6. Kesirli Sayılar Kümesi $\mathbb{Q}$

Giriş

Bir önceki uzun bölümde tamsayılar halkası $\mathbb{Z}$'yi matematiksel olarak tanımlayıp var etmiştik.

Tamsayılarda, doğal sayılarda da yapılan toplama ve çarpma işlemleri yapıldığı gibi, bunlara ek olarak bir de çıkarma işlemi yapılabilir. Bunu biliyoruz. Zaten tamsayıları sadece çıkarma yapabilelim diye özellikle yaratmıştık/icat etmiştik/keşfetmiştik/tanımlamıştık. (Tam ne yaptığımız felsefi bakış açısına göre değişir.)

Tamsayılarda toplama, çıkarma ve çarpma işlemleri yapılabilir ama bölme yapılamaz, örneğin tamsayılarda 2, 3'e bölünmez, bölme yapabilmek için kesirli sayılara geçmek zorundayız.

Ama kesirli sayıları bugüne dek soyut matematiksel kavramlar olarak tanımlamadık. Bu eksiğimizi giderme zamanı geldi.

Bu bölümde kesirli sayıları matematiksel anlamda var edeceğiz. Bunu tamsayıları kabullenerek yapacağız. Yani tamsayıları ve tamsayılarda tanımlanmış olan toplama, çıkarma ve çarpmanın temel özelliklerini bildiğimizi varsayıp, ki biliyoruz, kesirli sayılar kümesini tanımlayacağız. Ardından kesirli sayılar kümesi üzerine, adına toplama, çıkarma, çarpma ve bölme diyeceğimiz dört işlem tanımlayacağız. Bunlara ek olarak bir de kesirli sayılar üzerinde bir sıralama tanımlayacağız.

Kullanacağımız yöntem sadece tamsayılara değil, başka halkalara da uygulanabileceğinden, kitabın sonundaki Ek 1'de çok daha genel bir yöntem göstereceğiz. O bölümde sadece tamsayılarla değil, birçok bakımdan tamsayıları andıran genel bazı matematiksel yapılarla uğraşacağız. Ama yapacağımız konusunda daha iyi bir fikir edinmesi için, bu aşamada böyle bir genellemeye ve soyutlamaya girmemeyi tercih ediyoruz.

6.1. Kesirli Sayılar Kümesi

Bir an için kesirli sayıları bildiğimizi varsayalım! Zaten sezgisel olarak kesirli sayıları biliyoruz. Bunlar, 2/3 gibi, –9/6 gibi ya da 5/1 gibi sayılardır. İlkokuldan beri bildiğimiz üzere, her kesirli sayı, *a* ve *b* tamsayıları için *a*/*b* biçiminde yazılır.

a ve *b* tamsayıları var elimizde ama *a*/*b* diye bir sayı yok henüz. *a* ve *b* tamsayılarından yola çıkarak, matematiksel yöntemlerle *a*/*b* diye matematiksel bir nesne yaratacağız. Tamsayılarda "*a* bölü *b*" diye bir kavram olmadığından, tanımı "*a*/*b*, *a* bölü *b* olsun" şeklinde veremeyiz. Biraz daha özen göstermeliyiz.

Bir an için, *a*/*b*'yi (*a*, *b*) çifti olarak tanımlayalım. Ama o zaman, 2/3 = 4/6 eşitliğinden dolayı,

$$(2, 3) = (4, 6)$$

eşitliği doğru olmalı, ki bu son eşitliğin doğru olmadığını biliyoruz.

Madem ki (2, 3) çifti (4, 6) çiftine eşit olmalı ama maalesef değil, o zaman biz de "eşit olmalı" yerine "denk olsunlar" deriz...

$$(2, 3), (4, 6), (6, 9), (-2, -3)$$

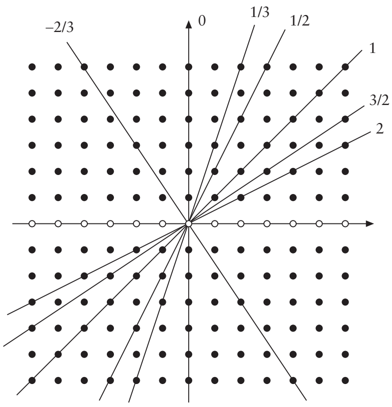
gibi tamsayı çiftlerine birazdan "denk" diyeceğiz.

Aşağıdaki şekilde her doğrunun üstünde yer alan noktalar birbirlerine "denk"tir. Örneğin, birazdan tanımı verdiğimizde,

$$(1, 2), (2, 4), (3, 6), (-1, -2), (-2, -4)$$

çiftlerinden her biri diğerlerine denk olacaklar.

İlerde bu doğruların üstündeki noktalardan oluşan kümelerin her biri kesirli bir sayı olacak.



Yalnız, bir şeye dikkat etmek gerekiyor: a/b kesirli sayısında, $b \neq 0$ olduğundan, b'nin 0'dan değişik olduğu (a, b) çiftleriyle çalışmalıyız.

Matematiksel tanıma giden sürece girelim. İkinci koordinatı 0 olmayan tamsayı çiftleri arasında şöyle bir ikili ilişki tanımlamak istiyoruz:

$$(a, b) \equiv (c, d) \Leftrightarrow a/b = c/d.$$

Ama sağ taraftaki eşitlik, "a bölü b" gibi kesirli sayıların varlığını varsayıyor. Henüz varolmayan bir şeyden sözedemeyiz. Buna da bir çözüm bulmalıyız. "$a/b = c/d$" eşitliğini kesirli sayılardan sözetmeden ifade etmeliyiz. Bu çok kolay:

$$a/b = c/d \Leftrightarrow ad = bc.$$

Demek ki ikinci koordinatı 0 olmayan tamsayı çiftleri arasında, $\equiv$ simgesiyle göstereceğimiz ikili ilişkiyi

$$(a, b) \equiv (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$$

olarak tanımlayabiliriz.

Tanım. $X = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ *olsun. X üzerine* $\equiv$ *ikili ilişkisini, her* $(a, b), (c, d) \in X$ *için,*

$$(a, b) \equiv (c, d) \Leftrightarrow ad = bc.$$

olarak tanımlayalım.

Örneğin, verilmiş bir $b \neq 0$ için,

$$(0, b) \equiv (c, d) \Leftrightarrow c = 0.$$
$$(b, b) \equiv (c, d) \Leftrightarrow c = d.$$

(Ve tabii bir de d'nin 0 olmaması gerekir.) Ayrıca her $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ için,

$$(a, b) \equiv (ax, bx) \text{ ve } (0, 1) \equiv (0, x)$$

Önsav 6.1. *$\equiv$ ilişkisi X kümesi üzerine bir denklik ilişkisidir. Yani, her (a, b), (c, d), $(e, f) \in X$ için,*

i. $(a, b) \equiv (a, b)$.

ii. $(a, b) \equiv (c, d)$ *ise* $(c, d) \equiv (a, b)$.

iii. $(a, b) \equiv (c, d)$ *ve* $(c, d) \equiv (e, f)$ *ise* $(a, b) \equiv (e, f)$.

Kanıt: Bu ifadeleri kanıtlamak için, $\equiv$ ilişkisinin tanımına ve tamsayıların kanıtladığımız (ya da bildiğimiz ya da kolaylıkla kanıtlayabileceğimiz) özelliklerine başvurmak gerekiyor.

i. Tanıma bakılırsa, $(a, b) \equiv (a, b)$ ifadesi tam tamına, $ab = ba$ anlamına geliyor. Tamsayılar arasındaki bu eşitliği de Teorem 5.8'den biliyoruz. (Bundan sonra tamsayılarla ilgili önermeler için referans vermeyeceğiz. Bunlar ya önceki sayfalarda kanıtlanmışlardır ya da kolaylıkla kanıtlanabilirler.)

ii. Çok kolay.

iii. $(a, b) \equiv (c, d)$ *ve* $(c, d) \equiv (e, f)$ denklikleri

$$ad = bc$$

ve

$$cf = de$$

anlamına gelir. Bu eşitlikleri kullanarak, $(a, b) \equiv (e, f)$ denkliğini, yani $af = be$ eşitliğini kanıtlamamız gerekiyor. Bildiğimiz iki eşitliği altalta yazıp çarpalım:

$$\begin{array}{c} ad = bc \\ \underline{\;cf = de\;} \\ adcf = bcde \end{array}$$

elde ederiz. Çiftlerin ikinci koordinatları 0 olmadığından, $d \neq 0$. Dolayısıyla her iki taraftan da d'leri sadeleştirip $acf = bce$ eşitliğini elde ederiz. Şimdi c'leri sadeleştirmek kaldı. Eğer $c \neq 0$ ise sorun yok, bu sadeleştirmeyi yapabiliriz ve istediğimiz $af = be$ eşitliğini elde ederiz. Bundan böyle $c = 0$ eşitliğini varsayalım. Bu durumda, $ad = bc$ ve $cf = de$ eşitliklerinden $ad = 0 = de$ elde ederiz. $d \neq 0$ olduğundan, bu eşitliklerden, $a = 0 = e$ elde ederiz. Demek ki hem $af = 0$ hem de $be = 0$, yani $af = be$. İstediğimizi kanıtladık. □

Bu önsavdan sonra denklik sınıflarından ve $X/\equiv$ bölüm kümesinden sözedebiliriz. Bunların ne olduklarını anımsatalım. $(a, b) \in X$ için, (a, b)'nin denklik sınıfını $[(a, b)]$ olarak değil, daha basit bir yazılımla, $[a, b]$ olarak göstereceğiz:

$$[a, b] = \{(x, y) \in X : ay = bx\}.$$

Bu arada, sık sık kullanılacak olan,

$$[a, b] = [c, d] \Leftrightarrow ad = bc$$

eşitliği de unutulmamalıdır. Dikkat ederseniz, her $x \in X$ için, $[x]$, X'in bir altkümesidir. Bölüm kümesini de anımsatalım:

$$X/\equiv\ = \{[x] : x \in X\}.$$

Şimdi kesirli sayılar kümesinin tanımını verebiliriz.

Tanım. $\mathbb{Q} = X/\equiv$.

Bundan böyle, her $a \in \mathbb{Z}$ ve her $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ için, $[a, b]$ denklik sınıfına ***kesirli sayı*** diyeceğiz. $\mathbb{Q}$ da elbette ***kesirli sayılar kümesi*** olacak.

İlerde, $[a, b]$ sınıfı bildiğimiz a/b kesirli sayısı anlamına gelecek.

Kesirli sayılar kümesini tanımladıktan sonra, sıra, kesirli sayılarla toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerini tanımlamaya geldi. Bunlara ek olarak bir de sıralamayı tanımlamalıyız.

Kanıtların birçoğunu okura bırakacağız. Okur $(\mathbb{Z}, +, \times, \leq)$ ile ilgili her şeyi bildiğini varsayabilir.

Toplamayla çıkarmadan başlayalım.

6.2. Toplama ve Çıkarma

$[a, b]$ ve $[c, d]$ kesirli sayılarını ele alalım. Bu iki kesirli sayıyı toplayacağız. $[a, b]$'nin a/b, $[c, d]$'nin c/d anlamına geldiğini biliyoruz. İlkokulda öğrendiğimiz kesirli sayı toplamasına göre,

$$a/b + c/d = (ad + bc)/bd$$

olmalı. Demek ki, $[a, b]$ ve $[c, d]$ kesirli sayılarının toplamını $[ad + bc, bd]$ olarak tanımlamalıyız:

$$[a, b] + [c, d] = [ad + bc, bd].$$

Tabii daha önce bu tanımın geçerli bir tanım olduğunu kanıtlamalıyız. Her şeyden önce, eğer (a, b) ve $(c, d) \in X$ ise,

$$(ad + bc, bd) \in X$$

olmalı; yani eğer b ve d, 0'a eşit değillerse, bd de 0'a eşit olmamalı. Ama bunu Alıştırma 5.7.1'den biliyoruz.

Tanımın geçerli olması için, bunun dışında bir de şu kanıtlanmalı: Eğer

$$[a, b] = [a', b'] \text{ ve } [c, d] = [c', d']$$

ise, yani $ab' = ba'$ ve $cd' = dc'$ ise,

$$[a, b] + [c, d] = [a', b'] + [c', d']$$

eşitliği geçerli olmalı, yani,

$$[ad + bc, bd] = [a'd' + b'c', b'd']$$

olmalı, yani,

$$(ad + bc, bd) \equiv (a'd' + b'c', b'd')$$

olmalı, yani,

$$(ad + bc)b'd' = bd(a'd' + b'c')$$

olmalı, ki birbirine eşit kesirli sayıların toplamı birbirine eşit olsun... Demek ki kanıtlamamız gereken önsav şu:

Önsav 6.2. *Her $a, c, a', c' \in \mathbb{Z}$ ve $b, d, b', d' \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ için,*

$$ab' = ba' \text{ ve } cd' = dc'$$

ise,

$$(ad + bc)b'd' = bd(a'd' + b'c').$$

Son derece basit olan bu önsavın kanıtını okura bırakıyoruz.

Bu önsav sayesinde toplamayı,

$$[a, b] + [c, d] = [ad + bc, bd]$$

olarak tanımlayabiliriz. Şimdi toplamanın en temel özelliklerini kanıtlamalıyız. Örneğin, ilerde 0 olarak yazacağımız [0, 1] kesirli sayısı toplamanın etkisiz elemanı olmalı, yani, her $\alpha \in \mathbb{Q}$ için,

$$\alpha + [0, 1] = [0, 1] + \alpha = \alpha$$

olmalı. İlerde a/b anlamına gelecek olan $[a, b]$ elemanının ***toplamsal tersi***, ilerde $-a/b$ anlamına gelecek olan $[-a, b]$ elemanı olmalı, yani

$$[a, b] + [-a, b] = [0, 1]$$

olmalı.

Önsav 6.3. i. *Her* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ *için*, $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.

ii. [0, 1] *toplamanın* ***etkisiz eleman****ıdır*, *yani her* $\alpha \in \mathbb{Q}$ *için*,

$$\alpha + [0, 1] = [0, 1] + \alpha = \alpha.$$

iii. *Her* $\alpha \in \mathbb{Q}$ *için*, $\alpha + \alpha' = \alpha' + \alpha = [0, 1]$

eşitliğini sağlayan bir $\alpha' \in \mathbb{Q}$ *vardır*. *Eğer* $\alpha = [a, b]$ *ise*

$$\alpha' = [-a, b]$$

olmak zorundadır.

iv. *Her* $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ *için*, $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

Kolay kanıtı okura bırakıyoruz. Demek ki, $(\mathbb{Q}, +, [0, 1])$ yapısı abelyen bir grup, aynen

$$(\mathbb{Z}, +, 0)$$

yapısı gibi.

$\alpha \in \mathbb{Q}$ verildiğinde, Önsav 6.3.iii'teki α' elemanı biriciktir, nitekim,

$$\alpha + \alpha' = \alpha'' + \alpha = [0, 1]$$

ise, Önsav 6.3.i ve ii'den dolayı,

$$\begin{aligned}\alpha' &= [0, 1] + \alpha' = (\alpha'' + \alpha) + \alpha' \\ &= \alpha'' + (\alpha + \alpha') = \alpha'' + [0, 1] = \alpha''\end{aligned}$$

olur.

Önsav 6.3.iii'te varlığı söylenen ve biraz önce biricik olduğunu kanıtladığımız eleman α' olarak değil de $-\alpha$ olarak yazılır ve adına α'nın ***toplamsal tersi*** denir. Önsav 6.3.ii'ye bakınca, α', α'nın toplamsal tersiyse, α'nın da α' elemanının toplamsal tersi olduğu görülür, çünkü

$$\alpha + \alpha' = \alpha' + \alpha = [0, 1]$$

eşitliği α ve α' elemanlarına göre simetrik. Demek ki α'nın toplamsal tersinin toplamsal tersi α'dır, bir başka deyişle,

$$-(-\alpha) = \alpha$$

olur. Bunu şöyle de görebiliriz: Önsav 6.3.iii'e göre $\alpha = [a, b]$ ise

$$-\alpha = [-a, b]$$

olur ve gene aynı nedenden,

$$-(-\alpha) = [-(-a), b] = [a, b] = \alpha$$

olur.

$$-[0, 1] = [0, 1]$$

eşitliği de kolay.

Kesirli sayılarda çıkarmayı tanımlayabiliriz: Her $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ için,

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$$

tanımını yapalım. $-\alpha \pm \beta$ eleman(lar)ını da $(-\alpha) + (\pm\beta)$ olarak tanımlayabiliriz. Bu tanımdan sonra,

$$-(-\alpha + \beta) = \alpha - \beta$$

gibi eşitlikleri kanıtlamak işten bile değildir.

6.3. Çarpma ve Bölme

Toplamadan sonra çarpmayı tanımlamalıyız. Bunun da nasıl yapılması gerektiği belli olmalı:

$[a, b]$ ve $[c, d]$ kesirli sayılarını ele alalım. Bu iki kesirli sayıyı çarpacağız. $[a, b]$'nin a/b, $[c, d]$'nin c/d anlamına geldiğini biliyoruz. İlkokulda öğrendiğimiz kesirli sayı çarpmasına göre,

$$a/b \times c/d = ac/bd$$

olmalı. Demek ki, $[a, b]$ ve $[c, d]$ kesirli sayılarının çarpımını

$[ac, bd]$ olarak tanımlamalıyız:

$$[a, b][c, d] = [ac, bd].$$

$bd \neq 0$ olmadığından, ikinci koordinatta sorun yaşamıyoruz.

Gene her zamanki gibi bu tanımın gerçek bir tanım olduğu kanıtlanmalı. Yani şu önerme kanıtlanmalı:

$(a, b) \equiv (a', b')$ ve $(c, d) \equiv (c', d')$ ise, o zaman $(ac, bd) \equiv (a'c', b'd')$ olur.

Bunun kanıtı çok basittir ve okura bırakılmıştır. Böylece kesirli sayıları çarpabiliriz. Tanımın hemen ardından çarpmanın tahmin edilen özellikleri kanıtlanmalı.

Önsav 6.4. i. *Her* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ *için,*

$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma).$$

ii. $[1, 1]$ *çarpmanın* ***etkisiz eleman****dır, yani her* $\alpha \in \mathbb{Q}$ *için,*

$$\alpha[1, 1] = [1, 1]\alpha = \alpha.$$

iii. $[1, 1] \neq [0, 1]$.

iv. *Her* $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ *için,* $\alpha\beta = \beta\alpha$.

Bu özelliklerin aynılarının $\mathbb{Z}$ ve çarpma için de geçerli olduklarını gördük. Ama çarpmanın kesirli sayılara özgü özel bir özelliği var: $[0, 1]$ dışında her kesirli sayının çarpımsal tersi vardır:

Önsav 6.5. *Her* $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{[0, 1]\}$ *için,*

$$\alpha\alpha' = \alpha'\alpha = [1, 1]$$

eşitliğini sağlayan bir $\alpha' \in \mathbb{Q}$ *vardır. Eğer* $\alpha = [a, b]$ *ise*

$$\alpha' = [b, a]$$

olmak zorundadır.

Önsav 6.4 ve 6.5'in kanıtlamayı okura bırakıyoruz.

Önsav 6.5'in ikinci kısmı ilerde, a/b'nin çarpımsal tersinin b/a anlamına geldiğini söyleyecek. Laf açılmışken,

$$[a, b] = [a, 1][1, b]$$

eşitliğinin ilerde önem kazanacağını, $[a, b]$ kesirli sayısını a/b olarak yazmamızı sağlayacağını söyleyelim.

$\alpha \in \mathbb{Q}$ verildiğinde, Önsav 5'teki α' elemanı biriciktir, nitekim,

$$\alpha\alpha' = \alpha''\alpha = [1, 1]$$

ise, Önsav 6.4.i ve ii'den dolayı,

$$\alpha' = [1, 1]\alpha' = (\alpha''\alpha)\alpha' = \alpha''(\alpha\alpha') = \alpha''[1, 1] = \alpha''$$

olur. Bu eleman α' olarak değil de α^{-1} olarak yazılır ve adına α'nın ***çarpımsal tersi*** denir. Önsav 6.3.ii'ye bakınca, α', α'nın çarpımsal tersiyse, α'nın da α' elemanının çarpımsal tersi olduğu görülür, çünkü

$$\alpha\alpha' = \alpha'\alpha = [1, 1]$$

eşitliği α ve α' elemanlarına göre simetriktir. Demek ki α'nın çarpımsal tersinin çarpımsal tersi α'dır, bir başka deyişle,

$$(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$$

olur. Bu eşitliği Önsav 6.5'in ikinci yarısına bakınca da görürsünüz: $([a, b]^{-1})^{-1} = [b, a]^{-1} = [a, b]$.

Bu aşamada kolaylıkla bölmeyi tanımlayabiliriz. Eğer $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ ise ve $\beta \neq [0, 1]$ ise, "α bölü β"yı $\alpha\beta^{-1}$ olarak tanımlayalım.

Bir de çarpmanın toplamaya göre dağıldığını kanıtlamak gerekiyor.

Önsav 6.6. *Her* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ *için,*

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

Bunun da kanıtını okura bırakıyoruz. Her zaman olduğu gibi $\mathbb{Q}$'de toplama ve çarpmanın tanımlarına ve bu işlemlerin $\mathbb{Z}$'de bilinen özelliklerine inmek gerekir.

Önsav 3, 4, 5, 6'daki özellikleri sağlayan bir yapıya ***cisim*** denir. Demek ki $(\mathbb{Q}, +, \times, [0, 1], [1, 1])$ yapısı bir cisimdir.

Alıştırmalar

6.3.1. $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ için, $\alpha\beta = [0, 1]$ ise, ya $\alpha = [0, 1]$ ya da $\beta = [0, 1]$ eşitliklerinden birinin doğru olması gerektiğini kanıtlayın.

6.3.2. Her $\alpha \in \mathbb{Q}$ için, $\alpha + \alpha = [2, 1]\alpha$ eşitliğini kanıtlayın.

6.3.3. Her $\alpha \in \mathbb{Q}$ için, $-\alpha = [-1, 1]\alpha$ eşitliğini kanıtlayın.

6.4. Sıralama

Sıra sıralamaya geldi... Bilindiği gibi,

$$a/b \leq c/d \Leftrightarrow ad \leq bc$$

önermesi doğru **değildir**, bunun doğru olması için b ve d'nin pozitif olmaları gerekir. Eğer doğru olsaydı kesirli sayılarda eşitsizliği

$$[a, b] \leq [c, d] \Leftrightarrow ad \leq bc$$

olarak tanımlardık. Bu sorunu çözmek kolay:

$$[a, b] = [-a, -b]$$

eşitliği doğru olduğundan, bir $[a, b]$ kesirli sayının b "koordinatını" (ya da paydasını!) her zaman pozitif seçebiliriz. Şöyle bir yöntem izleyelim: $b \in \mathbb{Z}$ için, ε_b, b'nin işareti olsun, yani,

$$\varepsilon_b = \begin{cases} 1 & \text{eğer } b > 0 \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } b = 0 \text{ ise} \\ -1 & \text{eğer } b < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olsun. Her u, v in Z için, $\varepsilon_{uv} = \varepsilon_u\varepsilon_v$ eşitliğine dikkatinizi çekeriz. Ayrıca her $[a, b] \in \mathbb{Z}$ için,

$$[a, b] = [\varepsilon_b a, \varepsilon_b b]$$

ve $\varepsilon_b b > 0$ olur. Şimdi artık eşitsizliğin tanımını verebiliriz:

$$[a, b] \leq [c, d] \Leftrightarrow \varepsilon_d ad \leq \varepsilon_b bc.$$

Daha tanım tamamlanmadı ama. Tanımın geçerli olması için kanıtlanması gereken bir şey daha var. Önerilen tanımın geçerli bir tanım olması için, sağ taraftaki koşulun a, b, c ve d'ye göre değil, $[a, b]$ ve $[c, d]$ göre değişmesi gerekir. Yani şu önsav kanıtlanmalı.

Önsav 6.7. *Her $a, c, a', c' \in \mathbb{Z}$ ve $b, d, b', d' \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ için, eğer $[a, b] = [a', b']$ ve $[c, d] = [c', d']$ ise, o zaman,*

$$\varepsilon_d ad \leq \varepsilon_b bc \Leftrightarrow \varepsilon_{d'} a'd' \leq \varepsilon_{b'} b'c'.$$

Kanıt: $\varepsilon_d ad \leq \varepsilon_b bc$ eşitsizliğini varsayıp $\varepsilon_{d'} a'd' \leq \varepsilon_{b'} b'c'$ eşitsizliğini kanıtlamak yeterli. $\varepsilon_d d$ yerine d yazarsak ve benzer değişimi $\varepsilon_b b$, $\varepsilon_{d'} d'$ ve $\varepsilon_{b'} b'$ için yaparsak, $\varepsilon_b = \varepsilon_{d'} = \varepsilon_{d'} = \varepsilon_{b'} = 1$ eşitliklerini ve b, d, b' ve d' tamsayılarının pozitif olduklarını varsayabiliriz. Böylece varsayımlarımız

$$ab' = ba',\ cd' = c'd,\ ad \leq bc$$

şeklini alır. Eşitsizliğin iki tarafını da $b'd'$ ile çarparsak,

$$adb'd' \leq bcb'd'$$

elde ederiz. Soldaki ab' ve sağdaki cd' yerine ba' ve $c'd$ koyarsak,

$$a'dbd' \leq bc'b'd$$

elde ederiz. Şimdi bu eşitsizlikte b ve d'yi sadeleştirirsek istediğimizi elde ederiz. □

Yukardaki önsav, $\mathbb{Q}$ kümesi üzerine, $\leq$ ikili ilişkisinin

$$[a, b] \leq [c, d] \Leftrightarrow \varepsilon_d ad \leq \varepsilon_b bc.$$

koşuluyla tanımlanabileceğini gösterir. Şimdi bu ikili ilişkinin ***yoğun*** bir tamsıralama olduğunu kanıtlamak gerekiyor.

Önsav 6.8. *Her* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ *için,*

i. $\alpha \leq \alpha$.

ii. $\alpha \leq \beta$ *ve* $\beta \leq \alpha$ *ise* $\alpha = \beta$.

iii. $\alpha \leq \beta$ *ve* $\beta \leq \gamma$ *ise* $\alpha = \gamma$.

iv. *Ya* $\alpha \leq \beta$ *ya da* $\beta \leq \alpha$.

v. *Eğer* $\alpha < \beta$ *ise* $\alpha \leq \delta \leq \beta$ *eşitsizliklerini sağlayan bir* $\delta \in \mathbb{Q}$ *vardır. Eğer* $\alpha = [a, b]$ ve $\beta = [c, d]$ *ise*, $\delta = [ad + bc, 2bd]$ *alınabilir.*

Bu önsavın kanıtı da çok kolaydır ve okura alıştırma olarak bırakılmıştır. v'teki "$\alpha < \beta$", $\alpha \leq \beta$ ve $\alpha \neq \beta$ anlamına gelmektedir elbette. Ayrıca gene v'teki $\delta = [ad + bc, 2bd]$, daha sonra $(\alpha + \beta)/2$ anlamına gelecektir. v özelliğini sağlayan bir tamsıralamaya ***yoğun tamsıralama*** adı verilir.

Toplamanın ve [0, 1]'den büyük her sayıyla çarpmanın sıralamayı koruduğunu kolaylıkla kanıtlayabiliriz.

Önsav 6.9. *Her* α, β, $\gamma \in \mathbb{Q}$ *için*,
i. $\alpha \le \beta$ *ise* $\alpha + \gamma \le \beta + \gamma$.
ii. $\alpha \le \beta$ ve $[0, 1] \le \gamma$ *ise* $\alpha\gamma \le \beta\gamma$.

Önsav 6.8.i, ii, iii, iv ve 6.9.i ve ii'yi sağlayan bir cisme ***sıralı cisim*** adı verilir.

Alıştırmalar

6.4.1. $(\mathbb{Q}, \le)$ sıralamasının ilk ve son elemanı olmadığını kanıtlayın.

6.4.2. Her $\alpha \in \mathbb{Q}$ için, $\alpha^2 \ge [0, 1]$ eşitsizliğini kanıtlayın.

6.4.3. Her α, $\beta \in \mathbb{Q}$ kesirli sayıları için, eğer $\alpha \le [0, 1]$ ve $\beta \le [0, 1]$ ise $\alpha\beta \ge [0, 1]$ olduğunu kanıtlayın.

6.4.4. Her $\alpha \in \mathbb{Q}$ için,
$$[0, 1] \le \alpha \le [1, 1] \Leftrightarrow \alpha^2 \le \alpha$$
önermesini kanıtlayın.

6.5. Gömme

İlkokuldan beri bildiğimiz gibi her tamsayı bir kesirli sayıdır, yani $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ ilişkisi geçerlidir. Oysa bu bölümde verdiğimiz tanımda $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$ arasında böyle bir ilişki yok. Hatta tam tersine bu iki küme kesişmiyor bile. Her kesirli sayıyı
$$X = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$$
kümesinin bir altkümesi olarak tanımladık ve bunların hiçbiri $\mathbb{Z}$'nin bir elemanı değil. Eski alışkanlıklarımıza dönebilmemiz için, $\mathbb{Z}$'yi $\mathbb{Q}$'nün bir altkümesi olmasını sağlamalıyız. Bunun için $\mathbb{Q}$'nün tanımını hafifçe değiştireceğiz.

Her a tamsayısı $a/1$'e eşit olduğundan, her a tamsayısını $[a, 1]$ olarak görmenin bir yolunu bulmalıyız. Bunu daha önce de kullandığımız kesip yapıştırma ya da özdeşleştirme yöntemiyle (bkz Altbölüm 5.15) yapacağız.

Önsav 6.10. *Her* $a \in \mathbb{Z}$ *için*, $\mathbb{Q}$*'nün* $i(a)$ *elemanı*,

$$i(a) = [a, 1] \in \mathbb{Q}$$

olarak tanımlanmış olsun. O zaman i, $\mathbb{Z}$*'den* $\mathbb{Q}$*'ye giden birebir bir fonksiyondur ve toplamaya, çarpmaya ve eşitsizliğe saygı duyar, yani her* $a, b \in \mathbb{Z}$ *için*,

i. $i(a + b) = i(a) + i(b)$

ii. $i(ab) = i(a)i(b)$

iii. $a \leq b$ *ise* $i(a) \leq i(b)$ *olur*.

Ayrıca, her $[a, b] \in \mathbb{Q}$ *için*, $[a, b] = i(a)i(b)^{-1}$ *eşitliği geçerlidir*.

Önsava göre, $(\mathbb{Z}, +, \times, \leq)$ matematiksel yapısıyla, $(i(\mathbb{Z}), +, \times, \leq)$ matematiksel yapısı arasında, elemanların adları dışında hiçbir fark yok. Birinde olan biten, i fonksiyonu sayesinde diğerine taşınabilir.

Bundan böyle, $\mathbb{Q}$'nün $i(\mathbb{Z})$ altkümesinin $i(a)$ elemanı yerine sadece a yazacağız. Bir başka deyişle, $i(\mathbb{Z})$ ile $\mathbb{Z}$'yi özdeşleştireceğiz. Böylece, yukarda kanıtlanan

$$[a, b] = i(a)i(b)^{-1}$$

eşitliği

$$[a, b] = ab^{-1}$$

şeklini alır. Böylece, ta ilkokuldan beri bildiğimiz,

$$\mathbb{Q} = \{ab^{-1} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$$

eşitliği geçerli olur. Bundan böyle her kesirli sayıyı $a \in \mathbb{Z}$ ve

$$b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

için, ab^{-1} olarak ya da a/b olarak yazabiliriz, aynen ilkokul öğretmenimizin öğrettiği gibi...

Teorem 6.11. $\mathbb{Q}$, *bir Arşimet cismidir, yani* $\mathbb{Q}$*'nün her* β *ve her pozitif* α *sayısı için*, $n\alpha > \beta$ *eşitsizliğini sağlayan bir* n *doğal sayısı vardır*.

Kanıt: Eğer $\beta \leq 0$ ise, $n = 1$ almak yeter. Bundan böyle $\beta > 0$ olsun. a yerine α/β alarak, β'nın 1'e eşit olduğunu varsayabiliriz. (Yani kanıtanacak eşitsizliğin her iki tarafını da β'ya bölelim.) m, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ için, $\alpha = m/n$ yazalım. O zaman,

$$n\alpha = n \times m/n = m \geq 1.$$

Dolayısıyla $(n + 1)\alpha = n\alpha + \alpha \geq 1 + \alpha > 1$. □

Kitabın sonundaki ekte yukardaki Arşimet özelliğini sağlamayan sıralı cisimler de göreceğiz.

Bundan böyle kesirli sayılarla ilgili basit tüm özellikleri bildiğimizi varsayacağız. Örneğin, ***mutlak değer*** fonksiyonunu ve özelliklerini bildiğimizi varsayacağız: $|x| = \max\{x, -x\}$. Mutlak değerin önemli özellikleri şunlardır: Her x, $y \in \mathbb{Q}$ için

$$|x| \geq 0,$$
$$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$
$$|x| = |-x|,$$
$$|xy| = |x||y|$$

ve ***üçgen eşitsizliği*** olarak bilinen

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Ders notlarının en heyecansız bölümünü bitirdiğiniz için sizi kutlarım. Ek 1 daha heyecanlı, Ek 2 çok çok daha heyecanlı. Ama belki bu ekleri bir sonraki bölümü okuduktan sonra okumalısınız.