11. Limit Ordinaller ve Ordinallerde Tümevarım İlkesi

İyisıralı kümelerde tümevarımla kanıtlama yönteminden 6'ncı bölümde sözettik. O bölümde şu teoremi kanıtladık:

İyisıralamalarda Tümevarım İlkesi [Teorem 6.3]. $(X, <)$ *bir iyi sıralama olsun.* $A \subseteq X$ *bir altküme olsun. A'nın şu özelliği olduğunu varsayalım*:
Her $x \in X$ *için, eğer* $\{y \in X : y < x\} \subseteq A$ *ise, o zaman* $x \in A$.
Bu durumda $A = X$*'dir.*

Her ordinal iyisıralı bir küme olduğundan, aynı teorem ordinallerde de geçerlidir elbet. Ama ordinaller sözkonusu olduğunda, aynı teoremi başka türlü ifade etmek kanıtlarda bazı avantajlar sağlar.

Bazı ordinallerin en büyük elemanları vardır. Örneğin 5'in en büyük elemanı 4'tür. $S(\omega)$'nın en büyük elemanı ω'dır. Ama her ordinalin en büyük elemanı yoktur. Örneğin en büyük doğal sayı olmadığından, ω'nın en büyük elemanı yoktur. En büyük elemanı olmayan 0'dan değişik ordinallere ***limit ordinal*** denir. ω ilk limit ordinaldir. Limit ordinaller genelde λ (lambda) simgesiyle gösterilir.

Limit olmayan ve 0'dan değişik olan bir α ordinalinin en büyük elemanı β ise, $\alpha = S(\beta)$'dır elbet. (Okura basit bir alıştırma.)

Teorem 11.1. [Ordinallerde Tümevarım İlkesi] *Bir önerme,*

a) 0 için doğruysa,

b) Bir α ordinali için doğru olduğunda $S(\alpha)$ ordinali için de doğruysa,

c) her λ limit ordinali için, önerme λ'dan küçük ordinaller için doğru olduğunda λ için de doğruysa,

o zaman o önerme her α ordinali için doğrudur.

Kanıt: Önermeye $\varphi(x)$ diyelim. $\varphi(x)$'in her ordinal için doğru olmadığını varsayalım. Diyelim $\varphi(x)$, α ordinali için yanlış. $\beta = S(\alpha)$ olsun.

$$A = \{\gamma \in \beta : \varphi(\gamma) \text{ yanlış}\}$$

olsun. A bir kümedir ve bir ordinal kümesidir. $\alpha \in A$ olduğundan, $A \neq \emptyset$. O zaman A'nın bir en küçük elemanı vardır. Bu elemana γ diyelim. Demek ki $\varphi(x)$ önermesi γ'dan küçük ordinaller için doğru. (a) varsayımına göre $\gamma \neq 0$. (b) varsayımına göre bir δ ordinali için $\gamma = S(\delta)$ olamaz. (c) varsayımına göre γ bir limit ordinal olamaz. Demek ki γ olamaz! □

Kimileyin bu ilke yerine kanıtı kullanılır. Diyelim ordinaller hakkında kanıtlamak istediğimiz bir $\varphi(\alpha)$ önermesi var. Bir an için φ'nin her α ordinali için doğru olmadığını varsayalım, diyelim φ önermesi α için doğru değil.

$$\{\beta \leq \alpha : \varphi(\beta) \text{ yanlış}\}$$

kümesine bakalım. α bu kümede olduğundan, bu ordinal kümesi boş değil. Demek ki bir en küçük elemanı var. O elemana β diyelim. Şimdi $\varphi(\beta)$ yanlış ama β'dan küçük her γ ordinali için $\varphi(\gamma)$ doğru. Buradan bir çelişki elde etmeye çalışılır. Bunun için önce β'nın 0 olamayacağı kanıtlanır. Sonra β'nın bir γ ordinali için $S(\gamma)$'ya eşit olamayacağı kanıtlanır. Ardından, β'nın bir limit ordinal de olamayacağı kanıtlanır. Böylece β'nın hiçbir şey olamayacağı anlaşılır ve bir çelişki elde edilir.

İlerde tümevarım ilkesini sık sık kullanacağımızdan örnek vermiyoruz.

Alıştırmalar

11.1. α bir ordinal olsun. α'nın limit ordinal olması için

$$\cup\alpha = \alpha$$

eşitliğinin yeter ve gerek koşul olduğunu kanıtlayın.

11.2. α limit olmayan bir ordinal olsun. $\alpha = S(\cup\alpha)$ eşitliğini kanıtlayın, yani $\cup\alpha$, α'nın en büyük elemanıdır.

11.3. Elemanları limit ordinaller olan ama boşküme olmayan bir kümenin bileşiminin de bir limit ordinal olduğunu kanıtlayın.

11.4. $A \neq \emptyset$, en büyük elemanı olmayan bir ordinaller kümesiyse $\cup A$'nın bir limit ordinal olduğunu kanıtlayın.

12. İyisıralı Kümeler, Ordinaller ve Yerleştirme Aksiyomu

Bu bölümde her iyisıralı kümenin bir ve bir tek ordinalle eşyapısal olduğunu kanıtlamaya çalışacağız ve bigüzel çuvallayacağız. [Sİ]'de verdiğimiz aksiyomlarla bu önerme kanıtlanamaz. Ama biz gene de inatla kanıtlamaya çalışacağız ve bildiğimiz kümeler kuramının nerede eksik kaldığını ayan beyan göreceğiz. Eksik kaldığımız yeri yeni bir aksiyomla tamamlayacağız.

Yeni aksiyomumuz bizce doğru olması gereken doğal bir önermedir. Ama okur, bu yeni aksiyomun doğallığına yeri geldiğinde kendi kendine karar vermelidir. Sonuç olarak, aksiyomların seçimi, neyin doğru olması gerektiği konusunda inanca dayanır.

Herhangi iyisıralı bir küme alalım. Bu kümeyle bir ordinal arasında sıralamayı koruyan bir eşleme, yani bir izomorfizma ya da Türkçesiyle bir eşyapı eşlemesi bulacağız, daha doğrusu bulmak istiyoruz.

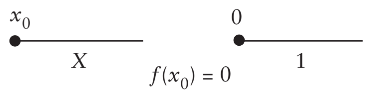
İyisıralı kümemize $(X, <)$ diyelim. Sonuç 10.12'ye göre, $(X, <)$ ancak tek bir α ordinaline eşyapısal olabilir ve X'le α arasında ancak tek bir eşyapı eşlemesi olabilir. Yani eğer X iyisıralı kümesinden bir α ordinaline giden bir $f : X \to \alpha$ eşyapı eşlemesi varsa, hem α hem de f bir tanedir.

Matematikte bir şeyden bir tane varsa o şeyi bulmak genellikle çok kolaydır. Matematikte zor olan, tek bir tane olan nesneleri bulmak değil, tam tersine çok olanlardan birini bulmaktır. Örneğin, eğer bir nesneden sonsuz tane varsa, kimileyin bu sonsuz tane olan nesnelerden birini bile bulmak mümkün olmayabilir. Bu ilginç ve bir o kadar da tuhaf olguya ilerde değineceğiz.

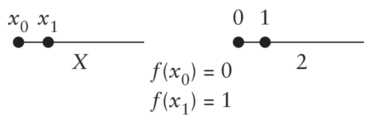
Tüm iyimserliğimizi takınıp başlıktaki önermeyi kanıtlamaya (çalışmaya) başlayalım.

Eğer X boşkümeyse, o zaman X, 0 ordinaline eşittir. Bu durumda X'in kendisi zaten bir ordinaldir. Fazla bir şey söylemeye gerek yok.

Eğer X boş küme değilse, X'in bir en küçük elemanı vardır. Bu elemana x_0 diyelim. Eğer X'in bundan başka elemanı yoksa, o zaman X, 1 ordinaliyle eşyapısaldır elbette. Resmi aşağıda çizdik. Bu durumda, X'le 1 ordinali arasındaki (tek) eşyapı eşlemesi (hatta tek fonksiyon!) x_0'ı 0'a gönderen fonksiyondur.

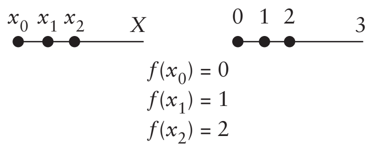


Eğer X'in x_0'dan başka elemanları varsa, o zaman X'te x_0'dan hemen sonra gelen bir eleman vardır. Bu elemana x_1 diyelim. Eğer X'te x_1'den büyük başka eleman yoksa, yani X'te sadece x_0 ve x_1 elemanları varsa, o zaman X, 2 ordinaliyle eşyapısaldır. Bu durumda, X'le 2 ordinali arasındaki (tek) eşya-



pı eşlemesi x_0'ı 0'a, x_1'i 1'e gönderen fonksiyondur; en küçük eleman en küçük elemana, en büyük eleman en büyük elemana gitmelidir.

Eğer X'te x_1'den büyük elemanlar varsa, o zaman X'te x_1'den hemen sonra gelen bir eleman vardır. Bu elemana x_2 diyelim. Eğer X'te x_2'den büyük başka eleman yoksa, yani X'te sadece x_0, x_1 ve x_2 elemanları varsa, o zaman X, 3 ordinaliyle eşyapısaldır[1]. Bu durumda, X'le 2 ordinali arasındaki (tek) eşyapı eşlemesi x_0'ı 0'a, x_1'i 1'e, x_2'yi 2'ye gönderen fonksiyondur; en küçük



eleman en küçük elemana, en büyük eleman en büyük elemana gitmelidir.

Bunu böylece sürdürebiliriz... Eğer sonlu zamanda (her ne demekse!) X'in en büyük elemanına ulaşırsak, o zaman X iyisıralaması bir doğal sayıyla eşyapısaldır.

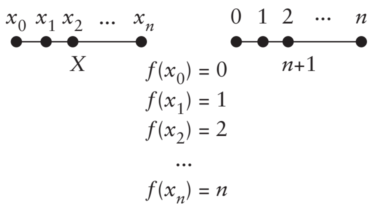
Eğer X'te $n + 1$ tane eleman varsa ve bu elemanları küçükten büyüğe doğru,

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_n$$

diye sıralarsak, o zaman X,

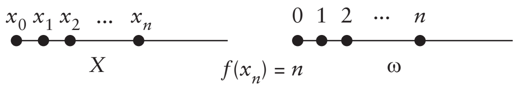
$$f(x_i) = i$$

eşlemesiyle $n + 1$ ordinaline eşyapısaldır.

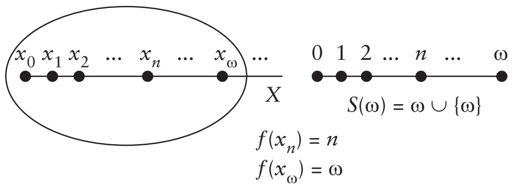


Ama X'in elemanlarını böyle teker teker sonlu zamanda bitiremeyebiliriz, X sonsuz da olabilir. Şimdi X'in sonsuz olduğunu varsayalım.

Eğer x_n, X'in $n + 1$'inci elemanıysa ve X'te bu x_n'lerden başka bir eleman yoksa, o zaman X'in ω'ya (yani $\mathbb{N}$'ye) benzediği, hatta $f(x_n) = n$ fonksiyonu sayesinde ω'yla eşyapısal olduğu aşikâr.



X'te bu x_n'lerden başka elemanlar da olabilir, neden olmasın? Tüm bu x_n'lerden büyük olan elemanların en küçüğüne x_ω diyelim. X'in, x_ω dahil olmak üzere, x_ω'ya kadar olan kısmı belli ki $S(\omega)$ ile eşyapısal[1].



Bunu böylece sürdürebiliriz... Ama nereye kadar sürdürebiliriz? X'in sonuna ulaşabilecek miyiz? Zamanın (istediğimiz kadar) sonsuz olduğu bir evrende yaşasaydık belki bu tür kanıtlar o evrenin matematiğinde kabul edilebilirdi, ama ne yazık ki öyle bir evrende yaşamıyoruz ve yukarda yapılanlar bir yere kadar kabul edilebilir. Daha matematiksel bir yöntem bulmalıyız.

Bu noktadan sonra matematik başlıyor.

12.1. Matematik Başlıyor

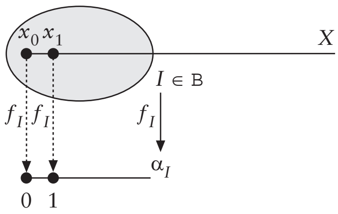
$(X, <)$ iyisıralı bir küme olsun. X'in bir ordinale eşyapısal olduğunu kanıtlamak istiyoruz.

X'in bir ordinale eşyapısal olup olmadığını bilmiyoruz henüz ama X'in bazı başlangıç dilimlerinin bir ordinale eşyapısal olduğunu biliyoruz. Örneğin, eğer X'te en az 10 eleman varsa, X'in ilk 10 elemanından oluşan küme (ki bu bir başlangıç dilimidir) 10 ordinaliyle eşyapısaldır.

1 Yazının Bölüm 4'e benzemeye başladığını okur fark etmiş olmalı.

$\wp$, X'in bir ordinale eşyapısal olan başlangıç dilimlerinin kümesi olsun. $\wp$, gerçekten bir kümedir. [Sİ]'de verdiğimiz aksiyomlardan hareketle $\wp$'nin bir küme olduğu kolaylıkla kanıtlanabilir.) Amacımız X'in $\wp$'de olduğunu kanıtlamak tabii.

Eğer $I \in \wp$ ise, I başlangıç diliminin eşyapısal olduğu tek bir ordinalin olduğunu biliyoruz (Teorem 10.11). Bu ordinale α_I adını verelim. Ayrıca, I başlangıç dilimiyle α_I ordinali arasında tek bir eşyapı eşlemesi olduğunu da biliyoruz (Sonuç 7.6 ya da 10.12). Bu eşyapı eşlemesine de f_I adını verelim.



Sav 1. *J ve I, $\wp$'den iki başlangıç dilimi olsun. O zaman ikisinden biri diğerinin altkümesidir. Ayrıca, eğer $J \subseteq I$ ve $x \in J$ ise, $f_J(x) = f_I(x)$ olur.*

Savın Kanıtı: I ve J, X'in başlangıç kümeleri olduğundan ikisinden biri diğerinin altkümesi olmalı (Bölüm 7.1). Diyelim $J \subseteq I$.

I ve J başlangıç dilimleri,

$$f_I : I \to \alpha_I$$

ve

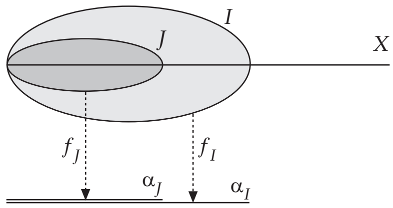
$$f_J : J \to \alpha_J$$

eşlemeleriyle, sırasıyla, α_I ve α_J ordinallerine eşyapısallar.

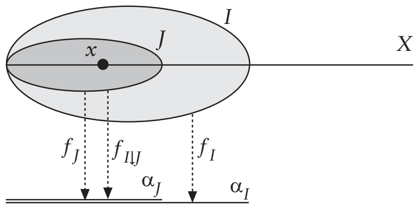
Eğer $\alpha_J \to J \subseteq I \to \alpha_I$ yolunu takip edersek, α_J'den α_I'ya giden

$$f_I \circ f_J^{-1} : \alpha_J \xrightarrow{f_J^{-1}} J \subseteq I \xrightarrow{f_I} \alpha_I$$

eşyapı fonksiyonunu buluruz. O zaman Teorem 10.13'e göre $\alpha_J \subseteq \alpha_I$ ve hatta α_J, α_I'nin bir başlangıç dilimi (Teorem 10.8).



Şimdi $f_I : I \to \alpha_I$ fonksiyonunu I'nin J başlangıç dilimine kısıtlayabiliriz, yani f_I'nin I'da aldığı değerlere bakacağımıza f_I'nin sadece J'de aldığı değerlere bakabiliriz. Eğer bu fonksi-



yonu $f_{I\downharpoonright J}$ olarak simgelersek, her $x \in J$ için, $f_{I\downharpoonright J}$ fonksiyonunun tanımı gereği,

$$f_{I\downharpoonright J}(x) = f_I(x)$$

olur. Demek ki

$$f_{I\downharpoonright J}(J) = f_I(J)$$

ve dolayısıyla $f_{I\downharpoonright J}(J)$, α_I'nin bir başlangıç dilimi (Önsav 7.5.i). Şimdi J'yi α_I'nin başlangıç kümelerine gömen iki eşyapı fonksiyonumuz var: biri f_J, diğeri $f_{I\downharpoonright J}$. Önsav 7.6'ya göre

$$f_J = f_{I\downharpoonright J}.$$

Bir başka deyişle, eğer $x \in J$ ise,

$$f_J(x) = f_I(x).$$

Savımız kanıtlanmıştır. □

Bu sav bize parlak ve hatta tozpembe bir gelecek işaret ediyor. Sanki her şey yolunda gibi.

Şimdi amacımız $\wp$'nin elemanı olan başlangıç kümelerinin bileşimini alıp bunun X'e eşit olduğunu, yani

$$X = \bigcup_{I \in \wp} I$$

eşitliğini göstermek. Bir de α_I ordinallerinin bileşiminin bir ordinal olduğunu gösterebilirsek o zaman işimiz iş... Zaten bir ordinal kümesinin bileşiminin bir ordinal olduğunu biliyoruz (Teorem 10.10). Bu ordinale α diyelim:

$$\alpha = \bigcup_{I\in \wp} \alpha_I.$$

Bütün bunları yaptığımızı varsayarsak, X'ten α'ya giden şu eşyapı eşlemesini tanımlayabiliriz: Eğer $x \in X = \bigcup_{I\in \wp} I$ ise, o zaman $x \in I \in \wp$ ilişkilerini sağlayan bir I vardır. Şimdi,

$$f(x) = f_I(x) \in \alpha_I \subseteq \alpha$$

olarak tanımlayalım.

Sav 1'e göre, tanımda, $\wp$'nin x'i içeren hangi I başlangıç diliminin alındığı önemli değildir, tüm seçimler aynı sonucu verir. Bu aşamada f'nin X'ten α'ya giden bir eşyapı eşlemesi olduğunu kanıtlamak işten bile değildir. Zamanı geldiğinde yapacağız.

$\bigcup_{I\in \wp} I = X$ eşitliğini göstermek için küçük bir numara yapmamız gerekiyor. Bir an için $(X, <)$ iyisıralı kümesinin bir ordinale eşyapısal olmadığını varsayalım. X'in bir ordinale eşyapısal olmayan başlangıç dilimlerinin en küçüğünü alalım. Bu başlangıç dilimine şimdilik X' diyelim. Alıştırma 7.1.4'e göre böyle bir başlangıç dilimi vardır. Hem X hem de X' bir ordinale eşyapısal olmayan iyisıralı kümeler. Ama X' iyisıralamasının X'e göre bir ayrıcalığı var: X' iyisıralamasının kendisine eşit olmayan her başlangıç dilimi bir ordinale eşyapısal. Şimdi X yerine ayrıcalığı olan bu X' iyisıralamasını alabiliriz. Bundan böyle,

1. X'in bir ordinale eşyapısal olmadığını, ve

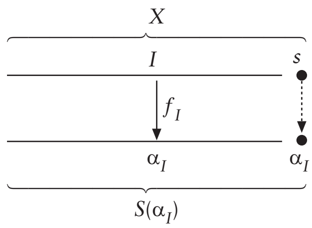
2. X'in X'e eşit olmayan her başlangıç diliminin bir ordinale eşyapısal olduğunu varsayıyoruz. Bir başka deyişle, $\wp$, artık X'e eşit olmayan X'in tüm başlangıç dilimleri.

Sav 2. *X'in en büyük elemanı olamaz.*

Kanıt: X'in en büyük elemanı olduğunu varsayalım. Bu elemana s diyelim. Şimdi,

$$I = \{y \in X : y < s\}$$

olsun. I, X'in bir başlangıç dilimidir. Ama s, I'da olmadığından, $I \neq X$. Demek ki I bir α_I ordinaline bir f_I eşyapı eşlemesi aracılığıyla eşyapısal. Ama $X = I \cup \{s\}$ ve $S(\alpha_I) = \alpha_I \cup \{\alpha_I\}$ ve X'in ve $S(\alpha_I)$'nin sıralamaları son derece uyumlu. f_I eşyapı eşlemesini I'dan X'e genişletmek çok kolay: Aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi X'in en sonundaki s elemanını $S(\alpha_I)$'nin en sonundaki α_I elemanına yollayalım.



Böylece X ile $S(\alpha_I)$ arasında bir eşyapı eşlemesi bulduk. $S(\alpha_I)$ bir ordinal olduğundan (Teorem 10.5), bu bir çelişkidir. □

Artık $\bigcup_{I \in \wp} I = X$ eşitliğini kanıtlayabiliriz. $\wp$'nin X'in X'e eşit olmayan başlangıç dilimlerinin kümesi olduğunu anımsatırım.

Sav 3. $\bigcup_{I \in \wp} I = X$.

Kanıt: $x \in X$ olsun. x, X'in en büyük elemanı olmadığından (Sav 2), X'te x'ten büyük bir eleman vardır. Bu elemanlardan biri y olsun. O zaman,

$$I = \{z \in X : z < y\},$$

X'in x'i içeren ama y'yi içermeyen bir başlangıç dilimidir. Demek ki $x \in \bigcup_{I \in \wp} I$. □

İstediğimizin nerdeyse sonuna geldik.

Sıra, her $I \in \wp$ başlangıç diliminin eşyapısal olduğu α_I ordinallerinin bileşiminin bir ordinal olduğunu kanıtlamada, yani $\bigcup_{I \in \wp} \alpha_I$ bileşiminin bir ordinal olduğunu kanıtlamalıyız.

Sav 4. $\cup_{I \in \wp} \alpha_I$ *bir ordinaldir.*

Kanıt: Teorem 10.10'da bir ordinaller kümesinin bileşiminin gene bir ordinal olduğunu kanıtlamıştık. Demek ki bilmemiz gereken tek şey

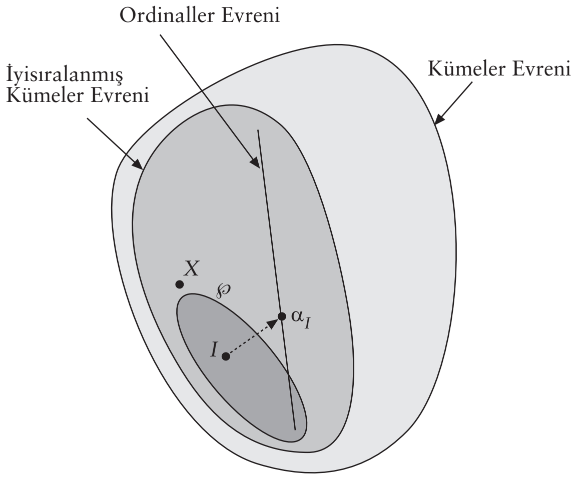
$$\{\alpha_I : I \in \wp\}$$

topluluğunun bir küme olduğu... Bunu bilirsek gerisi gelecek...

Maalesef bunu [Sİ]'de verdiğimiz aksiyomlarla kanıtlayamayız. Neden kanıtlayamayacağımızı biraz açıklamaya çalışayım.

Önce bir durum değerlendirmesi yapalım. Neyle karşı karşıyayız? $\wp$ bir küme; bundan kuşkumuz yok. Her $I \in \wp$ için α_I iyi tanımlanmış bir ordinal; bundan da kuşkumuz yok. Nitekim α_I, I iyisıralamasının eşyapısal olduğu yegâne ordinal, bir ikincisi daha yok.

Durumu özetleyen şöyle bir resim çizdik. Beğenilerinize sunuyoruz:

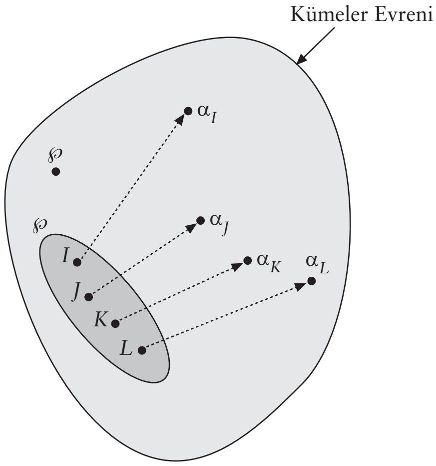


Aslında resim çok daha sade. Resmin iyi sıralanmış kümelerle ya da ordinallerle filan pek bir ilgisi yok. En yalın haliyle resim şöyle: $\wp$ bir küme. $\wp$'nin her I elemanı için bir ve bir tek α_I kümesi tanımlanmış. $\wp$'nin küme olduğundan hareketle,

$$\{\alpha_I : I \in \wp\}$$

topluluğunun bir küme olduğunu kanıtlamak istiyoruz.

Durumu bu daha yalın haliyle aşağıda resmettik.



Kritik soru: $\wp$ bir küme. $\wp$'nin her elemanı için α_I kümesi bir biçimde tanımlanmış. α_I'lerin topluluğu da bir küme olur mu?

Eğer $\wp$ sonluysa sorun yok, çünkü o zaman

$$\{\alpha_I : I \in \wp\}$$

topluluğu sonlu bir topluluk olur ve her sonlu topluluk gibi bu da bir küme olur. Sorun, $\wp$ sonsuz olduğunda.

Öte yandan eğer α_I'ler rastgele, yani hiçbir kurala bağlı olmaksızın seçilmişlerse (ki aslında böyle bir seçim fiziksel olarak mümkün bile değildir!) α_I'lerin topluluğunun bir küme olmasını bekleyemeyiz. Öte yandan burada özel bir durumla karşı karşıyayız. Her α_I, I'ya belli bir kuralla bağlı: α_I, I iyisıralamasının eşyapısal olduğu yegâne ordinal. Yani, eğer $\varphi(x, y)$, Türkçe söylediğimiz şu özelliğin

x bir sıralama ve *y*, *x'le eşyapısal olan bir ordinal*,

matematikçesini simgelerse, o zaman her $x \in \wp$ için $\varphi(x, y)$ formülünü sağlayan bir ve bir tane y kümesi vardır.

Şimdi sorumuzu soruyoruz:

Önemli Soru: *$\wp$ bir küme ve $\varphi(x, y)$ bir özellik olsun. Her $x \in \wp$ için, $\varphi(x, y)$ özelliğini sağlayan bir ve bir tane y kümesinin olduğunu varsayalım. O zaman bir $x \in \wp$ için $\varphi(x, y)$ özelliğini sağlayan y'ler bir küme oluşturur mu? Yani*

$$\{y : \exists x\ (x \in \wp \wedge \varphi(x, y))\}$$

topluluğu bir küme midir?

Tanımlanabilir Altküme Aksiyomu'ndan, eğer sorudaki y'leri içeren bir $\mathfrak{R}$ kümesi olduğu bilinirse, yani

$$\{y : \exists x\ (x \in \wp \wedge \varphi(x, y))\}$$

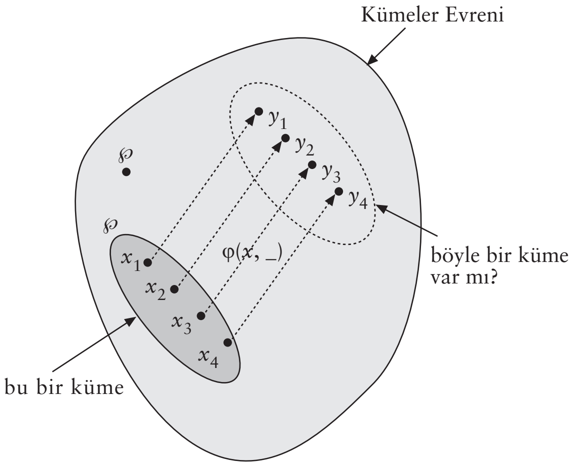
topluluğu aslında

$$\{y \in \mathfrak{R} : \exists x\ (x \in \wp \wedge \varphi(x, y))\}$$

ise, o zaman bunun bir küme olduğunu biliyoruz. Sorun, tüm y'leri eleman olarak içeren bir $\mathfrak{R}$ kümesinin olup olmadığını bilmediğimizde ortaya çıkıyor; bu şanssız durumda

$$\{y : \exists x\ (x \in \wp \wedge \varphi(x, y))\}$$

topluluğunun bir küme olduğuna hükmedemiyoruz.



$\wp$ bir küme olsun. Her $x \in \wp$ için, $\varphi(x, y)$ özelliğini sağlayan bir ve bir tane y olduğunu varsayalım. O zaman, belli bir $x \in \wp$ için $\varphi(x, y)$ özelliğini sağlayan y'ler bir küme oluştururlar mı?
Not: $\wp$ kümesinin elemanlarını $x_1, x_2, \ldots$ diye yazmamız okuru yanıltmasın, $\wp$ kümesi sayılabilir olmak zorunda değildir.

Bu arada $\varphi(x, \_)$'nın nerdeyse tanım kümesi $\wp$ olan bir fonksiyon tanımladığına dikkatinizi çekerim. Gerçekten de her $x \in \wp$ için bir ve bir tek y değeri veriyor. Tek eksiği değer kümesinin olmaması... Hatta değerleri içeren bir kümenin olmaması.

Sanırım soruyu ve sorunu yeterince tartıştık. Yanıtı vermenin zamanı geldi. Böyle bir kümenin varlığı [Sİ]'de verdiğimiz aksiyomların yardımıyla kanıtlanamaz. Bu kanıtlanamazlığın kanıtı zor olmasa da bizi konumuzdan bayağı saptıracağından kanıtı burada vermeyeceğiz.

Bir yandan böyle bir kümenin olmasını istiyoruz, çünkü her iyisıralamanın bir ordinal olması gerektiğini hissediyoruz (en azından ben öyle hissediyorum, ben dünyayı öyle algılıyorum), diğer yandan böyle bir kümenin varlığını kanıtlayamıyoruz. O zaman yeni bir aksiyom gerekiyor.

12.2. Yerleştirme Aksiyomu

İşte ihtiyacımız olan aksiyom:

Yerleştirme Aksiyomu. *$\wp$ bir küme ve $\varphi(x, y)$ bir özellik olsun. Her $x \in \wp$ için, $\varphi(x, y)$ özelliğini sağlayan bir ve bir tane y kümesinin olduğunu varsayalım. O zaman bir $x \in \wp$ için $\varphi(x, y)$ özelliğini sağlayan y'ler bir küme oluştururlar. Yani*

$$\{y : \exists x\ (x \in \wp \wedge \varphi(x, y)\}$$

topluluğu bir kümedir.

Eğer Yerleştirme Aksiyomu'nun var olduğunu söylediği kümeye $\Re$ dersek, o zaman $\varphi(x, y)$ özelliği (ya da formülü), $\wp$ ile $\Re$ arasında bir eşleme verir. Mecazi konuşacak olursak, Yerleştirme Aksiyomu, $\wp$ kümesini $\Re$'ye yerleştirerek $\Re$'nin küme olduğuna hükmedebileceğimizi söylüyor.

Şimdi Sav 4'ün kanıtını tamamlayabiliriz. Yerleştirme Aksiyomu'na göre $\{\alpha_I : I \in \wp\}$ bir kümedir, hatta bir ordinal kümesidir. Dolayısıyla bu kümenin elemanlarının bileşimini aldığımızda bir küme buluruz: $\bigcup_{I \in \wp} \alpha_I$ bir kümedir. Hatta, Teorem 10.10'a göre bu bileşim bir ordinaldir. □

Teorem 12.1. *Her iyisıralı küme bir ve bir tek ordinale eşyapısaldır.*

Kanıt: İyisıralı bir kümenin iki değişik ordinale eşyapısal olamayacağını Teorem 10.11'den biliyoruz. Bulduklarımızı tekrarlayalım. Bir ordinale eşyapısal olmayan iyisıralı bir X kümesiyle başladık. Biraz uğraşla, X'in X'e eşit olmayan her I başlangıç diliminin bir α_I ordinaline eşyapısal olduğunu varsayabileceğimizi gördük. Sav 2'de, X'in en büyük elemanının olamayacağını gördük.

Eğer $\wp$, X'in X'e eşit olmayan başlangıç dilimlerinin kümesiyse, her $I \in \wp$ için, I'nin eşyapısal olduğu tek bir α_I ordinali ve I'dan α_I'ya giden tek bir f_I eşyapı eşlemesi vardır.

Yerleştirme Aksiyomu'na göre $\{\alpha_I : I \in \wp\}$ topluluğu elemanları ordinaller olan bir kümedir. Dolayısıyla bu kümenin bileşimi de bir ordinaldir. Bu ordinale α adını verelim.

$$\alpha = \bigcup_{I \in \wp} \alpha_I.$$

Ayrıca Sav 3'e göre $\bigcup_{I \in \wp} I = X$.

Bir de Sav 1 çok önemli: Eğer I ve J, $\wp$'delerse ve eğer $J \subseteq I$ ise ve $x \in J$ ise, o zaman $f_J(x) = f_I(x)$.

Şimdi X'ten α'ya giden şu f fonksiyonunu tanımlayabiliriz: Eğer $x \in X = \bigcup_{I \in \wp} I$ ise, $x \in I \in \wp$ ilişkilerini sağlayan bir I başlangıç dilimi vardır.

$$f(x) = f_I(x) \in \alpha_I \subseteq \alpha$$

olsun.

$$\begin{array}{ccc}
X = \bigcup_{I \in \wp} I & \xrightarrow{f} & \alpha = \bigcup_{I \in \wp} \alpha_I \\
\cup & & \cup \\
I & \xrightarrow{f_I} & \alpha_I \\
\cup & & \cup \\
J & \xrightarrow{f_J} & \alpha_J
\end{array}$$

Sav 1'e göre, $f(x)$'in tanımında, $\wp$'nin x'i içeren hangi I başlangıç diliminin alındığı önemli değildir, tüm seçimler aynı sonucu verir.

f'nin X'ten α'ya giden bir eşyapı eşlemesi olduğunu kanıtlamak kaldı geriye. Bu kolay:

f **Örtendir:** $\beta \in \alpha$ olsun. $\alpha = \bigcup_{I \in \wp} \alpha_I$ olduğundan, belli bir $I \in \wp$ için $\beta \in \alpha_I$ olmalıdır.

$$f_I : I \to \alpha_I$$

örten olduğundan, belli bir $x \in I$ için, $f_I(x) = \beta$ olmalıdır. Demek ki $f(x) = f_I(x) = \beta$. Ve, $x \in I \subseteq \bigcup_{I \in \wp} I = X$.

f **Sıralamaya Saygı Duyar:** $x, y \in X$ olsun. $x < y$ eşitsizliğini varsayalım. $X = \bigcup_{I \in \wp} I$ olduğundan, $I, J \in \wp$ için $x \in I$ ve $y \in J$. Ama I ve J, X'in başlangıç kümeleri olduklarından, ikisinden biri diğerinin altkümesi olmalı. Diyelim $J \subseteq I$. O zaman, hem x hem de y, I'nin elemanları. Dolayısıyla $f(x)$ ve $f(y)$'nin tanımlarında aynı I başlangıç dilimini alabiliriz:

$$f(x) = f_I(x),$$
$$f(y) = f_I(y).$$

Ayrıca, $f_I : I \to \alpha_I$ bir eşyapı eşlemesi olduğundan ve $x < y$ eşitsizliğinden, $f_I(x) < f_I(y)$ eşitsizliği çıkar.

Şimdi, $f(x) = f_I(x) < f_I(y) = f(y)$, yani $f(x) < f(y)$. İstediğimiz kanıtlanmıştır, X iyisıralı kümesi α ordinaline eşyapısaldır. □

12.3. Yerleştirme Aksiyomu'nun İzin Verdiği Kümeler

Eskiden küme olmayan toplulukların küme olduklarını Yerleştirme Aksiyomu'nu kullanarak kanıtlayabiliriz.

Örnek: $\{0, \{0\}, \{\{0\}\}, \{\{\{0\}\}\}, \ldots\}$ *topluluğu bir kümedir.*

Aslında bu kümeyi böyle yazmak günah sınıfına olmasa da kabahat sınıfına sokulabilir, çünkü matematikte "nokta nokta nokta" diye bir simge yoktur.

Şunu kanıtlayacağız: $a_0 = 0$ olsun ve her $n \in \omega$ için, $a_{n+1} = \{a_n\}$ olsun. Öyle bir $\varphi(x, y)$ formülü vardır ki, $\varphi(x, y)$'nin doğru olması için yeter ve gerek koşul x'in bir doğal sayı olması ve y'nin a_x'e eşit olmasıdır.

$\varphi(x, y)$ formülünü yarı Türkçe yarı matematikçe yazacağız; sadece matematikçe yazarsak formülü gereksiz yere uzatmış oluruz.

$\varphi(x, y)$ formülü, önce $x \in \omega$ diyecek. Sonra

$$z = \{a_0, a_1, ..., a_{x-1}\}$$

diye bir kümenin varlığından sözedecek. Bunu şöyle söyleyeceğiz: Öyle bir z kümesi ve öyle bir $f : x \to z$ eşlemesi vardır ki, $f(0) = a_0$ ve her $0 \leq i < x - 1$ için $f(S(i)) = \{f(i)\}$'dir.

Şimdi bir de ayrıca $y = \{f(x - 1)\}$ diyelim.

$x = 0$ şıkkı yukarda sorun yaratır. Eğer $x = 0$ ise $\varphi(x, y)$ formülü "$y = 0$" desin.

Böylece dilediğimiz gibi $\varphi(x, y)$ formülü bulduk. Şimdi Yerleştirme Aksiyomu'nu $\varphi(x, y)$'ye ve ω'ya uygularsak, eleman olarak sadece a_n'leri ($n \in \omega$) içeren bir kümenin varlığını kanıtlamış oluruz.

Not 1. Bu aşamaya kadar [Sİ]'de ve bu ders notlarında gördüğümüz kümeler kuramına Zermelo-Fraenkel kümeler kuramı adı verilir ve bu "teori" ZF olarak kısaltılır. Kümeler kuramının son aksiyomu ileride göreceğimiz Seçim Aksiyomu'dur. ZF'ye Seçim Aksiyomu eklenerek elde edilen teori ZFC olarak yazılır.

Not 2. Artık her iyisıralı kümenin bir (ve bir tek) ordinale eşyapısal olduğunu biliyoruz ama henüz sayılamaz sonsuzlukta bir kümenin iyisıralanabileceğini, dolayısıyla sayılamaz sonsuzlukta bir ordinalin olduğunu bilmiyoruz. Böyle bir ordinalin varlığını ileride, Seçim Aksiyomu'nu kullanarak kanıtlayacağız. Daha ileri gidip, her kümenin iyisıralanabileceğini kanıtlayacağız.

Not 3. Ne ZF'de ne de ZFC'de tüm ordinaller topluluğu bir kümedir. Bunu bir sonraki altbölümde kanıtlayacağız.

12.4. Burali-Forti Paradoksu

Ω, tüm ordinaller kümesi olsun. O zaman, $\alpha = \cup\Omega$ bir ordinaldir (Teorem 10.10; aslında $\Omega = \alpha$, ama bunun hiçbir önemi yok) ve elbette ordinallerin en büyüğüdür. Ama $S(\alpha)$, α'dan daha büyük bir ordinaldir. Çelişki! (İhtiyacınız varsa Ord2a'yı da kullanın.)

Buna "Burali-Forti Paradoksu" denir. 1897'de Cesare Burali-Forti (1861-1931) tarafından bulunmuştur, Bertrand Russell (1872-1970) Paradoksu'ndan 4 yıl daha önce. Burali-Forti Paradoksu'nun bir benzeri iki yıl sonra Cantor tarafından bulunmuştur.

Cesare Burali-Forti

Tüm paradoksların kökeni aynıdır: Her biri çok çok "büyük" toplulukların küme olduklarını varsayar.

Dün paradoksa yol açan akıl yürütme bugün paradoks olmaktan çıkmıştır, çünkü ordinaller topluluğu Ω bir küme değildir! Ω'nın küme olmadığının kanıtı yukarda: Yoksa Burali-Forti Paradoksu gerçekten bir paradoks olurdu ve çelişki elde ederdik (olmayana ergi yöntemi).

Burali Forti, Peano'nun asistanlığını yapmıştır. 200'den fazla matematiksel makalesi vardır. Matematik eğitimi konusuna da eğilmiştir. Ancak Einstein'in izafiyet kuramına inanmamış ve (Tommaso Boggio ile birlikte) kuramın yanlışlığını göstermeye çalışan bir kitap yazmıştır.