Üçüncü Kısım:

Kesirli Sayılardan Gerçel Sayılara Doğru

6A. Halkalar ve Cisimler

Geçmişte halkalardan sözettik, ileride de söz edeceğiz. Bu bölümde halkanın ne demek olduğunu açıklayacağız! İnşa ettiğimiz $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$ yapıları birer halkadır. Bu ders notlarında ilerde inşa edeceğimiz $\mathbb{R}$ de bir halka olacak.

Bu bölümde bazı örneklerde okurun $\mathbb{R}$'yi bildiğini varsayabiliriz. Ama tabii ki bu varsayımlar sadece örnek vermek amacıyla ve matematiğe halel getirmeyecek biçimde yapılacak. Okur, birazdan tanımlayacağımız "halka" kavramını okurken, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ gibi sayı kümelerini, lise yıllarından aşina olduğunu sandığımız $\mathbb{Z}[X]$, $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ gibi polinom kümelerini ve $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ modüler sayı kümelerini aklında tutmalıdır. Bu kümelerin herbiri, bildiğimiz $+$, $\times$, 0, 1 aksesuvarlarıyla birlikte birer halka örneğidir. Bu yapıları bilmek bu bölümü anlamak için esas değildir ama faydalıdır, en azından biri ikisi bilinse kârdır.

Bir halka her şeyden önce bir kümedir, ama bir halka sadece bir küme değildir elbet. Yoksa küme kavramından gayri bir kavram elde etmezdik. Bir halkada, ayrıca, 0 (***sıfır***) ve 1 (***bir*** ya da ***birim eleman***) adı verilen iki özel eleman vardır. Dikkat: Halkanın bu 0 ve 1 elemanları bizim bildiğimiz 0 ve 1 tamsayıları olmayabilirler. Hatta halkanın hiçbir elemanı sayı olmayabilir. Eğer halkamıza R adını verirsek, bu elemanlara belki de 0 ve 1 yerine 0_R ve 1_R adını vermek daha doğru olurdu, ki bazen öyle yapacağız, çünkü bunlar sayıların değil, R'nin sıfırı ve biridir.

Bir halkada ayrıca ***toplama*** ve ***çarpma*** adı verilen, ama çocukluğumuzdan beri alışık olduğumuz toplama ve çarpmayla hiçbir ilgisi olmayabilecek iki de işlem vardır. Bu işlemler de + ve × olarak gösterilirler. Toplama ve çarpma, her ikisi de $R \times R$ kümesinden R kümesine giden birer fonksiyondur. Eğer $(x, y) \in R \times R$ ise, toplama ve çarpma işlemlerinin (fonksiyonlarının) bu elemanlardaki sonucu sırasıyla $x + y$ ve $x \times y$ yazılırlar. Hemen hemen her zaman $x \times y$ yerine xy yazacağız. Ama 1×1 yerine 11 yazmamaya özen göstereceğiz! Bu karışıklığı engellemek amacıyla bazen xy yerine $x{\cdot}y$ yazacağız.

Çoğu kez bu hataya düşüldüğünden yinelemekte yarar var: Adına toplama ve çarpma dediğimiz bu işlemler (fonksiyonlar) bizim aşina olduğumuz toplama ve çarpmayla ilgisi olmayabilir. Bu yüzden bu toplama ve çarpma işlemlerine + ve × olarak yazmak yerine belki de $+_R$ ve $\times_R$ olarak yazmayı yeğlemeliydik, ama öyle yapmayacağız, okurun dikkatli olduğunu varsayacağız.

Tekrarlamakta yarar var! Bir halkanın elemanlarının sayılarla hiç mi hiç ilgisi olmayabilir. Sözgelimi bir halkada x^y ya da x/y gibi kavramlar olmayabilir.

Demek ki bir halka, bir R kümesinden, bu kümenin 0 ve 1 adı verilen iki elemanından ve $R \times R$ kartezyen çarpımından R kümesine giden ve adına toplama (+) ve çarpma (×) denilen iki fonksiyondan (işlemden) oluşan bir beşlidir.

Bu kadarla kalsa iyi. Bu $(R, +, \times, 0, 1)$ beşlisinin halka adına hak kazanması için birtakım özelliklere sahip olması gerekmektedir. Bir halkanın sahip olması gereken bu özellikleri üç ana grupta toplayacağız:

Toplama ve 0'la ilgili özellikler: T1, T2, T3, T4.

Çarpma ve 1'le ilgili özellikler: Ç1, Ç2, Ç4.

Hem toplama hem de çarpmayla ilgili iki özellik: D ve E.

Bir şey daha ekleyelim: Bu bölümde ***değişmeli*** halkaları tanıtacağız. Genellikle halkalar değişmeli olmak zorunda değildirler.

6A.1. Toplamanın Özellikleri

$(R, +, \times, 0, 1)$ beşlisinin bir halka olması için $(R, +, 0)$ üçlüsünün şu özellikleri sağlaması gerekir (ama yetmez elbet!)

T1 [Birleşme Özelliği]. *Her* $x, y, z \in R$ *için,*

$$x + (y + z) = (x + y) + z.$$

T2 [Etkisiz Öğe]. *Her* $x \in R$ *için,* $0 + x = x + 0 = x$.

T3 [Ters Öğenin Varlığı]. *Her* $x \in R$ *için,*

$$x + y = y + x = 0$$

eşitliklerini sağlayan bir $y \in R$ *vardır.*

T4 [Değişme Özelliği]. *Her* x *ve* $y \in R$ *için,*

$$x + y = y + x.$$

T1, T2, T3 özelliklerini sağlayan bir $(R, +, 0)$ yapısına ***grup*** denir. Eğer ayrıca T4 sağlanıyorsa, yapıya ***değişmeli*** ya da ***abelyen grup*** denir.

T1, bir halkanın elemanları toplanırken paranteze gerek olmadığını söylüyor. Üç eleman için geçerli olan bu özellik dört eleman için de geçerlidir. Örneğin x, y, z, t elemanları bu sırayla toplanırken işlemlerin hangi sırayla yapıldıkları önemli değildir. Sözgelimi,

$$\begin{aligned}(x + y) + (z + t) &= (x + (y + z)) + t = ((x + y) + z) + t \\ &= (x + y) + (z + t) = x + ((y + z) + t) \\ &= x + (y + (z + t)).\end{aligned}$$

Bu eşitliklerin herbiri T1 özelliği birkaç kez kullanılarak kanıtlanabilir. Dolayısıyla x, y, z, t elemanların toplamını parantezsiz olarak $x + y + z + t$ biçiminde yazabiliriz, parantezlerin işlevi kalmamıştır. Biz de bundan böyle toplama yaparken parantezleri kullanmayacağız, doğrudan $x + y + z + t$ yazacağız.

T4 özelliğini kullanarak, toplama yaparken x, y, z ve t'nin yerlerinin de önemli olmadığını anlarız. Örneğin,

$$x + y + z + t = z + x + t + y.$$

Önsav 6A.1 [Sadeleştirme]. *Eğer bir grubun x, z ve t elemanları* $x + a = x + b$ *eşitliğini sağlıyorsa* $a = b$ *olur.*

Kanıt: y, x için T3 özelliğini sağlayan bir eleman olsun. Demek ki $y + x = 0$. Şimdi hesaplayalım:

$$\begin{aligned} a &= 0 + a = (y + x) + a = y + (x + a) = y + (x + b) \\ &= (y + x) + b = 0 + b = b. \end{aligned}$$ □

T2 özelliğini sağlayan bir tek 0 elemanı vardır, nitekim eğer $x + 0' = x$ ise, $0 = 0 + 0' = 0'$ olur. Biricik olduğunu kanıtladığımız bu 0 elemanına ***sıfır*** ya da toplamanın ***etkisiz elemanı*** denir.

Önsav 6A.1'den, bir halkada, her x için T3 özelliğini sağlayan tek bir y'nin olduğu anlaşılır, nitekim eğer

$$x + y = 0 = x + z$$

ise, Önsav 6A1'e göre $y = z$ olur. Madem ki, $x + y = 0$ eşitliğini sağlayan tek bir y var, (x'e bağımlı olan, yani x değiştikçe değişen) bu y elemanına bir ad verebiliriz. Bundan böyle $x + y = 0$ özelliğini sağlayan y elemanını $-x$ olarak gösterelim. $-x$ elemanına x'nin ***toplama için tersi*** ya da ***toplamsal tersi*** denir. Ama biz mahalle arasında "eksi x" deriz. Bundan böyle

$$x + (-y) \text{ yerine } x - y,$$
$$(-x) + y \text{ yerine } -x + y$$

yazalım. Dolayısıyla $-x - y$, $(-x) + (-y)$ demektir.

Bir halkada 1 diye bir eleman olduğundan, -1 diye de bir eleman vardır.

Önsav 6A.2. i. $-(x + y) = -x - y$.

ii. $-(x - y) = -x + y$.

iii. $-(-x) = x$.

Kanıt: T3'teki eşitlik x ve y'ye göre simetrik olduğundan, x, y'nin tersiyse, y de x'in tersidir. Bundan (iii) çıkar. (ii) için

$$(x - y) + (-x + y) = 0$$

eşitliğini, yani tanımlara göre $(x + (-y)) + ((-x) + y) = 0$ eşitliğini kanıtlamalıyız ki, bu da kolay. (i)'i okura bırakıyoruz. □

6A.2. Çarpmanın Özellikleri

Alışageldiği üzere çarpma yaparken $\times$ simgesini kullanmayacağız. $a \times b$ yerine ab yazacağız.

Ç1 [Birleşme Özelliği]. *Her* $x, y, z \in R$ *için*, $x(yz) = (xy)z$.
Ç2 [Birim Öğe]. *Her* $x \in R$ *için*, $1x = x1 = x$.
Ç4 [Değişme Özelliği]. *Her* x *ve* $y \in R$ *için*, $xy = yx$.

Ç1 özelliğine göre, bir halkanın birçok elemanı çarpıldığında parantezler gereksizdir. Bundan böyle biz de gerekmedikçe parantez kullanmayacağız

Ç2 özelliğini sağlayan tek bir 1 elemanı vardır: Eğer $1'$ bu özelliği sağlayan bir başka eleman olsaydı, $1 = 1 \times 1' = 1'$ olurdu. 1'e halkanın ***birim elemanı*** ya da ***bir***'i denir.

Genellikle halkalarda Ç4 özelliği aranmaz ve Ç4 özelliğini sağlayan halaklara ***değişmeli halka*** denir. Biz bu notlarda halka terimini hep değişmeli halka anlamında kullanacağız.

Bir halkada, eğer a elemanı verilmişse, $ab = 1$ eşitliğini sağlayan bir b elemanı varsa a'ya ***tersinir eleman*** denir. Bu eşitliği sağlayan en fazla bir b elemanı olabilir (hiç olmayabilir de). Nitekim $ab = ac = 1$ ise, o zaman $c = c1 = c(ab) = b(ac) = b1 = b$. Dolayısıyla tersinir bir a elemanı için $ab = 1$ eşitliğini sağlayan b elemanını a^{-1} olarak gösterebiliriz. a^{-1} elemanına a'nın ***çarpımsal tersi*** ya da kısaca ***tersi*** denir. Elbette eğer a tersinirse ve b, a'nın tersiyse, b de tersinirdir ve b'nin tersi a'dır, yani $(a^{-1})^{-1} = a$ olur. $1\times1 = 1$ olduğundan, 1 tersinirdir ve tersi gene 1'dir: $1^{-1} = 1$.

Tersinir elemanlar kümesi R^* olarak gösterilir. Demek ki,

$$R^* = \{x \in R : \text{bir } y \in R \text{ için } xy = 1\}.$$

Örneğin $\mathbb{Z}$ halkasının tersinir elemanları 1 ve -1'dir ve başka da yoktur. Öte yandan 2, $\mathbb{Q}$'de tersinirdir. $\mathbb{R}[X]$ polinom halkasının tersinir elemanları, 0 olmayan sabit polinomlardır (okura alıştırma.) 0 elemanı hiçbir halkada tersinir değildir. Öte yandan 1 ve -1 her halkada tersinirdir; -1'in her halkada tersinir olduğunu daha sonra kanıtlayacağız.

Örnekler: Kolayca görüleceği üzere,

$$\mathbb{Z}^* = \{1, -1\}$$
$$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$$
$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$
$$\mathbb{R}[X]^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \text{sıfır olmayan sabit polinomlar}$$
$$\mathbb{Z}[X]^* = \{1, -1\}.$$

Eğer $R = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ise, $R[X]$ halkasında

$$(1 - 2X)(1 + 2X) = 1$$

olduğundan, $1 - 2X \in R[X]^*$ olur.

Alıştırmalar

6A.2.1. $R = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ olsun. $R[X]^*$ kümesini bulun.

6A.2.2. Eğer R bir ***bölgeyse***, yani sıfıra eşit olmayan iki elemanın çarpımı hiçbir zaman sıfır olmuyorsa, $R[X]^* = R^*$ eşitliğini kanıtlayın.

6A.2.3. $R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ olsun. $R[X]^*$ kümesini bulun.

6A.2.4. p herhangi bir asal sayı olsun. $\mathbb{Q}_{\langle p\rangle}$, paydası p'ye bölünmeyen kesirli sayılar kümesi olsun. Yani,

$$\mathbb{Q}_{\langle p\rangle} = \{a/b : a, b \in \mathbb{Z} \text{ ve } p, b\text{'yi bölmez}\}$$

olsun. $\mathbb{Q}_{\langle p\rangle}$ bir halkadır. $\mathbb{Q}_{\langle p\rangle}^*$ kümesini bulun.

6A.2.5. R herhangi bir halka olsun. $x, y \in R$ için $\sim$ ilişkisini şöyle tanımlayalım: $x \sim y \Leftrightarrow x \in R^*y$. Bu ilişkinin bir denklik ilişkisi olduğunu gösterin.

Önsav 6A.3. *R bir halka olsun.*

i. *$x, y \in R^*$ ise $xy \in R^*$ ve $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$.*

ii. *$x \in R^*$ ise $x^{-1} \in R^*$ ve $(x^{-1})^{-1} = x$.*

Kanıt: i. Hemen hesaplayalım:

$$(xy)(x^{-1}y^{-1}) = (xx^{-1})(yy^{-1}) = 1 \times 1 = 1.$$

Demek ki xy tersinirdir ve $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$ olur.

ii. $x^{-1}x = 1$ olduğundan, x^{-1} elemanı da tersinirdir ve $(x^{-1})^{-1} = x$ olur. □

6A.3. Toplamayla Çarpmayı Harmanlayan Özellik

Yukarda, sadece toplamayla ya da sadece çarpmayla ilgili özellikleri gördük. Şimdi, toplamayla çarpma arasındaki ilişkiyi ortaya koyan özellikleri açıklayalım:

D [Dağılma Özelliği]. *Her* $x, y, z \in R$ *için,*

$$x(y + z) = xy + xz.$$

E. $1 \neq 0$.

Dağılma özelliğinin sonuçlarını irdeleyelim.

Önsav 6A.4. *R bir halka olsun.* $x, y \in R$ *olsun.*

i. $x0 = 0$.

ii. $(-x)y = -(xy) = x(-y)$

iii. $(-1)y = -y$.

iv. $(-1)^2 = 1$.

v. $x \in R^*$ *ise ve* $xy = 0$ *ise o zaman* $y = 0$.

vi. $x \in R^*$ *ise ve* $xy = xz$ *ise o zaman* $y = z$.

Kanıt: i. $x0 + 0 = x0 = x(0 + 0) = x0 + x0$ eşitliğinden ve Önsav 6A.1'den $x0 = 0$ çıkar.

ii. $xy + (-xy) = 0 = 0y = (x + (-x))y = xy + (-x)y$. Dolayısıyla, Önsav 6A.1'den $(-x)y = -(xy)$ çıkar. İkinci eşitlik birincisinden ve Ç4'ten çıkar.

iii. Yukarda x yerine 1 koyarsak sonuç çıkar.

iv. Yukarda y yerine -1 koyarsak sonuç, Önsav 6A.2.iii'ten çıkar.

v. (i)'den çıkar: $y = 1y = (x^{-1}x)y = x^{-1}(xy) = x^{-1}0 = 0$.

iv. $y = 1y = (xx^{-1})y = x^{-1}(xy) = x^{-1}(xz) = (xx^{-1})z = 1z = z$.

Önsav kanıtlanmıştır. □

(E) koşulu aslında halkanın tek bir elemandan ibaret olmadığını söylüyor. Nitekim halkanın tek bir elemanı varsa elbette $0 = 1$ olmalı. Ve $0 = 1$ ise, Önsav 6A.4.i'ye göre, her $r \in R$ için $r = r1 = r0 = 0$ olur.

6A.4. Halkanın Tanımı

Artık (değişmeli) bir halkayı tam olarak tanımlayabiliriz. Bir R kümesinde, yukardaki T1, T2, T3, T4, Ç1, Ç2, Ç4, D ve E özelliklerini sağlayan iki işlem ve 0 ve 1 adı verilen elemanlar tanımlanmışsa, o zaman R kümesine ***halka*** adı verilir. Daha matematiksel bir deyişle: R bir küme olsun. Ayrıca R'de adına 0 ve 1 diyeceğimiz iki eleman olsun. Ve ayrıca + ve ×, $R \times R$'den R'ye giden iki fonksiyon olsun. Eğer $(R, +, \times, 0, 1)$ beşlisi yukardaki T1, T2, T3, T4, Ç1, Ç2, Ç4 ve D özelliklerini sağlıyorsa, o zaman $(R, +, \times, 0, 1)$ beşlisine kısaca ***halka*** denir.

Örnek. Bir halkanın elemanlarının her zaman sayı olmadığını gösteren bir örnek verelim. A, boş olmayan herhangi bir küme olsun. $R = \wp(A)$, A'nın altkümeleri kümesi olsun. Eğer $x, y \in R$ ise, yani x ve y, R'nin birer altkümesiyse,

$$x + y := (x \cup y) \setminus (x \cap y)$$
$$x \times y := x \cap y$$
$$0 := \varnothing$$
$$1 := X$$

olsun. $(R, +, \times, 0, 1)$ bir halkadır (ayrıntıları okura bırakıyoruz.) Bu halkada, her x için, $x^2 = x$ ve $x + x = 0$ eşitlikleri geçerlidir. Görüldüğü gibi, bu halkanın elemanları sayı değil, A'nın altkümeleri.

6A.5. Bazı İncelikler

R bir halka ve $x \in R$ olsun. Her n doğal sayısı için, x'i kendisiyle n kez toplayabiliriz. Bu toplamı nx olarak gösterelim. Daha matematiksel olarak, $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in R$ için, R'nin nx elemanını n üzerine tümevarımla şöyle tanımlayalım:

$$0x = 0 \text{ ve } (n + 1)x = nx + x.$$

Bu altbölümde halkanın birim elemanını 1 yerine 1_R simgesiyle gösterelim, yoksa 1'ler karışabilir. n herhangi bir doğal sayı olsun. Bir üstteki paragrafta x yerine 1_R alacak olursak, R'nin $n1_R$ elemanını buluruz: $n1_R$, halkanın 1_R elemanı n kez kendisiyle toplanarak bulunmuştur. Bu elemana n_R diyelim: $n_R = n1_R$.

Şimdi soru şu: Acaba R halkasının n_Rx elemanı nx'e eşit mi? Dağılma özelliği sayesinde, bu soruya olumlu yanıt verebiliyoruz:

$$\begin{aligned} nx = x + \cdots + x &= 1_Rx + \cdots + 1_Rx \\ &= (1_R + \cdots + 1_R)x = n_Rx. \end{aligned}$$

(Bu eşitliği aslında n üzerinden tümevarımla kanıtlamak daha doğru olurdu.) Demek ki nx ile n_Rx arasında bir ayrım gözetmeye gerek yok. Bundan sonra n_R yerine (sanki bir doğal sayıymış gibi) n yazacağız.

Bir halkada nx diye bir elemanın varlığını yukarda gördük: x'in kendisiyle n kez toplanmasıyla elde edilen eleman. Demek ki $-(nx)$ diye de bir eleman var: nx'in toplama için tersi. Ayrıca $n(-x)$ diye de bir eleman var: $-x$'in kendisiyle n kez toplanmasıyla elde edilen eleman. Acaba bu iki eleman birbirine eşit mi? Evet:

$$nx + n(-x) = n(x + (-x)) = n0 = 0,$$

dolayısıyla $n(-x) = -(nx)$.

Bundan böyle $(-n)x$ elemanını $n(-x)$ ya da $-(nx)$ olarak tanımlayacağız ve bu elemanı $-nx$ olarak yazacağız.

Demek ki her $n \in \mathbb{Z}$ ve her $x \in R$ için bir $nx \in R$ elemanı tanımladık. Şu özellikleri kanıtlamak oldukça kolaydır: Her n, $m \in \mathbb{Z}$ ve her x, $y \in R$ için,

$$\begin{aligned} &(n \pm m)x = nx \pm mx, \\ &n(mx) = (nm)x, \\ &(nx)(my) = (nm)(xy). \end{aligned}$$

Birkaç Eşitlik. Bir halkanın bir x elemanının kuvvetlerini alabiliriz:

$$\begin{aligned} &x^0 = 1, \\ &x^1 = x, \\ &x^2 = x \times x, \\ &x^3 = x \times x \times x. \end{aligned}$$

Genel olarak ve daha matematiksel olarak, kuvvet alma, n üzerine tümevarımla

$$x^0 = 1 \text{ ve } x^{n+1} = x^n \times x$$

olarak tanımlanır.

Eğer x ve y bir halkanın birer elemanıysa ve $n > 0$ bir tamsayıysa,

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

eşitliği herhalde en çok bilinen ve kanıtı oldukça kolay eşitliklerdendir. Eğer n bir tek sayıysa, y yerine $-y$ alıp,

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \cdots - xy^{n-2} + y^{n-1})$$

eşitliğini buluruz.

Bir halkanın her x ve y elemanı için ve her $n > 0$ doğal sayısı için,

$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}.$$

eşitliğinin geçerli olduğunu kanıtlamak zor değildir.

Bütün bunlardan şu çıkıyor: Her ne kadar bir halkanın elemanları sayı olmak zorunda değillerse de, bir halkanın elemanlarını sayı olarak düşünmek pek yanlış değildir. Nitekim matematikçiler de halkaları çoğu zaman genelleştirilmiş sayılar olarak algılarlar.

Bölme. R bir halka ve $a, b \in R$ olsun. Eğer $ax = b$ eşitliğini sağlayan bir $x \in R$ varsa, o zaman a, b'yi ***böler*** denir ve bu $a|b$ olarak yazılır. Demek ki her halkada 0, 0'ı böler!

Eğer halkada $ax = b$ eşitliğini sağlayan tek bir x elemanı varsa, o zaman

$$x = b/a$$

yazılır. Eğer bu denklemi sağlayan birden fazla x varsa, b/a diye bir elemandan sözetmeyiz. Demek ki bir halkada 0/0 diye bir elemandan sözetmeyiz çünkü

$$1 \times 0 = 0 \times 0 = 0.$$

Örneğin, $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$'de,

$$2 \times 3 = 6 = 2 \times 9,$$

dolayısıyla $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$'de 6/2 diye bir elemandan sözetmeyiz, hatta 2/2 diye bir elemandan da sözetmeyiz. Öte yandan, $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$'de 6/2 diye bir elemandan sözedebiliriz, çünkü $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ halkasında sadece $x = 3$ elemanı $2x = 6$ eşitliğini sağlar.

Aşağıdaki önsavın kanıtı kolaydır ve okura bırakılmıştır.

Önsav 6A.5. *R bir halka olsun.*

i. *Her $r \in R$, 0'ı böler.*

ii. *R^* kümesinin her elemanı R'nin her elemanını böler. Demek ki* 1 *her elemanı böler ve her $r \in R$ için, $r/1 = r$ olur.*

iii. *Eğer $u \in R^*$ ise, her x için $xu|x$.*

iv. *Her $x \in R$ için, $x|x$.*

v. *Her $x, y, z \in R$ için, $x|y$ ve $y|z$ ise $x|z$.*

6A.6. Tamlık Bölgeleri ve Cisimler

Bir halkada $xy = 0$ eşitliği ancak x ya da $y = 0$ iken geçerli olabiliyorsa, o halkaya ***tamlık bölgesi*** ya da kısaca ***bölge*** adı verilir. Örneğin $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ bir tamlık bölgesi değildir, çünkü

$$\overline{2} \times \overline{3} = \overline{6} = \overline{0}$$

olur ve ne $\overline{2}$ ne de $\overline{3}$ elemanı $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$'de $\overline{0}$'dır. Bu örnekten de kolayca anlaşılacağı üzere $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ halkasının bir tamlık bölgesi olması için gerek ve yeter koşul n doğal sayısının asal olmasıdır.

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ birer tamlık bölgesidir. Eğer R bir tamlık bölgesiyse, $R[X]$ ve $R[X, Y]$ gibi polinom halkaları da tamlık bölgeleridir.

Tamlık bölgelerinde sadeleştirme yapılabilir, yani bir tamlık bölgesinde $a \neq 0$ ise ve $ab = ac$ ise $b = c$'dir, çünkü $ab = ac$ ise (D)'den dolayı $a(b - c) = 0$ olur ve bir tamlık bölgesinde olduğumuzdan $b - c = 0$, yani $b = c$ buluruz.

0 dışında her elemanı tersinir olan halkalara ***cisim*** denir. Yani bir cisimde $R^* = R \setminus \{0\}$ olur. $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ birer cisimdir, ama $\mathbb{Z}$ ve polinom halkalarının hiçbiri bir cisim değildir. Önsav 6A.4.v'e göre her cisim bir tamlık bölgesidir.

Alıştırmalar

6A.6.1. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ halkasının bir cisim olması için n'nin bir asal olmasının yeter ve gerek koşul olduğunu kanıtlayın.

6A.6.2. $d \in \mathbb{N}$ bir tamkare olmasın, örneğin $d = 2$ olabilir.

$$\mathbb{Q}[\sqrt{d}] = \{x + y\sqrt{d} : x, y \in \mathbb{Q}\}$$

olsun. Bu alıştırmada ilerde inşa edeceğimiz gerçel sayıları okurun bildiğini varsayıyoruz. Bildiğimiz toplama ve çarpma altında $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ bir halkadır. Bunun kanıtlanması oldukça kolaydır. $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ halkasının ayrıca bir cisim olduğunu kanıtlayın.

6A.6.3*. $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{x + y\sqrt{d} : x, y \in \mathbb{Z}\}$ olsun. $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^*$ kümesinin sonsuz olduğunu kanıtlayın.

6A.6.4*. Sonlu bir tamlık bölgesinin bir cisim olduğunu kanıtlayın.

6A.6.5*. R bir halka olsun. $R[X]$, katsayıları R'de olan polinomlar kümesi olsun. $R[X]$ bir halkadır. $R[X]^* = R^*$ eşitliğini kanıtlayın.

6A.6.6. Bir tamlık bölgesinde eğer $x|y$ ve $y|x$ ise $x \sim y$ olduğunu kanıtlayın. (Bkz. Alıştırma 6A.2.5.)

6A.7. Kartezyen Çarpım ve Althalka

Kartezyen Çarpım. R ve S birer halka olsun. $R \times S$ kartezyen çarpımını ele alalım:

$$R \times S = \{(r, s) : r \in R, s \in S\}.$$

Bu küme üstünde şu işlemleri tanımlayalım:

$$(r, s) + (r', s') = (r + r', s + s')$$
$$(r, s)(r', s') = (rr', ss').$$

Bu iki işlem altında $R \times S$ bir halkadır. $R \times S$ kümesinin sıfır ve birim elemanları sırasıyla $(0, 0)$ ve $(1, 1)$ elemanlarıdır.

İki halkanın kartezyen çarpımı yerine istediğimiz kadar halkanın kartezyen çarpımını alabiliriz. I bir küme olsun. I'yı bir göstergeç kümesi olarak görelim. Her $i \in I$ için R_i bir halka olsun. Her R_i halkasının kendine göre bir toplaması, çarpması, sıfır ve bir elemanları var. Bunların hepsini kolaylık olsun (sanki aynı şeylermiş gibi) aynı simgelerle gösterelim. Bölüm 1.5'ten R_i 'lerin kartezyen çarpımını anımsayalım:

$$\prod_I R_i = \{r : I \to \cup_I R_i : \text{her } i \in I \text{ için } r(i) \in R_i\}.$$

$\prod_I R_i$ kümesi, fonksiyonların noktasal toplaması ve çarpması altında bir halka olur (bkz. [SKK]). Toplamanın etkisiz elemanı sabit 0 fınksiyonu, çarpmanın etkisiz elemanı sabit 1 fonksiyonudur. Burada bütün R_i'ler birbirine eşit olabilir ya da olmayabilir.

Althalka. R ve S birer halka olsunlar. R'nin S'nin altkümesi olduğunu varsayalım. Ayrıca her $r_1, r_2 \in R$ için, $r_1 + r_2$ ve r_1r_2 işlemlerinin sonucunun R'de ve S'de aynı sonuçları verdiğini varsayalım. Yani R'nin elemanları R'de de toplansa, S'de de toplansa aynı sonucu bulduğumuzu varsayalım. Daha matematiksel deyişle $+_R$ ve $\times_R$, R'deki toplama ve çarpma işlemlerini, $+_S$ ve $\times_S$, S'deki toplama ve çarpma işlemlerini simgeliyorsa, her $r_1, r_2 \in R$ için

$$r_1 +_R r_2 = r_1 +_S r_2 \text{ ve } r_1 \times_R r_2 = r_1 \times_S r_2$$

olsun. Ayrıca $1_R = 1_S$ olsun. O zaman R'ye S'nin ***althalkası*** adı verilir. Bu durumda $R \leq S$ yazarız.

Örneğin $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$'in bir althalkasıdır: $\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$. Ama $\mathbb{Z} \times \{0\}$ halkası $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ halkasının bir althalkası değildir. İşlemlerle ilgili koşullar sağlanmasına karşın, iki halkanın birim elemanları aynı değildir. Kolayca kanıtlanacağı üzere, eğer $R \leq S$ ise, $0_R = 0_S$ olur. Elbette $\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q} \leq \mathbb{R}$ ve her R halkası için $R \leq R[X] \leq R[X, Y]$. Ama $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$'nin bir althalkası değildir. Eğer $n \neq m$ ise $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$'nin hiçbir zaman bir althalkası olamaz!

$R \leq S$ ve $r, r' \in R$ olsun. r elemanı r' elemanını R'de bölmeyebilir, ama S'de bölebilir. Örneğin 2, 5'i $\mathbb{Z}$'de bölmez ama $\mathbb{Q}$'de böler. Ya da R'de tersinir olmayan bir eleman S'de tersinir olabilir. Örneğin 2, $\mathbb{Z}$'de tersinir değildir ama $\mathbb{Q}$'de tersinirdir. Bir başka deyişle tersinir olmak, bölmek gibi kavramlar ve tanımlayacağımız daha birçok kavram mutlak kavramlar değildir, içinde bulunduğumuz halkaya göre değişirler. Bu yüzden hangi halkada düşündüğümüzü belirtmek için, karışıklık olmasın diye, "R'de böler", "R'de tersinirdir" denir.

Sıfırbölenler. Bir halkada, bir $y \neq 0$ için $xy = 0$ eşitliği sağlanabiliyorsa, o zaman halkanın x elemanına ***sıfırbölen*** adı verilir. 0 her zaman sıfırbölendir. Tersinir bir eleman asla sıfırbölen olamaz. Sıfır dışında sıfırböleni olmayan halkalara ***tamlık bölgesi*** adı vermiştik.

$\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ halkasının sıfırbölenleri 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10 elemanlarıdır. Genel olarak, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ halkasının sıfırbölenleri n'yle ortak böleni olan elemanlardır (diğerleri de tersinir elemanlardır.)

Sıfırbölenlerin toplamı sıfırbölen olmak zorunda değildir. Örneğin 2 ve 3 elemanları $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$'de sıfır bölendir, ama toplamı olan $2 + 3$, yani 5 bu halkada bir sıfırbölen değildir.

Sıfırbölen olmayan bir eleman sadeleştirmeye izin verir: Eğer a sıfırbölen değilse (yani $ax = 0$ olduğunda $x = 0$ oluyorsa) ve eğer $ab = ac$ ise, o zaman $b = c$ olur. Nitekim,

$$a(b - c) = ab - ac = 0$$

eşitliğinden, $b - c = 0$ ve $b = c$ elde edilir.

Alıştırmalar

6A.7.1. $(R \times S)^* = R^* \times S^*$ eşitliğini kanıtlayın. İki halkanın kartezyen çarpımının hiçbir zaman bir tamlık bölgesi olamayacağını kanıtlayın. $(\prod_I R_i) = \prod_I R_i^*$ eşitliğini kanıtlayın. Eğer I sonsuzsa,

$$\bigoplus_I R_i = \{r \in \prod_I R_i : \text{sadece sonlu sayıda } i \in I \text{ için } r(i) \neq 0\}$$

kümesi hiçbir zaman $\prod_I R_i$ halkasının bir althalkası olamaz, neden?

6A.7.2. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ halkasında ne zaman bir (a, b) elemanı bir (c, d) elemanını böler?

6A.7.3*. R ve S birer halka olsun. $(R \times S)[X]$ polinom halkasının elemanları

$$\Sigma_i\, (r_i, s_i)X^i$$

biçiminde yazılırlar. (Toplam sonlu olmak zorunda tabii ki, yoksa anlamsız bnir şey yazmış oluruz.) $R[X] \times S[X]$ halkasının elemanları da

$$(\Sigma_i r_i X^i,\ \Sigma_i s_i X^i)$$

biçiminde yazılır.

$$\varphi : (R \times S)[X] \to R[X] \times S[X]$$

fonksiyonu,

$$\varphi(\Sigma_i (r_i, s_i)X^i) = (\Sigma_i r_i X^i,\ \Sigma_i s_i X^i)$$

kuralıyla tanımlanmış fonksiyon olsun. φ'nin birebir ve örten olduğunu, birim elemanı birim elemana götürdüğünü ve toplama ve çarpmaya saygı duyduğunu, yani her $p, q \in (R \times S)[X]$ için,

$$\varphi(p + q) = \varphi(p) + \varphi(q)$$
$$\varphi(pq) = \varphi(p)\varphi(q)$$

eşitliklerini kanıtlayın.

6A.7.4. R bir halka olsun. $e \in R$, $e^2 = e$ eşitliğini sağlasın.

$$Re = \{re : r \in R\}$$

kümesinin toplama, çıkarma ve çarpma altında kapalı olduğunu kanıtlayın. Re'nin bir halka olduğunu kanıtlayın (e, bu halkanın birim elemanıdır.) $f = 1 - e$ olsun. $f^2 = f$ eşitliğini kanıtlayın. Dolayısıyla Rf de Re gibi bir halkadır. $R = Re + Rf$ ve $Re \cap Rf = \{0\}$ eşitliklerini kanıtlayın. Şimdi $\varphi : R \to Re \times Rf$ fonksiyonu $\varphi(r) = (re, rf)$ olarak tanımlansın. φ'nin birebir ve örten olduğunu, birim elemanı birim elemana götürdüğünü ve toplama ve çarpmaya saygı duyduğunu kanıtlayın.

6A.7.5. $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})[X]$ ve $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})[X]$ polinom halkalarının sıfırbölenlerini bulun.

6A.7.6. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ halkasının sıfırbölenlerinin n'yle ortak böleni olan elemanların sınıfları olduğunu kanıtlayın.

6A.7.7. Bir R halkasında, belli bir n doğal sayısı için, $x^n = 0$ eşitliğini sağlayan elemanlara ***sıfırkuvvetli*** denir. Sıfırkuvvetli elemanlar sıfırbölendir elbet. Sıfırkuvvetli elemanların toplamlarının da sıfırkuvvetli olduğunu kanıtlayın. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ halkasının sıfırkuvvetli elemanlarını bulun.

6A.7.8. R ve S birer halka olsun. $R \times S$ halkasının sıfırbölen ve sıfırkuvvetlilerini bulun.

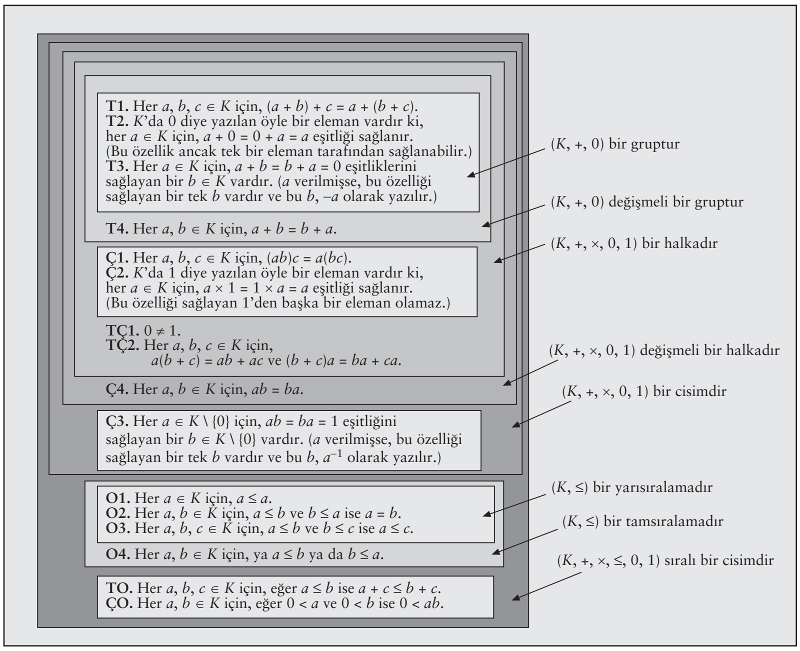
6A.7.9. $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})[X]$ polinom halkasının sıfırkuvvetlilerini bulun.

6A.8. Sıralı Halkalar ve Cisimler

Geçen bölümlerde ℤ ve ℚ halkalarında toplama ve çarpmayla uyumlu bir sıralama tanımlamıştık. ℤ ve ℚ halakalarına bu yüzden sıralı halka denir.

Bir halkanın ***sıralanabilir*** olması demek, o halka üzerinde TO ve CO'yu sağlayan (bkz. aşağıdaki şema) bir tamsıralamanın olması demektir. Bir sonraki sayfadaki şekildeki listedeki özelliklerin Ç4 dışında hepsini sağlayan bir $(R, +, \times, \leq, 0, 1)$ yapısına ***sıralı halka*** adı verilir. Eğer ayrıca Ç4 de sağlanıyorsa, yapıya ***sıralı cisim*** denir. İleride ℝ'yi sıralı bir cisim olarak inşa edeceğiz. İlginç bir sıralı halka örneği için Ek 3'ü boş zamanınızda okuyabilirsiniz.

Hangi halkaların sıralanabilir olduğu ve bir halkanın üstünde kaç değişik tamsıralamanın olduğu önemli bir sorudur. ℤ ve ℚ'nün üstünde tek bir tamsıralama olduğunu oldukça çabuk kanıtlayacağız.



Örnekler. Teoriye takılmadan önce birkaç sıralı halka örneği verelim. Her şeyden önce sıralı bir R halkasının her althalkası, R'nin sıralamasıyla birlikte sıralı bir halkadır. (Örneğin, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$'nün bir althalkasıdır. $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$'nin bir althalkasıdır.) Büyük halkanın sıralaması, bedavadan küçük halkanın bir sıralamasını verir. Eğer R sıralı bir halkaysa, $R[X]$ polinom kümesini çok değişik biçimde kolaylıkla sıralanabilir; bunun için R'nin hangi elemanlarının X'ten küçük (ya da büyük) olduğuna karar vermek yeterlidir; hatta dilenirse X, R'nn bütün elemanlarından daha büyük olabilir (sonsuz büyük), ya da R'nin her pozitif sayısından küçük olabilir (sonsuz küçük). Bu fikri Ek 3'te sömüreceğiz.

Sıralı bir R halkasında bir $\varepsilon > 0$ elemanı alalım. ε elemanını küçük bir eleman olarak düşünün. ε, 2ε, 3ε, 4ε, ... elemanları bir zaman sonra bütün elemanları aşar mı? Yani her $A \in R$ için, $n\varepsilon > A$ eşitsizliğini sağlayan bir n doğal sayısı var mıdır? $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ halkalarında bu sorunun yanıtı olumludur. Ama her halkada bu böyle değildir. Sorunun yanıtının olumlu olduğu halkalara ***Arşimet halkası*** denir.

Önsav 6A.6. $(R, +, \times, \leq, 0, 1)$ *sıralı bir halka olsun. Her* a, b, $c \in R$ *için,*

i. $a \leq b$ *ise* $-b \leq -a$ *ve* $0 \leq a$ ise $-a \leq 0$.
ii. $a < b$ *ise* $a + c < b + c$.
iii. $a \leq b$ *ve* $0 \leq c$ *ise* $ac \leq bc$.
iv. $-1 < 0$.
v. $0 < 1$.
vi. $a^2 \geq 0$
vii. *Karelerin toplamı negatif olamaz.*
viii. -1, *karelerin toplamı olarak yazılamaz.*
ix. $ab = 0$ *ise ya* $a = 0$ *ya da* $b = 0$ *olur. Yani* R *bir* ***bölge****dir.*
x. *Karelerin toplamının* 0 *etmesi için, karesi alınıp toplanan her elemanın* 0 *olması gerekir. Yani* ${r_1}^2 + \cdots + {r_n}^2 = 0$ *ise, her* i *için* $r_i = 0$ *olmalı.*

xi. *a'nın çarpımsal tersi* a^{-1} *varsa ve* $a > 0$ *ise*, $a^{-1} > 0$*'dır.*

xii. *Sonlu sayıda* 1*'in toplamı pozitiftir ve toplam* 0 *edemez., dolayısıyla sıralı bir halka sonsuz olmak zorundadır.*

Kanıt: i. $a \leq b$ eşitsizliğinin her iki tarafına $-a$ eklersek, TO'dan, $0 \leq b - a$ elde ederiz. Şimdi bu eşitsizliğin her iki tarafına $-b$ ekleyelim. İkincisi birincisinden çıkar.

ii. $a + c \geq b + c$ olsaydı c'leri sadeleştirerek $a \geq b$ elde ederdik.

iii. $a \leq b$ eşitsizliğinin her iki tarafına $-a$ eklersek, TO'dan, $0 \leq b - a$ elde ederiz. Şimdi ÇO'dan, $0 \leq c(b - a) = cb - ca$ elde ederiz. Bu elde ettiğimiz $0 \leq cb - ca$ eşitsizliğinin her iki tarafına ca eklersek $ca \leq cb$ elde ederiz, yani $ac \leq bc$.

iv. $0 < -1$ olsaydı, her iki tarafa da 1 ekleyerek, $1 < 0$ elde ederdik. Öte yandan, $0 < -1$ eşitsizliği ÇO'dan dolayı $0 \leq (-1)(-1) = 1$ eşitsizliğini verir, çelişki.

v. Yukarda kanıtlanan $-1 < 0$ eşitsizliğinin her iki tarafına da 1 ekleyelim.

vi. Eğer $a \leq 0$ ise, $0 \leq -a$. Buradan ve ÇO'dan,

$$0 \leq (-a)(-a) = a^2$$

çıkar. Eğer $a \geq 0$ ise, doğrudan ÇO'dan $a^2 \geq 0$ elde ederiz.

vii ve viii. vi, iv'ten ve TO'dan çıkar.

ix. a ve b'nin 0 olmadıklarını varsayalım. i'e göre, ya a ya da $-a$ pozitiftir. Ve aynı şey b için de geçerlidir. Dolayısıyla $(\pm a)(\pm b)$, yani $\pm ab$ sayılarından biri pozitif olmak zorundadır. Demek ki $ab \neq 0$.

x. n, $r_i \neq 0$ olmak üzere, $r_1^2 + \cdots + r_n^2 = 0$ eşitliğinin sağlandığı en küçük pozitif doğal sayı olsun. Her i için $r_i \neq 0$ olmalı. Basit bir hesap yapalım:

$$r_1^2 + \cdots + r_{n-1}^2 = -r_n^2.$$

i, vi ve vii'den dolayı, $r_n^2 = 0$ olmalı. ix'dan dolayı $r_n = 0$. Bu bir çelişkidir.

xi. $a^{-1} < 0$ ise o zaman $-a^{-1} > 0$ ve iii'ten dolayı,

$$-1 = (-a^{-1})a > 0$$

ve bu da iv'le çelişir.

xii. Halkada n tane 1'in toplamına (sanki tamsayıymış gibi) n diyelim. ii ve v sayesinde, tümevarımla, $0 < n < n + 1$ eşitsizliği kanıtlanabilir. Geri kalan her şey bundan çıkar. □

Sonuç 6A.7. *$\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$ halkaları üzerine tek bir sıralama vardır.*

Kanıt: $\mathbb{Z}$ üzerine tek bir sıralama olduğu yukardaki önsavdan kolaylıkla çıkar. $\mathbb{Q}$ cismi üzerine bir $\preccurlyeq$ sıralaması alalım. $\mathbb{Z}$ üzerine tek bir sıralama olduğundan, her $a, b \in \mathbb{Z}$ için,

$$a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a \le b.$$

Şimdi $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ olsun. $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ve $b, d > 0$ için, $\alpha = a/b$ ve $\beta = c/d$ olarak yazalım. $b, d \succ 0$ olduğu için,

$$\begin{aligned}\alpha \preccurlyeq \beta &\Leftrightarrow a/b \preccurlyeq c/d \Leftrightarrow ad \preccurlyeq bc \Leftrightarrow ad \le bc\\ &\Leftrightarrow a/b \le c/d \Leftrightarrow \alpha \le \beta.\end{aligned}$$

İstediğimizi kanıtladık. □

Sonuç 6A.8. *Sıralı bir halka $\mathbb{Z}$'nin bir kopyasını içerir. Sıralı bir cisim ise $\mathbb{Q}$'nün bir kopyasını içerir.*

Kanıt: $i(0) = 0$ ve $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ise, $i(n)$, R'nin 1 elemanının kendisiyle n kez toplamı olsun. Yani $i(n) = n_R$ olsun. Önsav 6A.6.xii'nin kanıtına göre, $n \in \mathbb{N}$ için,

$$i(n) < i(n+1)$$

olur.

Eğer $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ ise,

$$i(n) = -i(-n)$$

olsun. i, $\mathbb{Z}$'den R'ye giden ve toplamaya ve çarpmaya saygı duyan bir birebir fonksiyondur. (Neden?) Sonuç 6A.7'ye göre, i, sıralamaya da saygı duyar. $i(\mathbb{Z})$, R'de $\mathbb{Z}$'nin bir kopyasıdır.

İkinci önerme birincisinden çıkar. □

Bu sonucu sağlayan halkalara ***karakteristiği* 0 *olan*** halkalar denir. Demek ki sıralı bir halkanın karakteristiği 0'dır.

Sıralı halkaların en başat özelliklerini kanıtladık. Şimdi hangi halkaların sıralanabileceği sorusuna eğilelim.

Önsav 6A.6.x'e göre, karelerin toplamı -1 olabilen halkalar sıralanamaz. Ve Önsav 6A.6.ix'a göre sıralanabilen halkalar bölgedirler. Peki, karelerin toplamı -1 olmayan bölgeler sıralanabilir mi? Bunu birazdan kanıtlayacağız. (Bu tür halkalara ***biçimsel gerçel*** ya da ***sıralanabilir halkalar*** denir.)

Pozitif Koni. R, sıralı bir halka olsun. P de R'nin pozitif elemanlarının kümesi olsun:

$$P = \{r \in R : r > 0\}.$$

P'ye ***pozitif koni*** adı verilir. Pozitif koni sıralamayı tamamıyla belirler, çünkü, elbette,

$$a < b \Leftrightarrow b - a \in P$$

önermesi doğrudur. P'nin çok bariz biçimde şu özellikleri vardır:

- $0 \notin P$,
- P toplama ve çarpma altında altında kapalıdır,
- P, 0 dışında tüm elemanların karelerini içerir.

Üstelik P, R'nin toplama altında kapalı olan ve 0'ı içermeyen en büyük altkümelerinden biridir, çünkü eğer P'den daha büyük bir Q altkümesi bu iki özelliği sağlasaydı, o zaman Q'de P'de olmayan bir a elemanı olurdu. $a \neq 0$ ve hatta $a < 0$ olmalıdır. O zaman $-a \in P \subseteq Q$ ve $0 = -a + a \in Q$ olur, çelişki.

Şimdi, eğer R bir bölgeyse, yukardaki üç özelliği sağlayan en büyük bir P altkümesinin olmasının R'nin sıralanacağı anlamına geldiğini göstereceğiz.

Teorem 6A.9. R, -1'*in karelerin toplamı olarak yazılamadığı bir bölge olsun.* P, R'*nin toplama ve çarpma altında kapalı,* 0'*ı* (*eleman olatak*) *içermeyen ama* R'*nin* 0 *dışındaki tüm karelerini içeren bir altkümesi olsun. Ayrıca* P, R'*nin bu koşulları sağlayan en büyük altkümesi olsun. O zaman,*

$$a \leq b \Leftrightarrow b - a \in P \text{ ya da } a = b$$

olarak tanımlanan $\leq$ *ikili ilişkisi* R'*yi sıralar.*

Kanıt: O1'in doğru olduğu çok belli. O2'yi kanıtlayalım. $a \le b$ ve $b \le a$ olsun ama $a \ne b$ olsun. O zaman, $\le$ ilişkisinin tanımına göre, $b - a$ ve $a - b$ elemanları P'dedir. Demek ki toplamları olan 0 da P'dedir. Çelişki. O3'ün doğruluğu P'nin toplama altında kapalı olmasından çıkar: $a = b$ ya da $b = c$ ise, sorun yok. Aksi taktirde, $b - a$ ve $c - b$ elemanları P'dedir. Bu iki elemanı toplarsak $c - a$ elemanının P'de olduğu, yani $a < c$ olduğu çıkar. TO'nun kanıtı çok kolay. ÇO'ya gelelim: Eğer $ab = 0$ ise sorun yok. Aksi taktirde a ve b elemanları P'de olduğundan, ab de P'dedir. Şimdi son olarak O4'ü kanıtlayalım. Aslında, O4,

$$R = P \cup \{0\} \cup (-P)$$

diyor. Bunu kanıtlamalıyız. Yani her $a \in R$,

$$a \in P,\ a = 0,\ -a \in P$$

koşullarından birini sağlamalıdır. Bir a elemanının bu koşullardan hiçbirini sağlamadığını varsayalım.

$$P' = P \cup \{0\}$$

ve

$$\begin{aligned} Q &= (P' + P'a) \setminus \{0\} \\ &= \{p_0 + p_1 a : p_0, p_1 \in P \cup \{0\}\} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

kümesini ele alalım. P' toplama altında kapalı olduğundan Q de toplama altında kapalıdır. Ayrıca, p_1'i 0'a eşit alarak, P'nin Q'nün altkümesi olduğu anlaşılır. Dahası, $p_0 = 0$ ve $p_1 = 1 = 1^2$ olarak alırsak, P'de olmayan a'nın Q de olduğunu görürüz. Demek ki Q, P'den daha büyük bir küme.

Q'nün çarpma altında da kapalı olduğunu iddia edip kanıtlıyorum. P' kümesinin çarpma altında kapalı olduğuna dikkatinizi çekerim. Q'den herhangi iki eleman alalım: $p_0 + p_1 a$ ve $p_2 + p_3 a$. Buradaki tüm p_i'ler P' kümesindeler. Şimdi,

$$(p_0 + p_1 a)(p_2 + p_3 a) = (p_0 p_2 + p_1 p_3 a^2) + (p_0 p_3 + p_1 p_2) a$$

çarpımına göz atalım. Bir bölgede olduğumuzdan çarpım 0 olamaz. Ayrıca, varsayıma göre, $a^2 \in P \subseteq P'$ olduğundan,

$$p_0 p_2 + p_1 p_3 a^2,\ p_0 p_3 + p_1 p_2 \in P'$$

olmalı. Demek ki $(p_0 + p_1 a)(p_2 + p_3 a) \in Q$.

Ama hani P, R'nin teoremde verilen koşulları sağlayan en büyük altkümesiydi? Bir çelişki. Teoremimiz kanıtlanmıştır. □

Aşağıdaki sonuç, [AKK] ders notlarında göreceğimiz Zorn Önsavı (ya da Seçim Aksiyomu) kullanılarak kanıtlanabilir. Bilgi olarak sunuyoruz. Kanıtın nasıl olabileceği bir önceki teoremden anlaşılması lazım.

Olgu 6A.10. *Bir bölgenin sıralanabilir olması için* -1'*in karelerin toplamı olmaması gerek ve yeter koşuldur.*

Alıştırmalar

Sıralı bir halkada çalışıyoruz.

1. Her a, b, c için, $a < b$ ve $0 > c$ ise $ac > bc$ olacağını kanıtlayın.

2. Eğer $a \geq 0$ ise, $|a| = a$ olsun ve eğer $a \leq 0$ ise, $|a| = -a$ olsun. $|a|$ elemanına a'nın ***mutlak değeri*** adı verilir. Her a ve b için

$$|a| \cdot |b| = |ab|,$$
$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

ve

$$|a - b| \geq ||a| - |b||$$

önermelerini kanıtlayın.

3. $d(a, b) = |a - b|$ olsun. Her x, y, z için aşağıdaki önermeleri kanıtlayın:

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$
$$d(x, y) = d(y, x),$$
$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, x).$$

Yani (R, d) bir ***metrik uzay***dır.

4. [Topoloji bilenlere] Sıralı bir R halkasında, yukardaki metrikle, $R \times R$'den R'ye giden

$$(a, b) \mapsto a - b \text{ ve } (a, b) \mapsto ab$$

fonksiyonlarının sürekli olduğunu kanıtlayın. Demek ki R, topolojik bir halkadır. Topolojik bir halkada topolojinin verdiği yakınsaklık kavramı vardır. Kesirli sayılarda ve (gelecekte inşa edeceğimiz) $\mathbb{R}$'de tanımlanan (ve tanımlayacağımız) yakınsaklık kavramı, aynen topolojik uzaylarda tanımlanan yakınsaklıktır. Bir cismin Arşimet cismi olması için yeter ve gerek koşul, $(1/n)_{n\,=\,1,2,3,...}$ dizisinin limitinin olmasıdır (o zaman bu limit zorunlu olarak 0 olur.) Bütün bunları kanıtlayın.