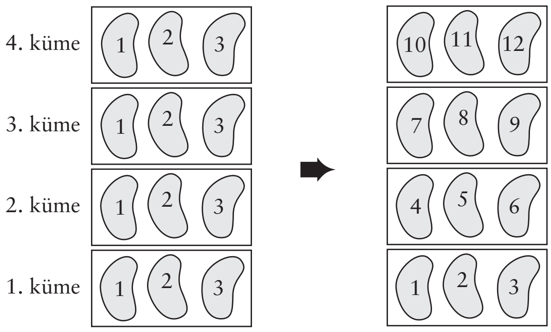
14. Ordinallerde Çarpma İşlemi

14.1. Çarpmanın Tanımı

Gene ilkokul yıllarımızdan başlayalım. İlkokulda doğal sayıların çarpımını nasıl öğrendiğinizi anımsayın. $3 \times 4 = 12$ eşitliği için her biri içinde üç fasulye barındıran dört küme üstüste konur ve bütün fasulyeler teker teker sayılır.



Yukardaki şekilde fasulyeleri saymaya en alttan ve en soldan başladık ve sağa doğru gittik. En sağa ulaştığımızda bir üst sıranın tekrar en solundan başladık. Yani fasulyeleri yatay, fasulye kümelerini dikey sıraya dizdik, önce doğuya sonra kuzeye giderek saydık.

Ordinaller de işte aynen böyle çarpılır.

α ve β iki ordinal olsun. Her birinin içinde α tane fasulye bulunan β tane fasulye kümesini üstüste koyup yukardaki "önce doğu sonra kuzey" yöntemiyle sayalım. Burada saymakla aslında iyisıralamayı kastediyoruz.

Matematiksel tanımı birazdan vereceğiz. Önce tanım planımızı açıklayalım: α ve β, çarpımını tanımlayacağımız iki ordinal olsun. Ordinal olduklarından, α ve β iyisıralanmış kümelerdir. Önce $\alpha \times \beta$ kartezyen çarpımını iyisıralayacağız. Her iyisıralama gibi, iyisıralanmış $\alpha \times \beta$ kartezyen çarpımı da bir ordinale eşyapısaldır. $\alpha\beta$ çarpımını, $\alpha \times \beta$ kartezyen çarpımının eşyapısal olduğu ordinal olarak tanımlayacağız.

Bölüm 2.2.6'da X ve Y sıralı kümelerinin $X \times Y$ kartezyen çarpımının ***alfabetik sıralama*** denilen yöntemle nasıl sıralanabileceğini görmüştük. Ayrıca Bölüm 5.3'te eğer X ve Y iyisıralı kümelerse, bu alfabetik sıralamanın $X \times Y$'yi iyisıraladığını görmüştük.

Ordinaller sözkonusu olduğunda (nedendir bilinmez!) alfabetik sıralama değil, birazdan tanımlayacağımız ters alfabetik sıralama kullanılır.

$(X, <)$ ve $(Y, <)$ sıralı birer küme olsun. $X \times Y$ kartezyen çarpımı üzerine şu sıralamayı koyalım: $x_1, x_2 \in X$, $y_1, y_2 \in Y$ için,

$$(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$$

ancak ve ancak

$$y_1 < y_2 \text{ ya da } y_1 = y_2 \text{ ve } x_1 < x_2$$

ise. Bu, aynen biraz önceki "önce doğu sonra kuzey" sıralamasıdır. (x, y) çiftleri önce y'lere göre sıralanırlar; y'ler eşit olduğunda x'lere bakılır. Bu, gerçekten bir sıralamadır. Bu sıralamaya ***ters alfabetik sıralama*** denir.

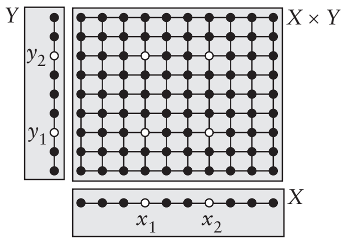
Örneğin eğer $X = \{a, b, c\} = Y$ ise ve her iki sıralamada da

$$a < b < c$$

ise, (x, y) yerine xy yazarsak, ters alfabetik sıralamada,

$$aa < ba < ca < ab < bb < cb < ac < bc < cc$$

olur.



$(x_1, y_1) < (x_2, y_1) < (x_1, y_2) < (x_2, y_2)$

Ayrıca eğer $(X, <)$ ve $(Y, <)$ iyisıralı kümelerse, $X \times Y$ de ters alfabetik sıralamayla iyisıralanır. Bunun kanıtı çok kolaydır ve aynen alfabetik sıralamada olduğu gibidir.

Her $y \in Y$ için, $X \approx X \times \{y\}$ ve her $x \in X$ için $Y \approx \{x\} \times Y$ olduğundan, eğer her ikisi birden boşküme değilse, X ve Y sıralamaları $X \times Y$'nin içine gömülürler. Eğer Y'nin en küçük elemanı varsa, diyelim y_0, o zaman, $X \times \{y_0\}$, $X \times Y$'nin başlangıç dilimi olduğundan, X, $X \times Y$'nin içine bir başlangıç dilimi olarak gömülür.

Şimdi ordinallere gelelim. α ve β birer ordinal olsun. Demek ki α ve β iyisıralı kümeler. Dolayısıyla $\alpha \times \beta$ kartezyen çarpımı ters alfabetik sıralamayla iyisıralanmıştır. Her iyisıralı küme gibi, iyisıralı $\alpha \times \beta$ kümesi de bir ordinale eşyapısaldır. İşte, ters alfabetik sıralanmış $\alpha \times \beta$'nın eşyapısal olduğu bu ordinale α'yla β'nın ***çarpımı*** denir. α ve β'nın bu çarpımı $\alpha\beta$ ya da $\alpha \cdot \beta$ olarak yazılır. Bir önceki paragrafta, eğer $\alpha, \beta \neq \emptyset$ ise, $\alpha \leq \alpha\beta$ ve $\beta \leq \alpha\beta$ eşitsizliklerinin kanıtlandığına dikkatinizi çekerim.

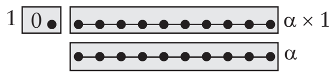
14.2. Temel Sonuçlar

Her şeyden önce, $0 \cdot \alpha = \alpha \cdot 0 = 0$ eşitliği geçerlidir, çünkü $0 = \emptyset$ ve $\alpha \times \emptyset = \emptyset \times \alpha = \emptyset$.

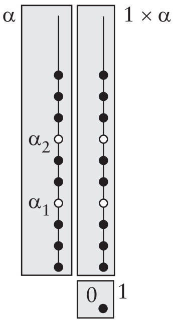
Sonra, $1 \cdot \alpha = \alpha \cdot 1 = \alpha$, çünkü

$$\alpha \times 1 = \alpha \times \{0\} = \{(\beta, 0) : \beta \in \alpha\} \approx \alpha.$$

Burada, en sondaki $\approx$ işareti iki (iyi)sıralı küme arasındaki eşyapısallığı belirtiyor. Soldaki kartezyen çarpım ters alfabetik sı-



ralanmış, ama y koordinatı tek bir değer alabildiğinden ters ya da düz alfabetik sıralamalar arasında bir fark yok. Sağdaki ise bildiğimiz α ordinali... Resim yukarda.



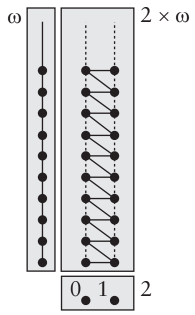
$(0, \alpha_1) < (0, \alpha_2) \Leftrightarrow \alpha_1 < \alpha_2$

Aynen bunun gibi, $1 \times \alpha \approx \alpha$'dır, yani $1 \cdot \alpha = \alpha$ ama bu sefer şekil yatay değil yanda görüldüğü gibi dikey. Dikey mikey, gene de eşyapısal.

$\alpha\beta = \gamma$ gibi bir ordinal eşitliği göstermek için, toplamada da yaptığımız gibi, $\alpha\beta \approx \gamma$ eşyapısallığını göstermek yeterlidir, çünkü eşyapısal iki ordinal eşit olmak zorundadır. Demek ki $\alpha\beta = \gamma$ eşitliği için, ters alfabetik sıralanmış $\alpha \times \beta$ ile γ'nın eşyapısal olduklarını göstermek yeterlidir.

Ordinal çarpmasında da toplamada olduğu gibi bazı sürprizler var. Soldan çarpmayla sağdan çarpma aynı sonucu vermez. Örneğin $2\omega = \omega$'dır, ama $\omega 2 \neq \omega$'dır.

Önce $2\omega = \omega$ eşitliğini görelim. Tanım gereği $2\omega \approx 2 \times \omega$ olduğundan, $2 \times \omega \approx \omega$ eşyapısallığını göstermek yeterlidir, çünkü o zaman $2\omega \approx \omega$ elde ederiz ve buradan $2\omega = \omega$ çıkar.



$2 \cdot \omega : (0, 0) < (1, 0) < (0, 1) < (1, 1) < (0, 2) < (1, 2) < \ldots$

$\omega : \quad 0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \ldots$

Resim yararlıdır, $2 \times \omega$'nın ve ters alfabetik sıralamasının bir resmini yaptık bir önceki sayfada. Bu resim ve açıklaması bize ordinal çarpması hakkında bayağı bir sezgi kazandıracak.

Resmin açıklaması: En alt kattan başlayarak önce soldan sağa, sonra aşağıdan yukarıya doğru zigzag sıraladığımızı anımsayın. $2 \times \omega$ kümesi, ters alfabetik sıralamayla,

$$(0, 0) < (1, 0) < (0, 1) < (1, 1) < (0, 2) < (1, 2) < \dots$$

diye sıralanmış, aynen

$$\omega : 0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \dots$$

sıralaması gibi. Daha biçimsel olarak, $2 \times \omega$ iyisıralamasıyla ω arasındaki eşyapı eşlemesi, $f(i, j) = 2j + i$ kuralıyla belirlenen

$$f : 2 \times \omega \to \omega$$

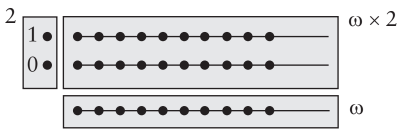
fonksiyonuyla verilmiş. (Herhangi iki iyisıralama arasında en fazla bir eşyapı eşlemesi olabilir.) Demek ki $2\omega \approx 2 \times \omega \approx \omega$ ve, 2ω ile ω eşyapısal ordinal olduklarından eşittirler.

Şimdi de $\omega 2$'nin nasıl bir sıralama olduğunu anlayalım.

$$\omega 2 \neq \omega$$

eşitsizliğini göreceğiz.

$\omega 2 \approx \omega \times 2$ olduğundan, bu kez $\omega \times 2$'nin ters alfabetik sıralamasına bakmak gerekiyor, yani bu kez ω yatay eksen, $2 = \{0, 1\}$ ise dikey eksen olacak. Şekil aşağıda.



$\omega \times 2 : (0, 0) < (1, 0) < (2, 0) < \dots < (0, 1) < (1, 1) < (2, 1) < \dots$

(0, 0)'dan başlayarak sağa gidiyoruz. İkinci koordinatı 0 olan $(n, 0)$ çiftlerini bitirdiğimizde, ikinci koordinatı 1 olan $(n, 1)$ çiftlerine sıra geliyor.

$\sqcup$ simgesinin ayrık kümelerin bileşimini simgelediğini anımsayarak,

$$\omega \times 2 = \omega \times \{0, 1\} = \omega \times \{0\} \sqcup \omega \times \{1\}$$

olarak yazabiliriz. Ters alfabetik sıralamada, $\omega \times \{0\}$ kümesinin her elemanı $\omega \times \{1\}$ kümesinin her elemanından daha küçüktür. Ayrıca $\omega \times 2$'nin hem $\omega \times \{0\}$ altsıralaması hem de $\omega \times \{1\}$ altsıralaması ω sıralamasıyla eşyapısaldır. Yani $\omega \times 2$ sıralamasında ω'nın bir kopyası olan $\omega \times \{1\}$, gene ω'nın bir kopyası olan $\omega \times \{0\}$'dan sonra konulmuştur, aynen $\omega + \omega$'da olduğu gibi... Demek ki $\omega 2 \approx \omega \times 2 \approx \omega + \omega$, yani $\omega 2 = \omega + \omega \neq \omega$.

Demek ki ordinaller çarpımında $\alpha\beta = \beta\alpha$ eşitliği her zaman doğru değildir, yani çarpma işlemi değişmeli değildir. Toplama da değişmeli değildi anımsarsanız.

Öte yandan $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ eşitliği (neyse ki!) doğrudur.

Önsav 14.1. *Eğer* α, β *ve* γ *birer ordinalse,*

$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma).$$

Kanıt: $(\alpha\beta)\gamma$ ordinali, her bir kartezyen çarpımın ters alfabetik sıralanmış olduğu $(\alpha \times \beta) \times \gamma$ sıralamasıyla eşyapısaldır. $\alpha(\beta\gamma)$ ordinali ise, kartezyen çarpımların gene ters alfabetik sıralanmış olduğu $\alpha \times (\beta \times \gamma)$ sıralamasıyla eşyapısaldır. Dolayısıyla $(\alpha \times \beta) \times \gamma \approx \alpha \times (\beta \times \gamma)$ eşyapısallığını kanıtlamalıyız.

$(\alpha \times \beta) \times \gamma$ ile $\alpha \times (\beta \times \gamma)$ arasında doğal bir eşleme vardır,

$$f((a, b), c) = (a, (b, c))$$

eşlemesi. Bu eşlemenin sıralamaya saygı duyduğunu kanıtlamak istiyoruz. Demek ki

$$((a, b), c) < ((a', b'), c') \Leftrightarrow (a, (b, c)) < (a', (b', c'))$$

önermesini kanıtlamalıyız. Başlayalım:

$((a, b), c) < ((a', b'), c')$ eşitsizliğini varsayalım.

$$(a, (b, c)) < (a', (b', c'))$$

eşitsizliğini kanıtlayacağız. Eğer $c < c'$ ise $(b, c) < (b', c')$ olacağından, bu durumda sorun yok. Bundan böyle $c = c'$ eşitliğini varsayalım. O zaman $(a, b) < (a', b')$ olmak zorunda. Eğer $b < b'$ ise, $(b, c) = (b, c') < (b', c')$ olur, bu durumda da sorun yok. Bundan böyle bir de ayrıca $b = b'$ eşitliğini varsayalım. O zaman $a < a'$ olmak zorunda. O zaman da

$$(a, (b, c)) < (a', (b, c)) = (a', (b', c'))$$

olur ve bu durumda da sorun yok. $(a, (b, c)) < (a', (b', c'))$ eşitsizliğinden hareketle $((a, b), c) < ((a', b'), c')$ eşitsizliğini kanıtlamayı okura bırakıyoruz. □

$(1 + 1)\omega = 2\omega = \omega \neq \omega + \omega = 1\omega + 1\omega$ eşitliklerinden çarpmanın sağdan toplamaya dağılmadığını biliyoruz, yani

$$(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$$

eşitliği her zaman doğru değil. Öte yandan

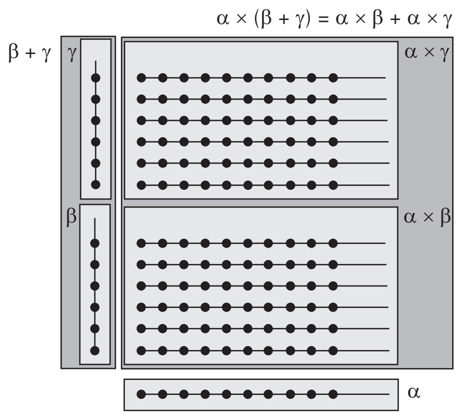
$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

eşitliği doğrudur:

Önsav 14.2. *Eğer* α, β *ve* γ *birer ordinalse,*

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

Kanıt: $\alpha \times (\beta + \gamma) \approx \alpha \times \gamma + \alpha \times \gamma$ eşyapısallığını kanıtlamalıyız. Aşağıdaki resmin yararlı olacağını ve daha fazla söze gerek olmayacağını umuyoruz. Gene de bir iki laf edelim:



$\alpha \times (\beta + \gamma)$'nın elemanlarını soldan sağa ve aşağıdan yukarı sayarken zorunlu olarak önce $\alpha \times \beta$'nın elemanlarını sayıyoruz, ardından $\alpha \times \gamma$'nın elemanlarını; bu da bize $\alpha \times \beta + \alpha \times \gamma$ sıralamasını verir. □

Sonuç 14.3. *Eğer* α *ve* β *birer ordinalse*,
$$\alpha(\beta + 1) = \alpha\beta + \alpha.$$ □

Sonuç 14.4. *Doğal sayıların doğal sayı olarak ve ordinal olarak çarpımı eşittir.*

Kanıt: 0 ve 1'ile çarpmanın uyuştuklarını gördük. Sonuç 14.3'ten dolayı n ile m'nin çarpımları uyuşuyorsa, n ile $m + 1$'in (yani $S(m)$'nin) de uyuşuyordur. Tümevarımla kanıt işi bitirir. □

14.3. Çarpma ve Sıralama

Toplamayla çarpma arasındaki ilişki Önsav 14.2'de verilmişti. Şimdi sıralamayla çarpma arasındaki ilişkiyi irdeleyelim.

Önsav 14.5. *Eğer* $\alpha < \beta$ *ordinallerse*, *her* $0 < \gamma$ *ordinali için*,
$$\gamma\alpha < \gamma\beta,\ \alpha \leq \gamma\alpha \text{ ve } \alpha \leq \alpha\gamma$$
olur.

Kanıt: $\alpha < \beta$ olduğundan, bir $0 < \delta$ ordinali için, $\beta = \alpha + \delta$ (Önsav 13.5). Şimdi, Önsav 14.2'ye göre,
$$\gamma\beta = \gamma(\alpha + \delta) = \gamma\alpha + \gamma\delta > \gamma\alpha.$$
Burada ayrıca Önsav 13.7'yi kullandık.

Kanıtı $\gamma \times \alpha$'yı $\gamma \times \beta$'nın içine gömerek de yapabilirdik.

α, $\gamma\alpha$'nın (ya da $\gamma \times \alpha$'nın) içine $\{0\} \times \alpha$ olarak gömüldüğünden $\alpha \leq \gamma\alpha$.

$\alpha \leq \alpha\gamma$ eşitsizliğini, α'yı $\alpha \times \gamma$'nın içine $\alpha \times \{0\}$ olarak gömerek elde ederiz. □

Sonuç 14.6. α, β, γ *ordinalleri için*, $\gamma\alpha < \gamma\beta$ *ise*, *o zaman* $\alpha < \beta$. *Ayrıca* $\gamma > 0$ *ve* $\gamma\alpha = \gamma\beta$ *ise*, *o zaman* $\alpha = \beta$.

Kanıt: İlk önerme: $\gamma = 0$ olamaz. $\alpha = \beta$ da olamaz. Eğer $\alpha > \beta$ olsaydı, Önsav 14.5'e göre $\gamma\alpha > \gamma\beta$ olurdu, çelişki.

İkinci önerme: $\alpha < \beta$ olsaydı, Önsav 14.5'e göre $\gamma\alpha < \gamma\beta$ olurdu, çelişki. □

Önsav 14.7. *Eğer* α *ve* β *ordinalleri* $\alpha \le \beta$ *eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman her* γ *ordinali için*, $\alpha\gamma \le \beta\gamma$ *olur*.

Kanıt: $\alpha \le \beta$ olduğundan, $\alpha \times \gamma$ sıralaması $\beta \times \gamma$ sıralamasının bir altkümesi. Demek ki $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$'nın içine gömülüyor. Teorem 10.14'e göre $\alpha\gamma \le \beta\gamma$ olur. □

Önsavdaki $\le$ küçükeşitlik simgesini $<$ simgesiyle değiştiremeyiz, çünkü, örneğin $1 < 2$ ama $\omega = 2\omega$. Sağdan sadeleştirmenin doğru olmadığı aynı eşitlikten belli. Soldan sadeleştirme doğru ama (Sonuç 14.6).

14.4. Ordinallerde Bölme

Ordinallerde doğal sayılardakine benzer bir bölme işlemi vardır. Nasıl doğal sayılarda, 25'i 7'ye,

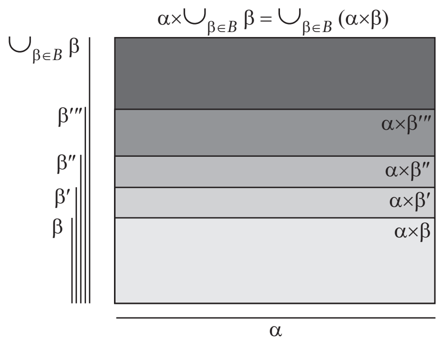
$$25 = 7\times 3 + 4$$

olarak kalanlı bölebiliyorsak, ordinallerde de buna benzer bir bölme yapabiliriz.

Bölme teoremini kanıtlamadan önce daha sonra da ihtiyacımız olacak olan teknik bir önsavı aradan çıkaralım:

Önsav 14.8. *B bir ordinaller kümesi olsun*. α *bir ordinal olsun. O zaman* $\alpha(\bigcup_{\beta\in B} \beta) = \bigcup_{\beta\in B} \alpha\beta$ olur.

Kanıt: Aslında kanıt, aşağıdaki şekilden hemen hemen bariz olmalı. Okurun matematiksel bir kanıtla çok zaman geçirebileceği olasılığını dikkate alarak biçimsel kanıtı sunuyoruz.



Önce ordinallerde $\in$, $<$ ve $\subset$ ilişkilerinin eşdeğer olduklarını anımsatırız (Sonuç 10.14). $\beta \in B$ herhangi bir ordinal olsun.
$$\beta \subseteq \bigcup_{\beta\in B} \beta$$
olduğundan,
$$\beta \leq \bigcup_{\beta\in B} \beta.$$
Önsav 14.5'e göre, $\alpha\beta \leq \alpha(\bigcup_{\beta\in B} \beta)$. Demek ki
$$\alpha\beta \subseteq \alpha(\bigcup_{\beta\in B} \beta)$$
ve dolayısıyla
$$\bigcup_{\beta\in B} \alpha\beta \subseteq \alpha(\bigcup_{\beta\in B} \beta).$$
Eşitliğin her iki tarafında da ordinaller olduğundan, $\bigcup_{\beta\in B} \alpha\beta$ ordinali $\alpha(\bigcup_{\beta\in B} \beta)$ ordinalinin başlangıç dilimi olmalı. Öte yandan,
$$\begin{aligned}\bigcup_{\beta\in B} (\alpha\times\beta) &\approx \bigcup_{\beta\in B} \alpha\beta \subseteq \alpha(\bigcup_{\beta\in B} \beta)\\ &\approx \alpha \times \bigcup_{\beta\in B} \beta = \bigcup_{\beta\in B} (\alpha\times\beta).\end{aligned}$$
Demek ki $\bigcup_{\beta\in B} (\alpha\times\beta)$ ordinali kendisinin bir başlangıç dilimine gömülüyor. Bundan ve Sonuç 7.7'den bu gömmenin özdeşlik fonksiyonu Id olduğu ve $\bigcup_{\beta\in B} \alpha\beta \subseteq \alpha(\bigcup_{\beta\in B} \beta)$ içindeliğinin aslında eşitlik olduğu anlaşılır. □

Şimdi ordinallerde aynen doğal sayılardaki gibi bölme yapabileceğimizi kanıtlayabiliriz.

Teorem 14.9. α *ve* β *birer ordinal olsunlar.* $\beta > 0$ *olsun. O zaman* $\alpha = \beta\gamma + \rho$ *eşitliğini ve* $\rho < \beta$ *eşitsizliğini sağlayan bir ve bir tane* (γ, ρ) *ordinal çifti vardır.*

Kanıt: Önce (γ, ρ) çiftinin varlığını kanıtlayalım. γ'yı $\beta\gamma \leq \alpha$ eşitsizliğini sağlayan en büyük ordinal olarak alacağız.

Eğer $\beta\gamma \leq \alpha$ ise, Önsav 14.5'e göre $\gamma \leq \alpha$ olmalı (yoksa $\alpha \geq \beta\gamma > \beta\alpha \geq \alpha$, çelişki.) Demek ki,
$$\Gamma = \{\gamma : \beta\gamma \leq \alpha\} = \{\gamma \leq \alpha : \beta\gamma \leq \alpha\}$$
topluluğu bir kümedir ve elbette bir ordinal kümesidir. Dolayısıyla $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma$ bir ordinaldir (Teorem 10.10). Önsav 14.8'den dolayı
$$\beta(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \beta\gamma \subseteq \alpha$$

(çünkü eğer $\gamma \in \Gamma$ ise $\beta\gamma \le \alpha$ ve $\beta\gamma \subseteq \alpha$). Demek ki $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma \in \Gamma$, ve $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma$, Γ'nın en büyük elemanı. Bu elemana γ diyelim. Özet olarak, γ, $\beta\gamma \le \alpha$ eşitsizliğini sağlayan en büyük ordinal.

Önsav 13.5'e göre, $\alpha = \beta\gamma + \rho$ eşitliğini sağlayan bir ρ ordinali vardır.

Şimdi ρ ordinalinin β'dan küçük olduğunu kanıtlayalım. Tersini varsayalım: $\rho \ge \beta$ olsun. O zaman $\rho = \beta + \delta$ eşitliğini sağlayan bir δ vardır. Demek ki,

$$\begin{aligned}\alpha &= \beta\gamma + \rho = \beta\gamma + (\beta + \delta) = (\beta\gamma + \beta) + \delta \\ &= \beta(\gamma + 1) + \delta \ge \beta(\gamma + 1)\end{aligned}$$

ve γ'dan daha büyük olan $\gamma + 1$, Γ'nın bir elemanı, bir çelişki. $\rho < \beta$ eşitsizliği kanıtlanmıştır.

Şimdi (γ, ρ) çiftinin biricikliğini kanıtlayalım. $\beta\gamma + \rho = \beta\gamma_1 + \rho_1$ eşitliğini ve $\rho, \rho_1 < \beta$ eşitsizliklerini varsayalım. $\rho = \rho_1$ ve $\gamma = \gamma_1$ eşitliklerini kanıtlayacağız. Eğer $\gamma = \gamma_1$ eşitliğini kanıtlarsak, o zaman sadeleştirerek (Önsav 13.5) $\rho = \rho_1$ eşitliğini elde ederiz. Demek ki $\gamma = \gamma_1$ eşitliğini kanıtlamalıyız. $\gamma \ge \gamma_1$ eşitsizliğini varsayalım. O zaman öyle bir δ vardır ki $\gamma = \gamma_1 + \delta$ (Önsav 13.5). Demek ki,

$$\begin{aligned}\beta\gamma_1 + \rho_1 &= \beta\gamma + \rho = \beta(\gamma_1 + \delta) + \rho \\ &= (\beta\gamma_1 + \beta\delta) + \rho = \beta\gamma_1 + (\beta\delta + \rho).\end{aligned}$$

Sadeleştirerek $\beta > \rho_1 = \beta\delta + \rho \ge \beta\delta$ elde ederiz. Dolayısıyla $\delta = 0$ ve $\gamma = \gamma_1 + \delta = \gamma_1$. □

Sonuç 14.10. *Eğer λ bir limit ordinalse, bir ve bir tek γ ordinali için $\lambda = \omega\gamma$ olur.*

Kanıt: Yukardaki teoreme göre bir γ ordinali ve bir n doğal sayısı için $\lambda = \omega\gamma + n$ olur. Limit ordinalin tanımına göre, $n = 0$ olmalı. □

Sonuç 14.11. *Eğer λ bir limit ordinalse, her n doğal sayısı için, $n\lambda = \lambda$'dır.* □

14.5. Çarpmanın Tümevarımsal Tanımı

Önsav 14.8'den (ve elbette Sonuç 14.3'ten) ordinallerde çarpmanın tümevarımsal bir tanımını elde edebiliriz.

Sonuç 14.12. *Ordinal çarpması*

$$\alpha 0 = 0,$$
$$\alpha S(\beta) = \alpha\beta + \alpha,$$

ve bir λ *limit ordinali için*,

$$\alpha\gamma = \bigcup_{\beta<\lambda} \alpha\beta$$

eşitlikleri tarafından belirlenmiştir. Bir başka deyişle, *eğer* A *ve* B *birer ordinalse ve* C, $A \times B$ *iyisıralamasına eşyapısal bir ordinal içeren bir ordinalse, o zaman*, *her* $\alpha \in A$ *ve* $\beta \in B$ *için*,

$$f(\alpha, \beta) = \alpha\beta$$

kuralıyla tanımlanmış $f : A \times B \to C$ *fonksiyonu*, *yukardaki üç eşitliği sağlayan ve* $A \times B$ *kartezyen çarpımından* C *ordinaline giden tek fonksiyondur.*

Alıştırmalar

14.1. α ve β ordinal olsunlar.

$$\alpha + \beta = \alpha \cup \{\alpha + \gamma : \gamma < \beta\}$$
$$\alpha\beta = \{\alpha\theta + \rho : \theta < \beta \text{ ve } \rho < \alpha\}$$

eşitliklerini kanıtlayın.

14.2. $(\omega 2)\omega = \omega\omega$ eşitliğini kanıtlayın.

14.3. $(\omega + 1)\omega = \omega\omega$ eşitliğini kanıtlayın.

14.4. α bir ordinal olsun. $n \in \mathbb{N}$ için, α^n ordinalini tümevarımla şöyle tanımlayalım:

$$\alpha^0 = 1,$$
$$\alpha^{n+1} = \alpha^n\alpha.$$

$\{\alpha^n : n \in \omega\}$ topluluğunun bir küme olduğunu kanıtlayın. **İpucu:** Yerleştirme Aksiyomu kullanılmalı; $\varphi(n, z)$ formülü şunu desin: n bir doğal sayıdır ve öyle A ordinaller kümesi ve

$$f : n + 1 \to A$$

eşlemesi vardır ki,

a) $f(0) = 1$ ve

b) her i için, eğer $0 \leq i \in n$ ise, $f(i+1) = f(i)\alpha$ ve

c) $z = f(n)$.

14.5. α bir ordinal olsun. λ bir limit ordinalse, $\alpha\lambda$'nın da limit ordinal olduğunu ve $\{\alpha\beta : \beta < \lambda\}$'nın $\alpha\lambda$'da kofinal (bkz. Bölüm 13.7) olduğunu kanıtlayın.