *Ordinal toplaması, α ve β ordinalleri için,*

$$\alpha + 0 = \alpha,$$
$$\alpha + S(\beta) = S(\alpha + \beta)$$

ve bir λ limit ordinali için,

$$\alpha + \lambda = \bigcup_{\beta<\lambda} (\alpha + \beta)$$

eşitlikleri tarafından belirlenmiştir.

Tümevarımla Ordinal Çarpması 14.12. *Ordinal çarpması,*

$$\alpha 0 = 0,$$
$$\alpha S(\beta) = \alpha\beta + \alpha,$$

ve bir λ limit ordinali için,

$$\alpha\gamma = \bigcup_{\beta<\lambda} \alpha\beta$$

eşitlikleri tarafından belirlenmiştir.

Ordinallerde üs almayı da bu yöntemle tümevarımla tanımlayacağız.

Tanım. α *ve* β *ordinal olsunlar.*

$$\alpha^0 = 1,$$
$$\alpha^{S(\beta)} = \alpha^\beta\alpha$$

olarak tanımlayalım. Eğer λ *limit ordinalse,*

$$\alpha^\lambda = \bigcup_{\beta<\lambda} \alpha^\beta$$

olsun.

Önsav 16.1. α *ve* β *birer ordinalse,* α^β *da ordinaldir.*

Kanıt: β üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. α'yı kanıt boyunca sabitliyoruz.

$\beta = 0$ ise, önermenin doğruluğu bariz.

Eğer önerme β için doğruysa $S(\beta)$ için de doğru olduğu çok belli, çünkü $\alpha^{S(\beta)} = \alpha^\beta\alpha$.

Şimdi λ bir limit ordinal olsun ve λ'dan küçük β ordinalleri için α^β'nın bir ordinal (dolayısıyla bir küme) olduğunu varsayalım. $\alpha^\gamma = \bigcup_{\beta<\lambda} \alpha^\beta$ olduğundan,

$$A(\lambda) = \{\alpha^\beta : \beta < \lambda\}$$

topluluğunun bir küme olduğunu kanıtlamak yeterlidir, çünkü herhangi bir ordinal kümesinin bileşiminin (hem bir küme hem de) bir ordinal olduğunu (Teorem 10.10) biliyoruz.

$A(\lambda)$ topluluğun bir küme olduğunu göstermek için Yerleştirme Aksiyomu'nu kullanacağız.

α ordinalini sabitleyelim. Her $\beta < \lambda$ ordinali için, α^β ordinalini β cinsinden ifade eden bir formül bulmalıyız. Yani öyle bir $\varphi(x, z)$ formülü bulmalıyız ki, eğer $\beta < \lambda$ ise, $\varphi(\beta, z)$ ancak $z = \alpha^\beta$ olduğunda doğru olsun.

$\varphi(\beta, z)$ formülü şunları desin: β bir ordinaldir ve öyle bir A ordinaller kümesi ve bir $f : \beta +1 \to A$ eşlemesi vardır ki,

a) $f(0) = 1$ ve

b) her γ için eğer $\gamma \in \beta$ ise, $f(\gamma+1) = f(\gamma)\alpha$ ve

c) her limit $\lambda \in \beta+1$ için, $f(\lambda) = \bigcup_{\gamma<\lambda} f(\gamma)$ ve

d) $z = f(\beta)$.

Buradaki A ordinaller kümesinin (eğer varsa)

$$\{\alpha^\gamma : \gamma \leq \beta\}$$

olması gerektiği ve f fonksiyonunun $f(\gamma) = \alpha^\gamma$ kuralıyla verilmesi gerektiği belli. Tek yapmamız gereken, $\beta < \lambda$ için,

$$\{\alpha^\gamma : \gamma \leq \beta\}$$

topluluğunun bir küme olduğunu göstermek. Bunun için, elbette $A(\beta)$'nın bir küme olduğunu göstermek yeterli.

Şimdi kanıtın ta en başına dönelim ve "α *ve* β *ordinallerse*, α^β *da ordinaldir*" önermesi yerine "α *ve* β *ordinallerse*, α^β *da ordinaldir* ***ve*** $A(\beta)$ *bir kümedir*" önermesini aynen yukarda yaptığımız gibi kanıtlayalım. Ayrıntıları (eğer kalmışsa!) okura bırakıyoruz. □

α^β ordinaline "α ***üssü*** β" denir.

0^0'ın 1 olarak tanımlandığına dikkatinizi çekerim.

16.3. Temel Özellikler

Tahmin edilen ilk eşitlik gerçekten doğru:

$$\alpha^1 = \alpha^{S(0)} = \alpha^0\alpha = 1\alpha = \alpha.$$

İkinci eşitlik de:

$$\alpha^2 = \alpha^{S(1)} = \alpha^1\alpha = \alpha\alpha.$$

Her şey bu kadar doğal seyretmiyor ama; örneğin

$$2^\omega = \bigcup_{n<\omega} 2^n = \omega.$$

Teorem 16.2. *Eğer* $1 < \alpha$ *ise* $\beta < \gamma$ *ancak ve ancak* $\alpha^\beta < \alpha^\gamma$.

Kanıt: $\beta < \gamma$ varsayımını yapalım. Sonucu γ üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. $\gamma = 1$ ise, $\beta = 0$ olmalı. O zaman da $\alpha^\beta = \alpha^0 = 1 < \alpha = \alpha^1 = \alpha^\gamma$ olur.

Önsavın γ ve γ'dan küçük ordinaller için doğru olduğunu varsayıp, $\gamma + 1$ için kanıtlayalım. $\beta < \gamma + 1$ olsun. Eğer $\beta < \gamma$ ise o zaman tümevarımla $\alpha^\beta < \alpha^\gamma$. Eğer $\beta = \gamma$ ise o zaman $\alpha^\beta = \alpha^\gamma$. Demek ki her iki durumda da $\alpha^\beta \le \alpha^\gamma$. Ama Önsav 14.5'e göre

$$\alpha^\beta \le \alpha^\gamma = \alpha^\gamma 1 < \alpha^\gamma\alpha = \alpha^{\gamma+1}.$$

Şimdi λ bir limit ordinal olsun. λ'dan küçük ordinaller için önsavın doğru olduğunu varsayalım. $\beta < \lambda$ olsun. Tanımdan dolayı $\alpha^\beta \subseteq \alpha^\lambda$. Demek ki $\alpha^\beta \le \alpha^\lambda$. Ama λ limit olduğundan, $\beta + 1 < \lambda$ ve gene $\alpha^{\beta+1} \le \alpha^\lambda$. Öte yandan Önsav 14.5'e göre $\alpha^\beta < \alpha^{\beta+1}$. Demek ki $\alpha^\beta < \alpha^{\beta+1} \le \alpha^\lambda$.

Şimdi $\alpha^\beta < \alpha^\gamma$ varsayımını yapalım. Eğer $\beta \ge \gamma$ olsaydı, birinci kısma göre $\alpha^\beta \ge \alpha^\gamma$ olurdu, çelişki. Demek ki $\beta < \gamma$. □

Sonraki teoremler için teknik bir sonuca ihtiyacımız var:

Önsav 16.3. α *bir ordinal olsun.*

i. λ *bir limit ordinal ve* $B \subseteq \lambda$, λ*'da kofinal bir altkümeyse*, $\{\alpha^\beta : \beta \in B\}$ *kümesi* α^λ*'da kofinaldir.*

ii. B *bir ordinal kümesiyse* $\bigcup_{\beta\in B} \alpha^\beta = \alpha^{\bigcup_{\beta\in B}\beta}$.

Kanıt: i. $\delta \in \alpha^\lambda$ olsun. $\alpha^\lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} \alpha^\gamma$ olduğundan, bir $\gamma < \lambda$ için $\delta \in \alpha^\lambda$ olur. B, λ'da kofinal olduğundan, bir $\beta \in B$ için $\gamma \le \beta$ olur. Demek ki, Teorem 16.2'ye $\delta \in \alpha^\lambda \subseteq \alpha^\beta$ olur, yani $\delta < \alpha^\beta$.

ii. Teorem 16.2'ye göre her $\beta \in B$ için $\alpha^\beta \subseteq \alpha^{\bigcup_{\beta\in B}\beta}$. Aynı teorem, eğer B'nin en büyük elemanı varsa eşitliği verir. B'nin en büyük elemanının olmadığını varsayıp ters içindeliği kanıtlayalım. Bu durumda, $\bigcup_{\beta\in B} \beta = \lambda$ bir limit ordinaldir (Alıştırma 11.4) ve B bu limit ordinalde kofinaldir (bkz. Bölüm 13.7). Birinci kısma göre

$$\bigcup_{\beta\in B} \alpha^\beta = \alpha^\lambda = \alpha^{\bigcup_{\beta\in B}\beta}.$$ □

Teorem 16.4. $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta\alpha^\gamma$.

Kanıt: γ üzerine tümevarımla. $\gamma = 0$ için:

$$\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^{\beta+0} = \alpha^\beta = \alpha^\beta 1 = \alpha^\beta\alpha^0 = \alpha^\beta\alpha^\gamma.$$

Teoremi γ için doğru olduğunu varsayıp, eşitliği $\gamma + 1$ için kanıtlayalım:

$$\alpha^{\beta+(\gamma+1)} = \alpha^{(\beta+\gamma)+1} = \alpha^{\beta+\gamma}\alpha = (\alpha^\beta\alpha^\gamma)\alpha = \alpha^\beta(\alpha^\gamma\alpha) = \alpha^\beta\alpha^{\gamma+1}.$$

Son olarak λ bir limit ordinal olsun. Teoremdeki eşitliğin λ'dan küçük ordinaller için doğru olduğunu varsayıp λ için kanıtlayalım. $\beta + \lambda$'nın da bir limit ordinal olduğunu ve

$$\alpha^{\beta+\lambda} = \bigcup_{\gamma<\lambda} \alpha^{\beta+\gamma}$$

eşitliğini Önsav 16.3.ii'den biliyoruz. Demek ki,

$$\alpha^{\beta+\lambda} = \bigcup_{\gamma<\lambda} \alpha^{\beta+\gamma} = \bigcup_{\gamma<\lambda} \alpha^{\beta}\alpha^{\gamma} = \alpha^{\beta}\bigcup_{\gamma<\lambda} \alpha^{\gamma} = \alpha^{\beta}\alpha^{\lambda}.$$

Son eşitlikte Önsav 14.8'i kullandık. □

Teorem 16.5. $(\alpha^{\beta})^{\gamma} = \alpha^{\beta\gamma}$.

Kanıt: γ üzerine tümevarımla.

Eğer $\gamma = 0$ ise, $(\alpha^{\beta})^{\gamma} = (\alpha^{\beta})^{0} = 1$ ve $\alpha^{\beta\gamma} = \alpha^{\beta 0} = \alpha^{0} = 1$.

Eğer eşitlik γ için doğruysa,

$$(\alpha^{\beta})^{\gamma+1} = (\alpha^{\beta})^{\gamma}\alpha^{\beta} = \alpha^{\beta\gamma}\alpha^{\beta} = \alpha^{\beta\gamma+\beta} = \alpha^{\beta(\gamma+1)}.$$

Eğer γ limit ordinalse ve teorem γ'dan küçük δ ordinalleri için doğruysa,

$$(\alpha^{\beta})^{\gamma} = \bigcup_{\delta<\gamma} (\alpha^{\beta})^{\delta} = \bigcup_{\delta<\gamma} \alpha^{\beta\delta}.$$

Alıştırma 14.5'e göre $\beta\gamma$ bir limit ordinaldir ve

$$\{\beta\delta : \delta < \gamma\}$$

kümesi $\beta\gamma$'da kofinaldir. Önsav 16.3.i'e göre

$$\{\alpha^{\beta\delta} : \beta \in B\}$$

kümesi $\alpha^{\beta\gamma}$'da kofinaldir. Gene Önsav 16.3.i'e göre

$$\bigcup_{\delta<\gamma} \alpha^{\beta\delta} = \alpha^{\beta\gamma}.$$ □

Son olarak, toplama işlemini çok kolaylaştıracak ve

$$1 + \omega = \omega$$

eşitliğini genelleştiren bir eşitlik kanıtlayalım.

Teorem 16.5. *Eğer* $\beta < \alpha$ *ise*, $\omega^{\beta} + \omega^{\alpha} = \omega^{\alpha}$.

Kanıt: $\alpha = \beta + \gamma$ eşitliğini sağlayan bir $\gamma > 0$ vardır. Demek ki,

$$\begin{aligned}\omega^{\beta} + \omega^{\alpha} &= \omega^{\beta} + \omega^{\beta+\gamma} = \omega^{\beta} + \omega^{\beta}\omega^{\gamma}\\ &= \omega^{\beta}(1 + \omega^{\gamma}) = \omega^{\beta}\omega^{\gamma} = \omega^{\beta+\gamma} = \omega^{\alpha}.\end{aligned}$$

İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

Sonuç 16.6. *Eğer* $\beta < \alpha$ *ve* $\omega^\alpha < \gamma$ *ise* $\omega^\beta + \gamma = \gamma$.

Kanıt: δ ordinali $\gamma = \omega^\alpha + \delta$ eşitliğini sağlasın. O zaman,

$$\omega^\beta + \gamma = \omega^\beta + \omega^\alpha + \delta = \omega^\alpha + \delta = \gamma$$

olur. □