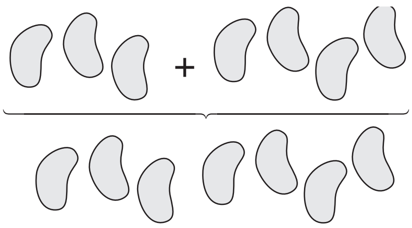
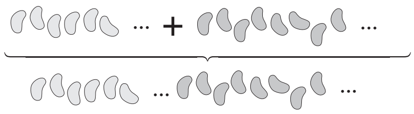
13. Ordinallerde Toplama İşlemi

13.1. Toplamanın Tanımı

İlkokulda doğal sayıları toplamayı nasıl öğrendiğinizi anımsayın. 3 + 4 = 7 yerine, 3 fasulye + 4 fasulye = 7 fasulye eşitliğini öğrenmişsinizdir önce herhalde. Öğretmen sola 3 fasulye dizmiştir. Bu grubun sağına dört fasulye daha dizmiştir. Sonra tüm fasulyeleri saymanızı rica etmiştir.



Öğretmen fasulyeleri sıraya dizmeden karışık koymuş olabilir. Sıraya dizerse, sayması daha kolay olur. Biz iyi öğretmenle okuduğumuzu varsayalım: Sayacağımız nesneler sıralansın.



Ordinaller de aynen fasulye toplar gibi toplanır.

Daha matematiksel olmak gerekirse... α ve β iki ordinal olsun. Bu iki ordinali toplamak için α tane fasulyenin **sağına** β tane fasulye koyarız ve böylece elde edilen fasulyeleri **soldan sağa** sayarız... Burada, "saymak"la "iyisıralamak"ı kastediyoruz.

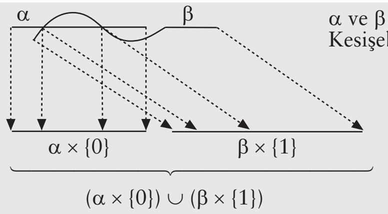
Daha daha matematiksel olalım. α ve β birer ordinal olsunlar. Aşağıdak şekilden takip edin. Ordinal olduklarından, α ve β iyisıralı kümelerdir: $\in$, yani "elemanı olmak" ilişkisiyle iyisıralanmışlardır. Altbölüm 5.2'de herhangi iki iyisıralı kümeyi toplamayı tanımlamıştık. Şöyle yapmıştık: Önce α ve β iyisıralı kümelerini $\alpha \times \{0\}$ ve $\beta \times \{1\}$ kümeleriyle değiştirmiştik, çünkü α ve β kümelerinin kesişmelerini istemiyorduk (bu iki küme eşit bile olabilirler!), her türlü kesişme olasılığına karşı önlem olarak α ve β yerine, kesişmediklerinden emin olduğumuz $\alpha \times \{0\}$ ve $\beta \times \{1\}$ kümelerini almıştık. Sonra, α ve β üzerindeki sıralamaları sırasıyla $\alpha \times \{0\}$ ve $\beta \times \{1\}$ kümelerine yansıtmıştık, yani her $a_1, a_2 \in \alpha$, $b_1, b_2 \in \beta$ için,

$$(a_1, 0) < (a_2, 0) \Leftrightarrow a_1 < a_2,$$
$$(b_1, 1) < (b_2, 1) \Leftrightarrow b_1 < b_2$$

tanımlarını yapmıştık. En sonunda da, kesişmediklerini bildiğimiz $\alpha \times \{0\}$ ve $\beta \times \{1\}$ kümelerinin

$$(\alpha \times \{0\}) \cup (\beta \times \{1\})$$

bileşimini alıp bu bileşimi, $\alpha \times \{0\}$ ve $\beta \times \{1\}$ altkümelerinin sıralamalarıyla uyumlu olacak biçimde sıralamıştık. Bileşimin sıralaması, $\alpha \times \{0\}$ ve $\beta \times \{1\}$ kümelerinin sıralamasına saygı duyar, ve ayrıca, β'ya bir ayrıcalık tanıyarak, $\beta \times \{1\}$'in her elema-



α ve β iki iyisıralı küme. Kesişebilirler.

α ve β yerine, $\alpha \times \{0\}$ ve $\beta \times \{1\}$ kümeleri alınıyor. Bu kümeler kesişmezler. α ve β'nın sıralamalarını $\alpha \times \{0\}$ ve $\beta \times \{1\}$ kümelerine yansıtılıyor. Ayrıca $\alpha \times \{0\}$'ın elemanlarının $\beta \times \{1\}$'in elemanlarından daha küçük olduğuna hükmediliyor.

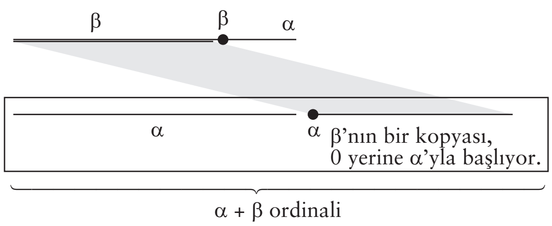
nını $\alpha \times \{0\}$'in her elemanından daha büyük ilan eder. Biçimsel tanım şöyle: Her $a_1, a_2 \in \alpha$, $b_1, b_2 \in \beta$ için,

$$(a_1, 0) < (a_2, 0) \Leftrightarrow a_1 < a_2,$$
$$(b_1, 1) < (b_2, 1) \Leftrightarrow b_1 < b_2,$$
$$(a_1, 0) < (b_2, 1) \Leftrightarrow 0 = 0 \text{ (yani her zaman!)}$$

Bunun bir iyisıralama olduğunu kanıtlayıp adına $\alpha + \beta$ demiştik (Altbölüm 5.2). Bu bölümde $\alpha + \beta$'yı bir başka anlamda kullanacağımızdan, $(\alpha \times \{0\}) \cup (\beta \times \{1\})$ kümesi üzerine tanımlanan yukardaki iyisıralamaya geçici olarak $\alpha \uplus \beta$ adını vereceğiz.

Akılda tutulması gereken şey şu: $\alpha \uplus \beta$ sıralamasında, özünde, β sıralaması, α'dan ayrık bir küme olarak α sıralamasının sonuna getirilmiştir.

Bir önceki bölümde her iyisıralı kümenin bir ve bir tek ordinale eşyapısal olduğunu kanıtlamıştık (Teorem 12.1). Dolayısıyla $\alpha \uplus \beta$ iyisıralaması da bir ve bir tek ordinale eşyapısaldır. İşte $\alpha \uplus \beta$ iyisıralamasına eşyapısal yegâne ordinale $\alpha + \beta$ adı verilir. Örneğin, $\beta < \alpha$ olduğunda, $\alpha + \beta$ ordinalinin şekli şöyle:



α'nın $\alpha + \beta$ ordinalinin başlangıç dilimi olduğu bariz olmalı. Eğer $\beta < \alpha$ ise, elbette β da $\alpha + \beta$ ordinalinin başlangıç dilimidir. Ama bu bizi pek ilgilendirmeyecek. Daha önemli olan β'nın $\alpha + \beta$ ordinalinin "son dilimi"ne eşyapısal olmasıdır. Nitekim,

$$\beta \approx \{x \in \alpha + \beta : \alpha \leq x\}$$

olur. Burada, sağ taraftaki $\{x \in \alpha + \beta : \alpha \leq x\}$ kümesi, $\alpha + \beta$'nın altkümesi olarak gene $\in$ ilişkisiyle (iyi)sıralanmıştır.

13.2. Temel Sonuçlar

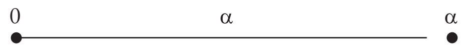
Hemen birkaç alıştırma yaparak ordinallerle toplama hakkında sezgi edinelim. İlk olarak doğal sayıları andıran bir olgu:

Önsav 13.1. *Her α ordinali için,*

$$0 + \alpha = \alpha + 0 = \alpha \text{ } ve \text{ } \alpha + 1 = S(\alpha).$$

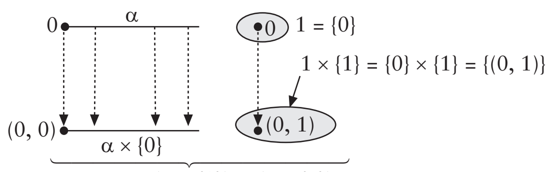
Kanıt: Son eşitliği kanıtlayalım, diğerleri bariz. Önce, $\alpha + 1$ ve $S(\alpha)$'nın tanımlarını anımsayacağız. Bunlar birer ordinal olarak tanımlanmışlardı. Bu ordinallerin eşit olduklarını kanıtlamak için, iyisıralamalarının eşyapısal olduklarını kanıtlamak yeterli, çünkü Teorem 10.11'e göre eşyapısal olan iki ordinal birbirine eşit olmak zorunda. Demek ki $\alpha + 1$ ve $S(\alpha)$'nın tanımlarında önemli olan nesnelerin kendileri değil, sıralamaları: Bu iki sıralı küme eğer eşyapısallarsa o zaman eşittirler.

Önce $S(\alpha)$'nın ve sıralamasının tanımlarını anımsayalım: $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ ve $S(\alpha)$ sıralamasında α elemanı α kümesinin en sonuna konmuştur. İşte $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ sıralamasının resmi:



$S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$

Bu kolaydı. Şimdi, bir sayfa önce tanımladığımız $\alpha + 1$'in sıralamasıyla eşyapısal olan $\alpha \uplus 1$ iyisıralamasını anımsayalım. $\alpha \uplus 1$ iyisıralamasında, 1 kümesi, ayrık bir küme olarak, α sıralamasının en sonuna eklenmişti; $1 = \{0\}$ olduğundan, bu, α'nın sonuna yeni bir eleman (0'ın bir kopyasını) eklemek demektir.



$\alpha \uplus 1 = (\alpha \times \{0\}) \cup (1 \times \{1\})$

Her iki sıralamanın da aynı oldukları, yani sıralamaların eşyapısal oldukları çok belli. Her ikisinde de α'nın en sonuna bir eleman ekleniyor. Önsavımız kanıtlanmıştır. □

Yukardaki yöntemi sürekli kullanacağız. İki ordinalin birbirine eşit olduklarını kanıtlamak için sıralamalarının birbirine eşyapısal olduklarını kanıtlamak yeterlidir.

Her ne kadar ordinal toplaması doğal sayıların toplamasını andırıyorsa da, doğal sayılarda geçerli olan $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ eşitliği ordinallerde maalesef geçerli değil, örneğin

$$1 + \omega = \omega \neq \omega + 1.$$

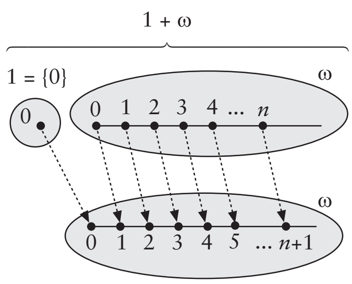
Hemen $1 + \omega = \omega$ eşitliğini göstererek okurun haklı merakını giderelim. Yukardaki kadar ayrıntılara girmeyeceğiz, yoksa bu bölüm bitmez. $1 + \omega$, yani $\{0\} \uplus \omega$ iyisıralamasında, 0 elemanının sonuna ω eklenmiştir, yani

$$\omega = \{0, 1, 2, ...\}$$

kümesinin en başına -1 gibi yorumlayabileceğimiz bir eleman eklenmiş ve

$$\{-1, 0, 1, 2, ... \}$$

kümesinin sıralamasına benzer bir sıralama elde edilmiş. Bu son sıralamanın ω'nın sıralamasından pek bir farkı yok, sayılar 0'dan



başlayacağına -1'den başlamış. Dolayısıyla $1 + \omega = \omega$. Öte yandan, $\omega + 1$'in en büyük elemanı olduğundan (ω, $\omega + 1$'in en büyük elemanıdır), $\omega + 1$, ω'ya eşyapısal olamaz, yani $\omega \neq \omega + 1$.

Ordinal toplaması doğal sayı toplamasıyla örtüşür, yani $5 + 8$, doğal sayı olarak da toplansa, ordinal olarak da toplansa 13 bulunur. Bariz olan bu sonuç, daha matematiksel olarak Önsav 13.1'den ve şimdi kanıtlayacağımız Önsav 13.2'den çıkacak. (Bkz. Sonuç 13.4.)

Önsav 13.2. *Her* α, β, γ *ordinali için*,

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma.$$

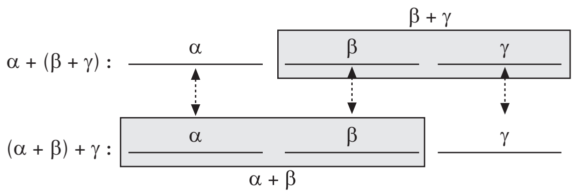
Kanıt: Her zaman olduğu gibi, eşitliği değil,

$$\alpha + (\beta + \gamma) \approx (\alpha + \beta) + \gamma$$

eşyapısallığını kanıtlayacağız. Her iki sıralamanın da nasıl inşa edildiğini anımsayalım.

$\alpha + (\beta + \gamma)$ sıralaması için α sıralamasının sonuna $\beta + \gamma$ sıralaması getirildi. $\beta + \gamma$ sıralaması da β sıralamasının sonuna γ sıralaması konularak elde edildi. Demek ki $\alpha + (\beta + \gamma)$ sıralaması için önce α, sonra β, daha sonra da γ sıralamasını peşpeşe koyduk.

$(\alpha + \beta) + \gamma$ sıralaması için ise $\alpha + \beta$ sıralamasının sonuna γ sıralaması getirildi. $\alpha + \beta$ sıralaması da α sıralamasının sonuna β sıralaması konularak elde edildi. Demek ki $(\alpha + \beta) + \gamma$ sıralaması için, önce α, sonra β, daha sonra da γ sıralamasını peşpeşe koyduk.



Yukardaki şekilden ve sıralamaların tanımından da belli ki $\alpha + (\beta + \gamma) \approx (\alpha + \beta) + \gamma$. Yani eşitlik sözkonusu. □

Sonuç 13.3. *Her* α *ve* β *ordinalleri için*,

$$\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1,$$

yani $\alpha + S(\beta) = S(\alpha + \beta)$.

Sonuç 13.4. *Doğal sayıların doğal sayı olarak ve ordinal olarak toplamı eşittir.*

Kanıt: Önsav 13.1'den dolayı ordinal olarak $n + 0 = n$, aynen doğal sayılardaki eşitlik. Gene Önsav 13.1'e göre sağdan 1'le toplamak da bir ayrım yaratmıyor. Şimdi $n + m$ toplamında bir fark olmadığını varsayarak, $n + (m + 1)$ toplamında bir ayrım olmadığını gösterelim. Ama bu, doğrudan Sonuç 13.3'ten çıkar. □

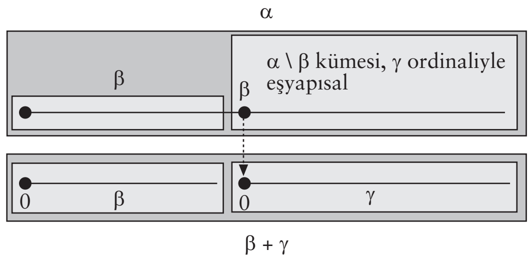
Bir sonraki önsavda göreceğimiz üzere ordinallerde doğal sayılardakine benzer bir çıkarma yapılabilir.

Önsav 13.5. $\beta \leq \alpha$ *iki ordinal olsun. O zaman*

$$\beta + \gamma = \alpha$$

eşitliğini sağlayan bir ve bir tane γ *ordinali vardır. Ayrıca eğer* α, β *ve* γ *birer ordinalse ve* $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$ *ise o zaman* $\beta = \gamma$*'dır.*

Kanıt: Eğer $\beta = \alpha$ ise $\gamma = 0$ alabiliriz. Şimdi $\beta < \alpha$ varsayımını yapalım, yani $\beta \in \alpha$ ve dolayısıyla β, α'nın başlangıç dilimi. $\alpha \setminus \beta$, α'nın bir altkümesi olduğu için, α'nın sıralamasından miras kalan sıralamayla iyisıralı bir kümedir. Demek ki $\alpha \setminus \beta$ iyisıralamasına eşyapısal olan bir γ ordinali vardır. Şimdi $\alpha \approx \beta + \gamma$, yani $\alpha = \beta + \gamma$ çok bariz; kanıtının bir resmi aşağıda. γ ordi-



nalinin biricikliği ikinci önermeden çıkar. İkinci önermeyi kanıtlayalım.

Toplamanın tanımından dolayı, β, $\alpha + \beta$'nın $(\alpha+\beta) \setminus \alpha$ altkümesiyle eşyapısal. Aynı şekilde γ, $\alpha + \gamma$'nın $(\alpha + \gamma) \setminus \alpha$ altkümesiyle eşyapısal. Demek ki, $\beta \approx (\alpha + \beta) \setminus \alpha = (\alpha + \gamma) \setminus \alpha \approx \gamma$. Sonuç olarak $\beta = \gamma$. □

Bu önsavdan hareketle, eğer α sonsuz bir ordinalse, $1 + \alpha$ ordinalinin α'ya eşit olduğunu kanıtlayabiliriz. Ama önce "sonsuz ordinal"i tanımlamalıyız. Daha önce sonlu ordinalleri tanımlayalım: ω'nın elemanlarına ***sonlu ordinal*** denir. Sonlu olmayan, yani ω'nın elemanı olmayan ordinallere ***sonsuz ordinal*** denir. Demek ki bir α ordinalinin sonsuz olması için

$$\text{ya } \omega = \alpha \text{ ya da } \omega \in \alpha,$$
$$\omega \leq \alpha,$$
$$\omega \subseteq \alpha$$

eşdeğer önermelerinden biri (dolayısıyla hepsi) geçerli olmalı. (Sonuç 10.14)

Şimdi oldukça şaşırtıcı bir sonuç kanıtlayalım:

Önsav 13.6. *Eğer α sonsuz bir ordinalse ve n bir doğal sayıysa o zaman $n + \alpha = \alpha$'dır.*

Kanıt: α sonsuz bir ordinal olsun. Önsav 13.2'ye göre

$$1 + \alpha = \alpha$$

eşitliğini kanıtlamak yeterli, gerisi n üzerine tümevarımla gelir. Önsav 13.5'e göre, bir β ordinali için $\alpha = \omega + \beta$. Demek ki,

$$1 + \alpha = 1 + (\omega + \beta) = (1 + \omega) + \beta = \omega + \beta = \alpha.$$

Yukarda, Önsav 13.2'yi ve daha önce kanıtladığımız $1 + \omega = \omega$ eşitliğini kullandık. □

Demek ki sonlu ordinaller sonsuz ordinaller tarafından soldan yutuluyorlar. İlerde daha da şaşırtıcı bir teorem kanıtlayacağız, bkz. Teorem 16.5 ve Sonuç 16.6.

13.3. Toplama ve Sıralama

Aynı küme üzerinde çeşitli işlemler ve ilişkiler tanımlanmışsa, bu işlem ve ilişkiler arasında ilişkiler aramak ve hatta bulmak lazımdır, yoksa aynı küme üzerinde birbirinden bağımsız birkaç matematiksel yapı olur ki, o zaman da gereksiz yere kalabalık etmiş olurlar. Bu bölümde ordinallerde toplamayla sıralama arasındaki ilişkileri irdeleyeceğiz.

Önsav 13.7. *Her* α *ve* β *ordinali için*, $\alpha \leq \alpha + \beta$ *ve* $\beta \leq \alpha + \beta$. *Ayrıca eğer* $\beta \neq 0$ ise $\alpha < \alpha + \beta$.

Kanıt: $\alpha + \beta$ ordinalinin tanımına bakılacak olursa, α ve β sıralamalarının $\alpha + \beta$'nın birer altkümesiyle eşyapısal oldukları hemen anlaşılır. Nitekim α, $\alpha + \beta$'nın bir başlangıç dilimine eşyapısaldır; β da bu dilimden geri kalana eşyapısaldır. Teorem 10.13'e göre $\alpha \leq \alpha + \beta$ ve $\beta \leq \alpha + \beta$.

Eğer $\beta \neq 0 = \emptyset$ ise, toplamanın tanımından da belli ki, α'nın eşyapısal olduğu başlangıç dilimi, $\alpha + \beta$'nın öz başlangıç dilimidir (yani $\alpha + \beta$'ya eşit değildir), çünkü $\alpha + \beta$'nın α başlangıç diliminden hemen sonra gelen eleman α'dır; dolayısıyla $\alpha \in \alpha + \beta$, yani $\alpha < \alpha + \beta$. □

Eğer $\beta \neq 0$ ise $\alpha < \beta + \alpha$ eşitsizliğinin doğru olmayabileceğini $1 + \omega = \omega$ eşitliğinden biliyoruz. Can sıkıcı ama böyle, yapacak bir şey yok.

Gene $1 + \omega = \omega = 0 + \omega$ eşitliğinden ordinal toplamasında her zaman sağdan sadeleştirmenin olmadığını biliyoruz. Peki ya soldan sadeleşme var mı? Evet! Bu Önsav 13.5'te kanıtlandı.

Önsav 13.8. *Her* α, β *ve* γ *ordinali için* $\beta < \gamma$ *ise o zaman* $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$ *ve* $\beta + \alpha \leq \gamma + \alpha$ *olur. Ayrıca, eğer* $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$ *ise o zaman* $\beta < \gamma$*'dır.*

Kanıt: Birinci eşitsizliğin olası birçok kanıtından biri: $\beta < \gamma$ varsayımını yapalım. Önsav 13.5'e göre, bir δ ordinali için $\beta + \delta = \gamma$ eşitliğini sağlanır. Demek ki, birinci eşitsizliği kanıtlamak için,

$$\alpha + \beta < \alpha + (\beta + \delta)$$

eşitsizliğini kanıtlamalıyız. Önsav 13.2'ye göre,

$$\alpha + \beta < (\alpha + \beta) + \delta$$

eşitsizliğini kanıtlamak aynı şey. Önsav 13.7'nin ikinci kısmına göre bu eşitsizliğin sağlanması için δ'nın 0 olmaması gerekir, ki β, γ'ya eşit olmadığından δ, 0 olamaz.

Ayrıca, Önsav 13.7'ye göre $\alpha \le \delta + \alpha$ olduğundan, yukarda kanıtlanandan $\beta + \alpha \le \beta + (\delta + \alpha)$ çıkar. Demek ki,

$$\beta + \alpha \le \beta + (\delta + \alpha) = (\beta + \delta) + \alpha = \gamma + \alpha.$$

İkinci eşitsizlik de kanıtlandı.

Şimdi, $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$ varsayımını yapalım. Demek ki bir $\delta > 0$ ordinali için $(\alpha + \beta) + \delta = \alpha + \gamma$ ve

$$\alpha + \gamma = (\alpha + \beta) + \delta = \alpha + (\beta + \delta).$$

Şimdi Önsav 13.5'e göre $\gamma = \beta + \delta$ ve birinci kısma göre

$$\beta = \beta + 0 < \beta + \delta = \gamma. \qquad \square$$

Alıştırmalar

13.4.1. $\alpha \le \gamma$ ve $\beta \le \delta$ ve ise $\alpha + \beta \le \gamma + \delta$ eşitsizliğini kanıtlayın.

13.4.2. $\alpha + \beta \le \alpha + \gamma$ ise $\beta \le \gamma$ eşitsizliğini kanıtlayın.

13.5. Limit Ordinaller ve Toplama

Şimdi çok ilginç bir teorem kanıtlayacağız. Ama önce bu aşamada okura kolay gelmesi gereken bir alıştırma:

Alıştırma 13.5.1. α ve β birer ordinal olsunlar. $\alpha + \beta$ ordinalinin limit ordinal olması için gerek ve yeter koşulun ya β'nın bir limit ordinal olması, ya da β'nın 0 ve α'nın bir limit ordinal olması olduğunu kanıtlayın.

Teorem 13.9. *Her sonsuz α ordinali bir λ limit ordinali ve bir n doğal sayısı için $\lambda + n$ olarak tek bir biçimde yazılabilir. Bu λ, α'dan küçükeşit en büyük limit ordinaldir.*

Kanıt: Eğer varsa, λ'nın α'dan küçükeşit en büyük limit ordinal olması gerektiği malum. Bu bilgi ışığında λ'yı arayalım. A, α'dan küçükeşit limit ordinaller kümesi olsun. A bir ordinal kümesi olduğundan, $\cup A$ da bir ordinaldir (Teorem 10.10). Ayrıca A'nın elemanları limit ordinaller olduğundan,

$\cup A$ da bir limit ordinaldir (Alıştırma 11.3). A'nın her elemanı α'nın bir altkümesi olduğundan, $\cup A$ da α'nın bir altkümesidir. Demek ki $\cup A \leq \alpha$. Bundan böyle $\cup A = \lambda$ olsun. Önsav 13.5'e göre $\lambda + \beta = \alpha$ eşitliğini sağlayan bir β ordinali vardır. Şimdi β'nın sonlu olduğunu, yani ω'nın bir elemanı olduğunu kanıtlayacağız. Eğer β sonsuzsa, yani $\beta \notin \omega$ ise, o zaman ya $\beta = \omega$ ya da $\omega \in \beta$'dır. Her iki durumda da $\omega \leq \beta$. O zaman $\lambda + \omega \leq \lambda + \beta = \alpha$ ve yukardaki alıştırmaya göre $\lambda + \omega$, α'dan küçükeşit bir **limit** ordinaldir. Ama o zaman da, $\lambda + \omega \subseteq \cup A = \lambda$ olur, bir çelişki.

Demek ki $\beta = n$, bir doğal sayıdır ve $\alpha = \lambda + n$. Eğer λ' limit ordinali ve n' doğal sayısı için $\alpha = \lambda' + n'$ ise, λ' de aynen λ gibi α'dan küçükeşit en büyük ordinal olduğundan, $\lambda' = \lambda$'dır. Şimdi,

$$\lambda + n = \alpha = \lambda' + n' = \lambda + n'$$

eşitliğinden ve Önsav 13.5'ten $n = n'$ çıkar. □

Bu teoremden şu ilginç sonuç çıkar. α ve β iki sonsuz ordinal olsun. α'yı teoremdeki gibi $\lambda + n$ olarak yazalım. O zaman, Önsav 13.6'ya göre,

$$\alpha + \beta = (\lambda + n) + \beta = \lambda + (n + \beta) = \lambda + \beta$$

Demek ki sonsuz ordinalleri toplarken, soldaki ordinalin bir limit ordinal olduğunu varsayabiliriz.

13.6. Tümevarımla Toplama

Daha önce $\alpha + 0 = \alpha$ ve $\alpha + S(\beta) = S(\alpha + \beta)$ eşitliklerini kanıtladık. [Sİ]'de doğal sayılarda toplamayı bu iki formülle tümevarım yöntemiyle tanımlamıştık, çünkü her doğal sayı ya 0'a eşittir ya da bir β doğal sayısı için $S(\beta)$ şeklinde yazılabilir. Ordinallerde bunun doğru olmadığını biliyoruz, buınların dışında bir de limit ordinaller var. Demek ki eğer her λ limit ordinali için $\alpha + \lambda$ ordinal toplamını λ'dan küçük β ordinalleri için $\alpha + \beta$ toplamları cinsinden yazabilirsek, o zaman ordinal toplamasını doğal sayılarda olduğu gibi tümevarımla tanımlayabiliriz.

Alıştırma 11.1'de okurdan her λ limit ordinalinin kendisinden küçük ordinallerin bileşimi olduğunu kanıtlamasını istemiştik:

$$\lambda = \cup_{\beta<\lambda} \beta.$$

Demek ki,

$$\alpha + \lambda = \alpha + (\cup_{\beta<\lambda} \beta).$$

Bu aşamada ne kanıtlanması gerektiği belli:

$$\alpha + (\cup_{\beta<\lambda} \beta)$$

toplamındaki soldaki α'yı bileşimin içine dağıtıp

$$\alpha + \lambda = \alpha + (\cup_{\beta<\lambda} \beta) = \cup_{\beta<\lambda} (\alpha + \beta).$$

yazabilmek istiyoruz. Bunu hemen kanıtlayalım.

Önsav 13.10. *Eğer B bir ordinal kümesiyse,*

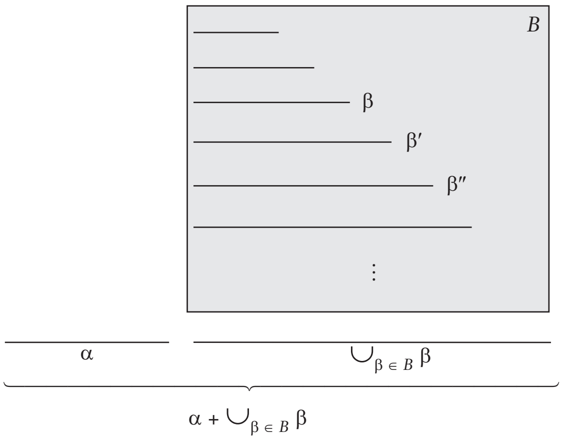
$$\alpha + (\cup_{\beta\in B} \beta) = \cup_{\beta\in B} (\alpha + \beta).$$

Kanıt: Önce Teorem 10.10'dan dolayı eşitliğin sağındaki ve solundaki kümelerin birer ordinal olduklarına dikkatiniz çekerim. Demek ki

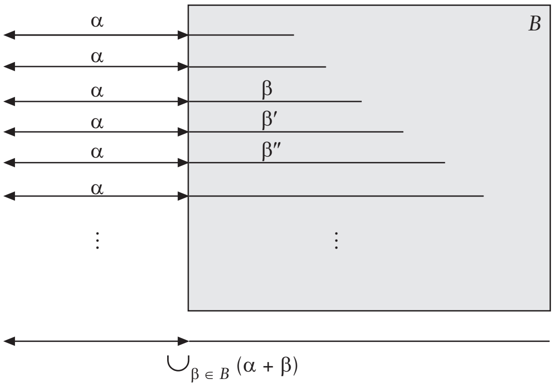
$$\alpha + (\cup_{\beta\in B} \beta) \text{ ve } \cup_{\beta\in B} (\alpha + \beta).$$

kümelerindeki sıralamaların eşyapısal olduklarını kanıtlamalıyız.

Önce $\alpha + (\cup_{\beta\in B} \beta)$ kümesinin sıralamasına bakalım. "Bir resim bin söze denktir" özdeyişinden hareket ederek bu kümenin ve sıralamasının bir resmini çizelim.



Şimdi $\cup_{\beta\in B}(\alpha+\beta)$ kümesini ve sıralamasını resmedelim. Bu sefer, önce $\alpha+\beta$ işlemlerini yapıp sonra bu toplamların bileşimini alacağız.



Görüldüğü gibi (!), her iki sıralama da aynı!

Bu görsel kanıttan memnun olmayanlar için daha biçimsel bir kanıt sunalım. B'nin boşküme olmadığını ve B'de boşküme olmadığını varsayabiliriz.

Önce $\alpha+(\cup_{\beta\in B}\beta)$ ordinalinden bir γ elemanı alalım. γ'nın

$$\cup_{\beta\in B}(\alpha+\beta)$$

kümesinde olduğunu kanıtlayacağız. Elbette $\gamma\geq\alpha$. Demek ki

$$\alpha\leq\gamma<\alpha+(\cup_{\beta\in B}\beta)$$

ve bir $\delta\in\cup_{\beta\in B}\beta$ için,

$$\gamma=\alpha+\delta$$

olur. Ayrıca $\delta\in\cup_{\beta\in B}\beta$ olduğundan, bir $\beta\in B$ için $\delta\in\beta$'dır. Demek ki $\gamma=\alpha+\delta<\alpha+\beta$, yani $\gamma\in\alpha+\delta\in\alpha+\beta$.

Şimdi $\cup_{\beta\in B}(\alpha+\beta)$ ordinalinden bir γ elemanı alalım. γ'nın

$$\alpha+(\cup_{\beta\in B}\beta)$$

kümesinde olduğunu kanıtlayacağız. Bir $\beta\in B$ için

$$\gamma\in\alpha+\beta$$

olur. γ'nın α'dan büyükeşit olduğunu varsayabiliriz, çünkü $\gamma<\alpha$ olursa, o zaman $\gamma\in\alpha\subset\alpha+(\cup_{\beta\in B}\beta)$ olur. Demek ki $\gamma\geq\alpha$ ve bir $\delta \in \beta$ için, $\gamma = \alpha + \delta$ olur. Öte yandan,

$$\beta \subseteq \cup_{\beta \in B} \beta$$

olduğundan, $\beta \leq \cup_{\beta \in B} \beta$ (Teorem 10.13). Demek ki

$$\gamma = \alpha + \delta < \alpha + \beta \leq \alpha + \cup_{\beta \in B} \beta. \qquad \square$$

Ve sözverdiğimiz gibi toplamanın tümevarımsal tanımı:

Sonuç 13.11. *Ordinal toplaması,*

$$\alpha + 0 = \alpha,$$

$$\alpha + S(\beta) = S(\alpha + \beta)$$

ve bir λ *limit ordinali için,*

$$\alpha + \lambda = \cup_{\beta<\lambda} (\alpha + \beta)$$

eşitlikleri tarafından belirlenmiştir. Bir başka deyişle, eğer A *ve* B *birer ordinalse, öyle yeterince büyük bir* C *ordinali vardır ki, her* $\alpha \in A$ *ve* $\beta \in B$ *için,*

$$f(\alpha, \beta) = \alpha + \beta$$

kuralıyla tanımlanmış $f : A \times B \to C$ *fonksiyonu, yukardaki üç eşitliği sağlayan ve* $A \times B$ *kartezyen çarpımından* C*'ye giden biricik fonksiyondur* ve ayrıca $f(\alpha, \beta)$*'nın değeri* α*'yı içeren* A*'dan ve* α'yı *içeren* B*'den bağımsızdır.* $\square$

Birçok kitapta ordinallerin toplamı yukardaki formüllerle tanımlanır. Biz, daha doğal bulduğumuz bir yolu seçtik.

Bu sonuç, tümevarım ilkesiyle kanıtlanacak teoremlerde çok büyük kolaylık sağlar.

13.7. Kofinallik

α bir ordinal ve $A \subseteq \alpha$ olsun. Eğer her $\beta \in \alpha$ için, $\beta \leq \gamma$ eşitsizliğini sağlayan bir $\gamma \in A$ varsa, A'ya α'da ***kofinal*** ya da α'nın ***kofinal altkümesi*** denir. Eğer $A \subseteq B \subseteq \alpha$ ise ve A, α'da kofinalse, B de α'da kofinaldir elbette. Demek ki kofinal kümelerin küçükleri makbuldür. Ancak limit ordinallerin kofinal bir altkümesi olduğunu okurun dikkatine sunarız. (Alıştırma 13.7.1.)

Örneğin, kareler kümesi ω'da kofinaldir. $\{\omega + 3n : n \in \omega\}$ kümesi $\omega 2$'de kofinaldir. Ordinalleri ve üs almayı öğrediğimizde, $\{\omega n : n \in \omega\}$ kümesinin ω^2'de (Alıştırma 14.5), $\{\omega^n : n \in \omega\}$ kümesinin de ω^ω'de kofinal olduğunu (Önsav 16.3) göreceğiz.

Alıştırmalar

13.7.1. Ancak limit ordinallerin kofinal bir altkümesi olduğunu kanıtlayın.

13.7.2. α bir ordinal ve $A, B \subseteq \alpha$ olsun. Eğer her $x \in A$ için $x \leq y \in B$ ilişkilerini sağlayan bir y varsa ve A, α'da kofinalse, o zaman B'nin de α'da kofinal olduğunu kanıtlayın.

13.7.3. λ bir limit ordinal olsun. $A \subseteq \lambda$ için, A'nın λ'da kofinal ise olması için yeter ve gerek koşulun $\lambda = \bigcup A$ eşitliği olduğunu kanıtlayın. λ bir limit ordinalse, λ'nın λ'da kofinal olduğunu kanıtlayın.

13.7.4. A, en büyük elemanı olmayan bir ordinaller kümesiyse, A'nın $\bigcup A$'da kofinal olduğunu kanıtlayın.

13.7.5. α ve λ ordinal olsunlar. λ limit ordinal olsun. $\alpha + \lambda$ ordinalinin limit ordinal olduğunu biliyoruz (Alıştırma 13.5.1).

$$\{\alpha + \beta : \beta \in \lambda\}$$

altümesinin $\alpha + \lambda$'da kofinal olduğunu kanıtlayın.

13.7.6. λ bir limit ordinalse, $\{\alpha : \alpha \in \lambda \text{ ve } \alpha \text{ limit}\}$ kümesinin λ'da kofinal olduğunu kanıtlayın.