İkinci Kısım:

Tamsayılar Halkası
ve
Kesirli Sayılar Cismi

5A. Sayıları Yaratmak

Geçen kısımda boşkümeden, yani hiç yoktan (!) yola çıkarak 0, 1, 2, 3, 4 gibi sayıları içeren doğal sayılar kümesini yarattık. Sadece doğal sayıları değil, doğal sayılarda toplama ve çarpma işlemlerini ve bildiğimiz "küçükeşittir" sıralamasını da yarattık. Sonra da, doğal sayılarla ilgili

$$2 + 2 = 2 \times 2 = 4,$$
$$x + y = y + x,$$
$$xy = yx,$$
$$x(y + z) = xy + xz$$

gibi "bilinen" eşitlikleri ve

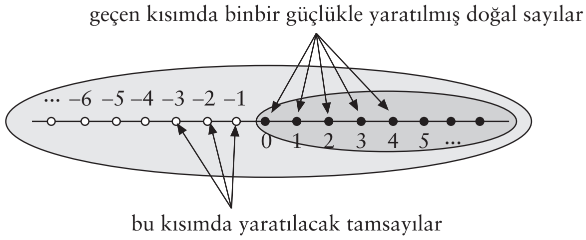
$$2 \leq 4,$$
$$x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$$

gibi en temel önermeleri kanıtladık.

Yukarda, "boşkümeden yani hiç yoktan" yola çıktık dedim ama bu pek doğru değil, doğal sayıları yaratmak için boşkümenin varlığı da dahil olmak üzere, çok değil, yedi "doğal", yani aklı başında herhangi birinin doğruluğundan en küçük bir kuşku duymayacağı aksiyomdan yararlanmıştık (Bölüm 2A). Kimsenin o aksiyomları görüp de saçını başını yolacağını sanmıyorum; kanıtlamadan kabul ettiğimiz bu aksiyomların her biri diğerinden doğaldı, her biri "bu da doğru değilse ne doğrudur" dedirtecek türden önermelerdi.

Doğal sayılar iyi hoş da, doğal sayılarda çıkarma yapılmaz. 5'ten 3'ü çıkarmak neyse de, doğal sayılarda 3'ten 5'i çıkaramayız, çünkü –2 bir doğal sayı değildir.

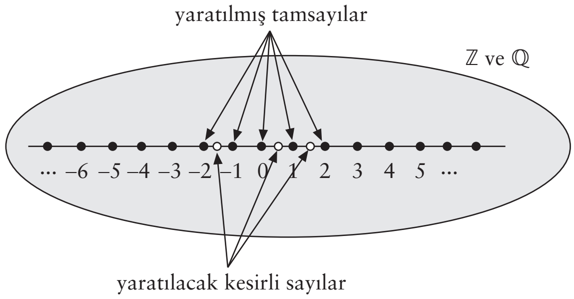
Bu bölümde, doğal sayıları çantada keklik kabul ederek, –3, –2, –1, 0, 1, 2 gibi tamsayıları, yani ℤ kümesini matematiksel olarak yaratacağız. Bu sayılarda toplamayı, çarpmayı ve sıralamayı, bir de ayrıca doğal sayılarda olmayan çıkarmayı tanımlayıp bunların ilkokuldan beri bildiğimiz özelliklerini kanıtlayacağız.



ℕ ve ℤ kümeleri

Ama yaratacağımız tamsayılar da kusursuz olmayacak. Tamsayılarda çıkarma işlemi yapılabilir ama bölme yapılamaz. 6'yı 3'e bölmek neyse de, tamsayılarda 3'ü 6'ya bölemeyiz, çünkü 1/2 bir tamsayı değildir.

Tamsayıları tanımlayıp özelliklerini çıkardıktan sonra, bu sefer tamsayıları çantada keklik kabul edip kesirli sayıları (yani –1/3, –2/7, –3/9, 1/2, 1, 2 gibi sayıları, yani ℚ kümesini) yaratacağız ya da - bizim açımızdan aynı anlama gelir - tanımlayacağız. Sadece kesirli sayıları tanımlamakla yetinmeyeceğiz,



kesirli sayılarda, toplamayı, çarpmayı, çıkarmayı ve sıralamayı, bir de ayrıca tamsayılarda olmayan bölmeyi tanımlayıp bunların ilkokuldan beri bildiğimiz özelliklerini kanıtlayacağız.

Bütün bunları doğal sayıları temel alarak yapacağız. Yani doğal sayıları bildiğimizi varsayacağız, ki biliyoruz, boşu boşuna mı ilkokulda beş yıl dirsek çürüttük ya da daha önceki bölümleri yazdık? Ama kitabın bu kısmını anlamak için kitabın daha önceki bölümlerini hatmetmek ya da anlamış olmak gerekmez. Doğal sayılarla ilgili ilkokul bilgimiz yeterli olacak.

Birçok okur haklı olarak sayıları yaratmanın ne demek olduğunu soruyordur kendi kendine.

Sayıları yaratmanın ne demek olduğunu anlamayan okur, muhtemelen, sayıların zaten var olduğunu ve yaratılmaya ihtiyaçları olmadığını düşünüyordur. Örneğin, 2 kavramının tanıma ihtiyacı olmadığı gibi, $2 \times 2 = 4$ eşitliğinin de kanıta ihtiyacı olmadığını düşünüyordur.

19'uncu yüzyılın sonlarına kadar böyle düşünülüyordu ama matematikte ortaya çıkan çelişkiler yüzünden matematiksel nesnelerden sözederken çok daha dikkatli olmamız gerektiği anlaşıldı. Herkesin nerdeyse doğuştan bildiğini sandığı şeylerin matematikte özenle tanımlanmasının en önemli nedeni budur. Ama başka nedenler de vardır.

Ders notlarının okuma parçası niteliğindeki ilk bölümlerinde de matematiksel tanımın ne demek olduğunu, ne anlama geldiğini açıklamaya çalıştık. Aynı şeyleri biraz daha değişik ifadelerle yineleyelim.

Herhangi bir nesne ya da gerçek sadece zihinsel olarak ve zihinde algılanır. Tüm çıkarımlarımızı ve akıl yürütmelerimizi zihnimizde yaparız. Bizim dışımızdaki olan ve varlıklarını duyularımızla hissettiğimiz şeylerin zihnimizde bir modelini ya da imgesini yaratmazsak, o şeyler hakkında bir fikir yürütemeyiz. Her türlü deneyden çıkarılan sonuç mutlaka beynin süzgecinden geçirilmiştir, deneyden elde edilen veriler soyut düşünce olarak beynimizde depolanmıştır ve akılla, bilgiyle, bellekle, zekâyla, sezgilerle zihinde yoğrulmuştur. Masanın üstünde gördüğünüz elmanın basitleştirilmiş bir modeli zihninizde olmasa, o elmayı ısırabileceğinizi anlayamazsınız bile, ya da eflatun bir elma gördüğünüzde hiç şaşırmazsınız, bu elma da böyle dersiniz. Beyninizde elmanın rengine ve ısırılabileceğine dair bir kalıp oluşmuştur.

Zaten bizim dışımızdaki şeyler o kadar karmaşık, o kadar değişken ve o kadar bizim dışımızda ki, onları anlamak, tanımlarını vermek, özelliklerini sadece tikel fiziksel varlıklarını göz önüne alarak çıkarmak imkânsızdır. Bunu yapacak yetimiz de yok ayrıca. Düşünmemizi sağlayan tek organ beynimiz ve onun verileri de soyut nesnelerdir.

Örneğin, bizim dışımızdaki birtakım şeylerin hep aynı yasalara tabi olup olmayacakları kuşkuludur. İki elma artı iki elmanın bal gibi de günün birinde beş elma yapabileceğini düşünebilirim. İki elma artı iki elmanın hep dört elma edeceğinden nesnel olarak emin olamayız. Ya da elinizden bıraktığınız kalem günün birinde yere düşmeyebilir, çünkü, mesela, o gün yerçekimi yasası geçerli değilmiş, yaradan yaratırken öyle yaratmış... Mesela her onbin yılda bir doğa yasaları tatil yapıyormuş... Kimbilir...

Ama eğer, "bugün geçerli olan yarın da ve ertesi gün de ve hep geçerli olacaktır" varsayımını, yani "aynı koşullarda aynı deneyler hep aynı sonuçlar doğurur" varsayımını yapıyorsanız, gerçeği zihinsel olarak algılamaya doğru bir adım attınız demektir. Doğru yapıyorsunuz, çünkü muhtemelen farkına varmadan varsaydığınız bu ilkeyi hiçbir zaman kanıtlayamazsınız.

Bu yüzden dış dünyada gördüğümüz şeylerin zihnimizde bir modelini kurarız ve o model üzerinde düşünüp bulduklarımızı dış dünyaya aktarırız. Bir mühendis de böyle çalışmaz mı? Köprünün bir modelini önce masa üstünde kalem kâğıtla inşa eder. Nehrin eni, boyu, debisi, gücü ve konumu, köprünün ayaklarının oturacağı zemin, rüzgârın şiddeti, köprüden geçecek araçların ağırlıkları ve yarattıkları titreşim, çeliğin ve betonun mukavemeti ve her şey aslında gerçek değil, kuramsaldır, mühendisin zihninde ya da kâğıt üstündedir. Her şey kâğıt üstünde tasarlandıktan sonra gerçek köprü kurulur. Çok çok karmaşık olan gerçek koşullar tam olarak anlaşılamadığından, ne olur ne olmaz denilerek köprüler olması gerekenden daha sağlam yapılırlar. Yani tam gerçeği kavrayamayacağımızı mühendisler de kabullenirler.

Nasıl mühendis nehrin yaklaşık bir modelini zihninde tasarlarsa, matematikçiler de dış dünyayla olan ilişkileri sayesinde hissettikleri doğru, nokta, paralellik, azlık çokluk, mesafe, sayı gibi kavramların zihinlerinde bir modelini kurarlar ve safi zihinsel olan bu modeller üzerinde düşünürler.

Mühendislikte doğru olan bu yaklaşım matematikte daha da doğrudur. Matematikçi $2 + 2 = 4$ eşitliğini kanıtlamak için elmaya armuda başvurmaz. Geçen bölümlerde yaptığımız gibi, soyut olarak tanımladığı 2, 4 ve + kavramlarını kullanır.

Geçen bölümlerde işte tam da bunu yapmıştık. 0'ı, 1'i, 2'yi, 3'ü, 4'ü ve toplamayı soyut olarak kâğıt üstünde tanımlamıştık. Tabii tanımlarımız rastgele değildi. Tanımlarımız, $2 + 2 = 4$ olacak biçimde yapılmıştı.

Tanımlarımızı yaparken tek kıstasımız, tanımladığımız nesnelerin doğada hissettiğimiz özellikleri sağlamasıydı. Örneğin, 2, 4 ve toplama nasıl tanımlanırsa tanımlansın,

$$2 + 2 = 4,$$

ya da

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

gibi eşitlikler doğru olmalıdır.

Bu son tartışmadan doğal bir soru ortaya çıkıyor: Doğada varlığını hissettiğim ve kâğıt üstünde zihinsel olarak tanımlayacağım matematiksel nesnelerin doğru olmasını istediğim özellikleri nelerdir? Bu doğal ve önemli tartışmaya girmek niyetinde değilim burada ama bir örnek vereyim.

(x, y) çiftini ele alalım. (x, y) çiftini öyle tanımlamalıyız ki ***temel özellikleri*** doğru olmalıdır. Nedir (x, y) çiftinin temel özellikleri? Deneyimli matematikçi (x, y) çiftinin bir tek temel özelliği olduğunu bilir. O da şu özelliktir:

$$(x, y) = (z, t) \Leftrightarrow (x = z \text{ ve } y = t).$$

Dolayısıyla (x, y) çifti nasıl tanımlanırsa tanımlansın, yukardaki özellik doğru olmalıdır, tanım için başka bir kıstasımız yok. Var aslında, matematiksel olmayan, estetik ve uygulamaya yönelik bir kıstasımız daha var: Tanım basit olsun, ki teorem kanıtlamakta ve tanımı anımsamakta gereksiz yere güçlük çekmeyelim.

$$\{\{x\}, \{x, y\}\}$$

kümesi yukardaki özelliği sağlar, yani

$$\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{z\}, \{z, t\}\} \Leftrightarrow (x = z \text{ ve } y = t)$$

önermesi doğrudur ve gayet kolaylıkla kanıtlanabilir. Dolayısıyla (x, y) çiftini $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ kümesi olarak tanımlayabiliriz:

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

(x, y) çiftini, başka türlü de tanımlayabilirdik, yeter ki verilen tanım yukarda belirtilen "temel özelliği" sağlasın. Örneğin,

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}, \{y\}\}$$

ve

$$(x, y) = \{\{x\}, \{\{x, y\}\}\}$$

tanımları da aynı özelliği sağlarlar. Ama ilk verdiğimiz tanım daha basit olduğundan birincisini yeğleriz.

Hiç olacak gibi değil ama, eğer yarın öbür gün (x, y) çiftinin bir başka "temel özelliği" keşfedilirse, o zaman tanımı değiştirmek gerekebilir ama şimdilik bu tanım bize yeterli geliyor.

Yukardaki tanımla, (x, y) kümesinin en fazla 2 elemanı olduğu görülür ama matematiksel olarak bu olgunun hiç önemi yoktur. Nitekim hiçbir matematik kitabımda, "(x, y) kümesinde en fazla iki eleman vardır" gibi bir teorem göremezsiniz. Kimsenin umurunda değildir çünkü bu sonuç.

Gelelim konumuza. Doğal sayıları, toplamayı, çarpmayı ve eşitsizliği bildiğimizi varsayıp, tamsayıları ve tamsayılar üstünde toplamayı, çarpmayı, çıkarmayı ve sıralamayı tanımlayacağız. Daha sonra bu tanımların tamsayılarla ilgili bilmek istediğimiz "her şeyi" sağladığını göstereceğiz.

Tabii tanımın ne olduğunun hiç önemi olmayacak, yeter ki tamsayılar istediğimiz özelliklerini sağlasın.

Bu istediğimiz özelliklerin ne olduklarını ta en baştan söylemeyeceğiz. Okur sayfalar çevirdikçe özellikleri peyderpey görecek. Ama hiçbir özellik okurun ilkokuldan beri bilmediği bir şey olmayacak.

Tamsayılarla ilgili özellikleri kanıtlarken doğal sayıların özelliklerine ihtiyaç duyacağız. Eğer şansımız yaver giderse bu özelliklerin her biri geçmiş sayfalarda kanıtlanmış olmalı. Şansımız yaver gitmezse, o zaman geçmiş bölümlere geri dönüp doğal sayıların gereksinilen özelliği kanıtlanmalı. Ama, daha önce de dediğimiz gibi okur doğal sayıların varlığını ve özelliklerini çantada keklik olarak görebilir.

Matematiksel nesneleri tanımlarken bir şeye daha dikkat etmeliyiz. Kabul ettiğimiz matematiksel evrende her nesne bir küme olmalı. Örneğin bu kitabın bir yerinde 0 sayısını $\emptyset$ (boşküme) olarak tanımlamıştık. Sonra,

$$1 = \{0\},$$
$$2 = \{0, 1\},$$
$$3 = \{0, 1, 2\}$$

tanımlarını vermiştik ve bunların her biri bir kümedir bilindiği gibi. Aslında doğal sayıları teker teker değil, tümünü birden tanımlamıştık, yani $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesini tanımlamıştık. Ama dikkat, doğal sayılar kümesini

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$$

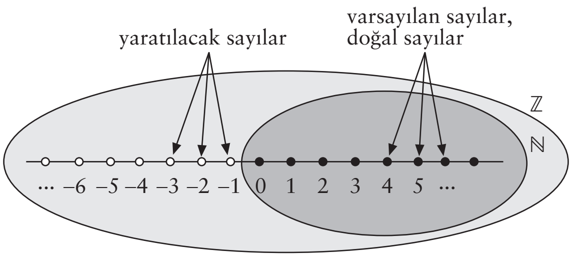
eşitliğiyle değil, çok daha rafine bir yöntemle tanımlamıştık; yukardaki eşitlik üç noktanın varlığından dolayı matematiksel bir tanım olamaz. İlgilenenler geçmiş bölümleri okusunlar.

5. Tamsayılar

Doğal sayılar yapısından hareket ediyoruz. Doğal sayıları, Bölüm 4'te açıklanan PA1, PA2, PA3, PA4 özelliklerini (bunlara Peano aksiyomları ve kısaca PA da diyebilirsiniz) doğrulayan bir $(\mathbb{N}, 0, S, +, \times)$ beşlisi olarak kabul edeceğiz. Eşitsizlik de Bölüm 3'te tanımlandığı gibi olacak, yani aslında $(\mathbb{N}, 0, S, +, \times, <)$ altılısında çalışacağız. Ama Bölüm 4'ü okumamayı tercih eden okur Bölüm 2'de bulduğumuz ve Bölüm 3'te toplamasını, çarpmasını ve sıralamasını tanımladığımız ve P1 ve P2'yi sağladığından PA'dan çok daha güçlü bir teorisi olan $(\mathbb{N}, 0, S)$ yapısında çalıştığımızı varsayabilir; bu ders notlarının içeriği açısından hiçbir şey değişmeyecektir.

5.1. Tamsayılar Kümesine Doğru

Doğal sayılardan yola çıkıyoruz. Sadece doğal sayılardan değil, doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ üzerine tanımlanmış olan toplama ve çarpma işlemlerinden ve $\leq$ eşitsizliğinden yola çıkıyoruz. Ama bu altbölümde sadece toplamaya gerek duyacağız.



Amacımız, $\mathbb{N}$'yi çıkarma yapılacak biçimde büyütmek, çünkü $\mathbb{N}$'de her sayıdan her sayıyı çıkaramayız, örneğin 3'ten 5'i çıkaramayız, –2 diye bir sayı yok $\mathbb{N}$'de. Daha doğrusu $5 + x = 3$ denkleminin $\mathbb{N}$'de çözümü yok.

Her $a, b \in \mathbb{N}$ için, $a + x = b$ denklemlerinin çözülebileceği $\mathbb{N}$'den daha büyük bir küme yaratacağız. Bu yeni kümede de $\mathbb{N}$'deki gibi toplama ve çarpma işlemleri ve $\leq$ diye adlandıralacağımız bir sıralama olacak. Ama bu iki işlemi ve sıralamayı daha sonra tanımlayacağız; hele bir tamsayılar kümesi $\mathbb{Z}$'yi tanımlayalım.

Bu dediğimizi olabilecek en ekonomik biçimde yapmak istiyoruz, yani $\mathbb{N}$'den daha büyük bir küme bulacağız ama $\mathbb{N}$'ye sadece çıkarma yapmak için gerekli elemanları ekleyeceğiz, $\mathbb{N}$'ye gereksiz yere daha fazla eleman eklemek istemiyoruz. Daha açık olarak ifade edelim: $\mathbb{Z}$'yi bulmak isterken örneğin $\mathbb{Q}$'yü, $\mathbb{R}$'yi ya da (polinomlar kümesi) $\mathbb{Z}[X]$'i bulmak istemiyoruz.

Her $a, b \in \mathbb{N}$ için, $b + x = a$ denkleminin çözülebileceği bir küme yaratmak istiyoruz dedik. Ayrıca bu denklemin tek bir çözümünün olmasını istiyoruz. Çözümü bulduktan sonra bu çözüme $a - b$ diyeceğiz. Örneğin, –2 sayısı $5 + x = 3$ denkleminin çözümü olacak. Şimdilik böyle bir sayımız yok ama pek yakında olacak.

Daha sonra tanımlanacak olan bu $a - b$ elemanını şimdilik (a, b) çifti olarak gösterelim. Daha henüz $a - b$ diye bir elemanımız yok ama (a, b) diye bir çiftimiz var! Birinci deneme olarak, $a - b$'yi, yani $b + x = a$ denkleminin çözümünü (a, b) çifti olarak gösterelim. Yani

$$a - b = (a, b)$$

tanımını yapalım. Örneğin,

$$-2 = (3, 5).$$

Yalnız burada bir noıktaya dikkat etmek gerekir. –2 sadece

$$5 + x = 3$$

denkleminin değil, ayrıca

$$6 + x = 4 \text{ ve } 7 + x = 5$$

denklemlerinin de çözümüdür, yani tüm bu çözümler birbirine eşit olmalıdır, yani, yukardaki tanımı kabul edecek olursak,

$$(3, 5) = (4, 6) = (5, 7)$$

eşitlikleri doğru olmalıdır. Ama bu eşitlikler bariz biçimde yanlışlar. Demek ki yukardaki tanım doğru bir tanım olamaz.

Ne yapmalı?

Şimdi bu elemanları eşit kılmanın bir yöntemini göstereceğiz. Bunu yapmanın çok çok kolay bir yöntemi var: "eşit" yerine "denk" diyeceğiz olacak bitecek... (3, 5), (4, 6) ve (5, 7) çiftleri eşit olmayacaklar, olamazlar da zaten, çünkü eşit değiller, ama "denk" olacaklar! Bu elemanların denk olduklarını da eşitlik simgesi olan = simgesine bir çizgi daha ekleyerek göstereceğiz:

$$(3, 5) \equiv (4, 6) \equiv (5, 7).$$

Genel tanımı verelim şimdi. $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ olsun. Eğer

$$a - b = c - d$$

ise, (a, b) çiftinin (c, d) çiftine ***denk*** olduğunu söyleyeceğiz ve bunu,

$$(a, b) \equiv (c, d)$$

olarak yazacağız. Demek ki tanım gereği,

$$(a, b) \equiv (c, d) \Leftrightarrow a - b = c - d.$$

Ama bir dakika... Bizim doğal sayılarda çıkarma gibi bir işlemimiz yok ki

$$a - b = c - d$$

koşulunu koşabilelim. Çıkarmadan sözedemeyiz bile, çünkü henüz öyle bir işlem yok. Biz de zaten bu olmayan çıkarma işlemini tanımlamak istemiyor muyduk? Çıkarmayı tanımlarken çıkarmadan sözetmek doğru değil. Yapmamız gereken,

$$a - b = c - d$$

koşulunu çıkarma kullanmadan ifade etmek. Bu da oldukça basit: Bu koşul yerine, ilkokuldan beri ona eşdeğer olduğunu bildiğimiz

$$a + d = c + b$$

koşulunu koşalım...

Şimdi denklik tanımımız şöyle: $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ ise ve

$$a + d = c + b$$

ise (a, b) çiftinin (c, d) çiftine denk olduğunu söyleyeceğiz ve bunu,

$$(a, b) \equiv (c, d)$$

olarak göstereceğiz. Demek ki tanım gereği,

$$(a, b) \equiv (c, d) \Leftrightarrow a + d = c + b\ .$$

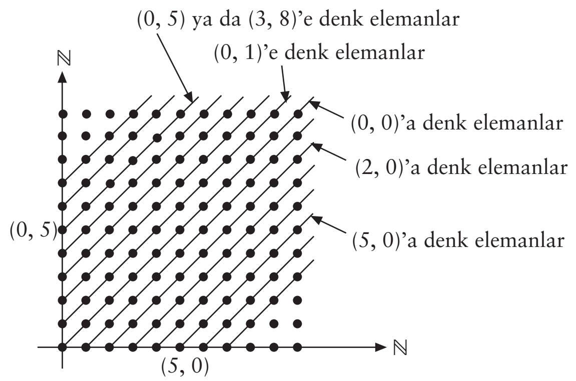
Dileyen aşağıdaki denkliklerin doğru olduklarını tanıma başvurarak teker teker kontrol edebilir.

$$(0, 0) \equiv (1, 1) \equiv (2, 2) \equiv (3, 3) \equiv \ldots$$
$$(1, 0) \equiv (2, 1) \equiv (3, 2) \equiv (4, 3) \equiv \ldots$$
$$(2, 0) \equiv (3, 1) \equiv (4, 2) \equiv (5, 3) \equiv \ldots$$
$$(3, 0) \equiv (4, 1) \equiv (5, 2) \equiv (6, 3) \equiv \ldots$$
$$(0, 1) \equiv (1, 2) \equiv (2, 3) \equiv (3, 4) \equiv \ldots$$
$$(0, 2) \equiv (1, 3) \equiv (2, 4) \equiv (3, 5) \equiv \ldots$$
$$(0, 3) \equiv (1, 4) \equiv (2, 5) \equiv (3, 6) \equiv \ldots$$

Örneğin, (3, 8)'e denk elemanlar, (0, 5), (1, 6), (2, 7), (3, 8), (4, 9), (5, 10), ... elemanlarıdır, yani şu kümenin elemanlarıdır:

$$\{(0, 5), (1, 6), (2, 7)\} \cup \{(3+n, 8+n) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Genel resim şöyle:



İlk sonucumuzu kanıtlayalım.

Önsav 5.1. *Her* $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *için*,
i. $(a, b) \equiv (a, b)$,
ii. $(a, b) \equiv (c, d)$ *ise* $(c, d) \equiv (a, b)$,
iii. $(a, b) \equiv (c, d)$ *ve* $(c, d) \equiv (e, f)$ ise $(a, b) \equiv (e, f)$.

Kanıt: i. Tanıma göre $a + b = a + b$ eşitliği kanıtlanmalı. Doğal sayılarla ilgili bu önermeyi zaten ders notlarının önceki kısmından biliyoruz.

ii. $(a, b) \equiv (c, d)$ varsayımı, tanıma göre,
$$a + d = c + b$$
diyor. $(c, d) \equiv (a, b)$ denkliğini yani
$$c + b = a + d$$
eşitliğini kanıtlamalıyız. Bu durumda da kanıtlayacak bir şey yok.

iii. $(a, b) \equiv (c, d)$ ve $(c, d) \equiv (e, f)$ varsayımları, sırasıyla,
$$a + d = c + b \text{ ve } c + f = e + d$$
diyor. Bu iki eşitliği varsayarak, $(a, b) \equiv (e, f)$ denkliğini, yani
$$a + f = e + b$$
eşitliğini kanıtlamalıyız. Varsaydığımız eşitlikleri kullanarak hesaplayalım:
$$\begin{aligned}(a + f) + (d + c) &= (a + d) + (c + f)\\ &= (c + b) + (e + d)\\ &= (e + b) + (d + c).\end{aligned}$$

Yukardaki birinci ve sonuncu eşitlik, doğal sayılarla ilgili ders notlarının birinci kısımdan bilinen sonuçların sonucu. (Doğal sayıları ve doğal sayıları toplamayı bildiğimizi varsaydığımızı anımsatırım.) Demek ki,
$$(a + f) + (d + c) = (e + b) + (d + c).$$

Doğal sayılarda sadeleştirebileceğimizi bildiğimizden, yukardaki eşitlikte sağ taraflarda bulunan $d + c$ terimlerini sadeleştirerek, istenen
$$a + f = e + b$$
eşitliğini buluruz. □

Eğer $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ise, Önsav, tam tamına, her $\alpha, \beta, \gamma \in X$ için,

i. $\alpha \equiv \alpha$,

ii. $\alpha \equiv \beta$ ise $\beta \equiv \alpha$,

iii. $\alpha \equiv \beta$ ve $\beta \equiv \gamma$ ise $\alpha \equiv \gamma$

diyor. Herhangi bir X kümesi üzerine yukardaki önermeleri sağlayan bir $\equiv$ ikili ilişkisine ***denklik ilişkisi*** adı verildiğini [SKK]'dan biliyoruz. Demek ki Önsav 5.1, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesi üzerinde tanımlanan $\equiv$ ikili ilişkisinin bir denklik ilişkisi olduğunu söylüyor.

Denklik ilişkisi kavramı matematiğin en önemli kavramlarından biridir. [SKK] adlı kitabımızda bu konuya hakettiği önem ve değer verilmiştir. Bu konuda eksiği olan okur bu aşamada o kitapta ilgili bölüme bakmalıdır.

Her denklik ilişkisinde denklik sınıfları vardır. Bir (a, b) çiftinin denklik sınıfını $[(a, b)]$ yerine daha basit olarak $[a, b]$ olarak gösterelim. Tanım gereği (bkz. [SKK]) $[a, b]$ kümesi, (a, b) elemanına denk olan elemanlardan oluşan kümedir:

$$\begin{aligned}[a, b] &= \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (a, b) \equiv (x, y)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a + y \equiv x + b\}.\end{aligned}$$

Ve $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ için,

$$[a, b] = [c, d] \Leftrightarrow (a, b) \equiv (c, d) \Leftrightarrow a + d = c + b$$

olur. Örneğin,

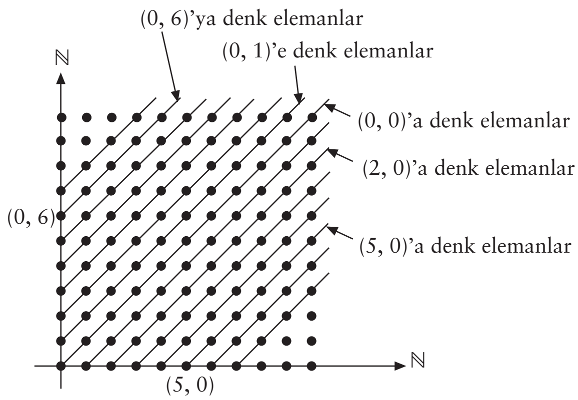
$$\begin{aligned}[1, 6] &= \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : y = x + 5\} = [0, 5], \\ [2, 6] &= \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : y = x + 4\} = [1, 5], \\ [6, 6] &= \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : y = x\} = [0, 0].\end{aligned}$$

Bu üç sınıf ilerde sırasıyla –5, –4 ve 0 anlamına gelecekler. Kaçınılmaz olarak [1, 5] de –4 anlamına gelecek, çünkü

$$[1, 5] = [2, 6].$$

Bu denklik ilişkisinin her denklik sınıfı aşağıdaki resimdeki gibi çapraz doğruların üstündeki noktalardan oluşur.

Şimdi artık $\mathbb{Z}$'yi en azından küme olarak tanımlayabiliriz. $\mathbb{Z}$'nin toplama, çıkarma, çarpma gibi işlemleri ve sıralaması daha sonra tanımlanacak.



5.2. Küme Olarak ℤ

ℤ kümesini ℕ×ℕ/≡ kümesi olarak tanımlıyoruz. Yani,

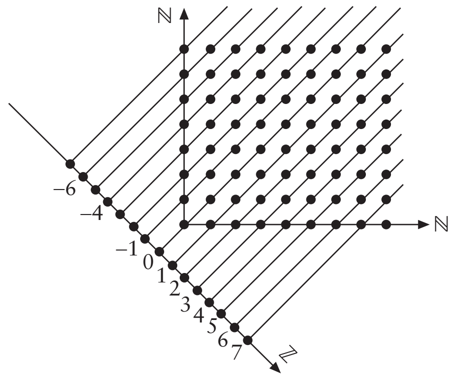
$$\mathbb{Z} = \{[a, b]: (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}.$$

Z'nin elemanlarına ***tamsayı*** adını veriyoruz.

ℤ'nin her elemanı, yani her tamsayı demek ki ℕ × ℕ kümesinin bir altkümesi. Bu, beklenmedik bir şey, çünkü ℕ beklenildiği gibi ℤ'nin bir altkümesi olmadı. Ama ilerde her şey yoluna girecek ve ℕ'yi ℤ'nin bir altkümesi olarak göreceğiz, biraz sabır.

Üstüne basa basa ve tekrar tekrar söylüyoruz, ℤ'nin her elemanı ℕ × ℕ kümesinin aşağıda görünen çapraz altkümelerinden biri.

Sezdiğimiz ya da ilkokulda öğrendiğimiz ℤ'yi nasıl bulacağımızı merak eden sabırsız okura aşağıdaki şekli sunalım:



Tanımladığımız bu $\mathbb{Z}$ kümesinin üstünde toplamayı, çarpmayı, çıkarmayı ve eşitsizliği tanımlayacağız. Her şeyi tanımladıktan ve en temel özelliklerini çıkardıktan sonra $\mathbb{Z}$'nin tanımını değiştirip yıllardan beri aşina olduğumuz $\mathbb{N}$'yi içeren $\mathbb{Z}$'yi bulacağız.

Alıştırmalar

5.2.1. $a, x \in \mathbb{N}$ ise $[a + x, a] = [x, 0]$ ve $[a, a + x] = [0, x]$ eşitlizliklerini kanıtlayın.

5.2.2. Eğer $a \geq b$ iki doğal sayıysa, bir x doğal sayısı için

$$[a, b] = [x, 0]$$

eşitliğinin doğru olduğunu kanıtlayın.

5.2.3. Her tamsayısının bir x doğal sayısı için ya $[x, 0]$ ya da $[0, x]$ biçiminde yazılabileceğini kanıtlayın.

5.2.4. x ve y doğal sayılarsa ve $[x, 0] = [0, y]$ ise $x = y = 0$ eşitliğini kanıtlayın.

5.3. Toplama

$\mathbb{Z}$'de toplama, çarpma ve çıkarma işlemlerini ve $\leq$ sıralamasını tanımlayacağız ve bunların en temel özelliklerini kanıtlayacağız.

Toplamadan başlıyoruz.

1. $\mathbb{Z}$'den iki α ve β elemanı alalım.

2. $\mathbb{Z}$'nin tanımına göre, $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ için,

$$\alpha = [a, b] \text{ ve } \beta = [c, d]$$

eşitlikleri geçerlidir.

3. α ile β'nın, yani $[a, b]$ ile $[c, d]$'nin toplamını tanımlamak istiyoruz.

4. Gelecekte, $[a, b]$'nin $a - b$ ve $[c, d]$'nin $c - d$ anlamına geleceğini en az bin defa söylemiştik. Demek ki $[a, b]$ ile $[c, d]$'nin toplamı $\mathbb{Z}$'nin,

$$(a - b) + (c - d),$$

sayısı ya da ona eşit olan

$$(a + c) - (b + d)$$

sayısı anlamına gelecek eleman olmalı, yani $\mathbb{Z}$'nin,

$$[a + c, b + d]$$

elemanı olmalı. Dolayısıyla, planlarımıza göre,

$$\alpha = [a, b] \text{ ve } \beta = [c, d]$$

ise,

$$\alpha + \beta = [a + c, b + d]$$

elemanı olarak tanımlanmalı.

Mükemmel bir plan. Ancak bu planda şöyle bir sorun olabilir. Diyelim Ayşe'yle Bülent'e yukardaki plana göre α ve β tamsayılarını toplama görevi verildi. Ayşe, evinde

$$\alpha = [a, b] \text{ ve } \beta = [c, d]$$

olacak biçimde a, b, c ve d doğal sayılarını buldu ve toplamı

$$[a + c, b + d]$$

olarak sundu. Tanımı en az Ayşe kadar iyi bilen Bülent de aynı şeyi yaptı ama Bülent, Ayşe'nin bulduğu a, b, c ve d doğal sayılarından başka doğal sayılar buldu. Diyelim Bülent,

$$\alpha = [a', b'] \text{ ve } \beta = [c', d']$$

olacak biçimde a', b', c' ve d' doğal sayılarını buldu ve toplamı

$$[a' + c', b' + d']$$

olarak sundu. Elbette Ayşe'nin sunduğu $\alpha + \beta$ toplamıyla Bülent'in sunduğu $\alpha + \beta$ toplamı eşit olmalı, yoksa tanımımızda bir sorun var demektir, yani, planımızın başarıya ulaşması için

$$[a + c, b + d] = [a' + c', b' + d']$$

eşitliği geçerli olmalı.

Planımızın gerçekten mükemmel olduğunu ve başarıya ulaşacağını kanıtlayalım.

Önsav 5.2. *a, b, c, d ve a', b', c', d' doğal sayılar olsun. Eğer*

$$[a, b] = [a', b'] \text{ ve } [c, d] = [c', d']$$

ise, o zaman,

$$[a + c, b + d] = [a' + c', b' + d']$$

dır.

Kanıt: Varsayımlara göre,

$$a + b' = a' + b \text{ ve } c + d' = c' + d$$

eşitlikleri doğru. $[a + c, b + d] = [a' + c', b' + d']$ eşitliğini, yani

$$(a + c) + (b' + d') = (a' + c') + (b + d)$$

eşitliğini kanıtlamalıyız. Eğer varsayılan iki eşitliği altalta yazıp toplarsak (ve doğal sayıların toplamasıyla ilgili bildiğimiz temel özellikleri kullanırsak) istediğimiz hemen çıkar:

$$\begin{array}{rc} & a + b' = a' + b \\ + & c + d' = c' + d \\ \hline & (a + c) + (b' + d') = (a' + c') + (b + d). \end{array}$$

Önsav kanıtlanmıştır. □

Artık toplamayı hiç çekinmeden yukarda önerildiği gibi tanımlayabiliriz:

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d].$$

Alıştırmalar

5.3.1. $[3, 5] + [4, 2] = [0, 0]$ eşitliğini gösterin.

5.3.2. $[7, 5] + x = [0, 0]$ denklemini çözün.

5.3.3. $[7, 5] + x = [1, 3]$ denklemini çözün.

5.3.4. $[7, 5] + (x + x) = [1, 3]$ denklemini çözebilir misiniz?

5.3.5. $a, b \in \mathbb{N}$ olsun.

$$[a, b] + [a, b] = [2a, 2b]$$

eşitliğini kanıtlayın.

5.3.6. $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ olsun. $\alpha + \beta = \alpha$ ise $\beta = [0, 0]$ eşitliğini kanıtlayın.

5.3.7. $a, b \in \mathbb{N}$ olsun. $[a, b] + [b, a] = [0, 0]$ eşitliğini kanıtlayın.

5.3.8. $\mathbb{Z}$'de $\alpha + \alpha = [1, 0]$ denkleminin çözülemeyeceğini kanıtlayın. ($\alpha + \alpha = 2\alpha$ eşitliğinin şimdilik bir anlamı olmadığını belirtirim. İlerde bir anlamı olacak ama. Önce $[2, 0]\alpha$'nın, sonra da 2α'nın tanımını yapacağız.) Hangi a ve b doğal sayıları için $\mathbb{Z}$'de $\alpha + \alpha = [a, b]$ denklemi çözülebilir?

5.4. Toplamanın Özellikleri

Toplamanın özelliklerini irdeleyelim.

Önsav 5.3. i. [Birleşme Özelliği] *Her* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ *için*,

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma).$$

ii. [Etkisiz Elemanın Varlığı] $[0, 0]$ *toplamanın* ***etkisiz elemanı****dır*, *yani her* $\alpha \in \mathbb{Z}$ *için*,

$$\alpha + [0, 0] = [0, 0] + \alpha = \alpha.$$

iii. [Ters Elemanın Varlığı] *Her* $\alpha \in \mathbb{Z}$ *için*,

$$\alpha + \alpha' = \alpha' + \alpha = [0, 0]$$

eşitliğini sağlayan bir $\alpha' \in \mathbb{Z}$ *vardır*. $\alpha = [a, b]$ *ise* $\alpha' = [b, a]$ *olarak alınabilir*.

Kanıt: i. Önce

$$\alpha = [a, b],\ \beta = [c, d],\ \gamma = [e, f]$$

olacak biçimde a, b, c, d, e, f doğal sayılarını bulalım ve kanıtlamak istediğimiz eşitliğin solunu ve sağını bu doğal sayılar cinsinden yazalım:

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) + \gamma &= ([a, b] + [c, d]) + [e, f]\\ &= [a + c, b + d] + [e, f]\\ &= [(a + c) + e, (b + d) + f]\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\alpha + (\beta + \gamma) &= [a, b] + ([c, d] + [e, f])\\ &= [a, b] + [c + e, d + f]\\ &= [a + (c + e), b + (d + f)].\end{aligned}$$

Demek ki

$$[(a + c) + e, (b + d) + f] = [a + (c + e), b + (d + f)]$$

eşitliğini kanıtlamalıyız. Ama eşitlik sadece sınıflar düzeyinde değil, elemanlar düzeyinde de geçerli:

$$\begin{aligned}(a + c) + e &= a + (c + e),\\ (b + d) + f &= b + (d + f)\end{aligned}$$

çünkü a, b, c, d, e, f doğal sayılar ve doğal sayılarda birleşme özelliğini biliyoruz.)

ii. $\alpha = [a, b]$ olacak biçimde a ve b doğal sayılarını seçelim ve hesaplayalım.

$$\begin{aligned}\alpha + [0, 0] &= [a, b] + [0, 0]\\ &= [a + 0, b + 0] = [a, b] = \alpha.\\ [0, 0] + \alpha &= [0, 0] + [a, b]\\ &= [0 + a, 0 + b] = [a, b] = \alpha.\end{aligned}$$

iii. a ve b doğal sayıları için, $\alpha = [a, b]$ olsun.

$$\alpha + \alpha' = \alpha' + \alpha = [0, 0]$$

eşitliğini sağlayan bir $\alpha' \in \mathbb{Z}$ bulacağız. α, $a - b$ anlamına geleceğinden, α' elemanının $b - a$ anlamına gelecek olan $[b, a]$ olması gerektiğini seziyoruz. Nitekim, $\alpha' = [b, a]$ olsun ve hesaplayalım:

$$\begin{aligned}\alpha + \alpha' &= [a, b] + [b, a] = [a + b, b + a]\\ &= [a + b, a + b],\\ \alpha' + \alpha &= [b, a] + [a, b] = [b + a, a + b]\\ &= [a + b, a + b],\end{aligned}$$

Demek ki, her $c \in \mathbb{N}$ için, $[c, c] = [0, 0]$ eşitliğini kanıtlamalıyız ama bu $c + 0 = 0 + c = c$ eşitliğinden hemen çıkar. □

Önsavdaki üç özelliği sağlayan $(\mathbb{Z}, +, [0, 0])$ türünden bir yapıya ***grup*** denir. Demek ki Önsav 2, $(\mathbb{Z}, +, [0, 0])$ yapısının bir grup olduğunu gösteriyor. Bir grupta sadeleştirme yapılabilir:

Önsav 5.4. *Bir grupta (dolayısıyla $\mathbb{Z}$'de de)*

i. [Sadeleşme] $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$ *ise*, $\beta = \gamma$ *olur*.

ii. [Etkisiz Elemanın Biricikliği] *Eğer bir* α *ve* β *için* $\alpha + \beta = \alpha$ *ise* $\beta = [0, 0]$ *olur*.

iii. [Ters Elemanın Biricikliği] *Verilmiş bir* α *için*, α', *Önsav* 5.3.iii'*teki eşitliği sağlıyorsa ve* $\alpha + \beta = [0, 0]$ *ise*, $\beta = \alpha'$ *olur*.

Kanıt: i. α', α tamsayısı için Önsav 5.3.iii'ü sağlasın, yani $\alpha' + \alpha = [0, 0]$ olsun. O zaman aynı önsava göre,

$$\begin{aligned}\beta &= [0, 0] + \beta = (\alpha' + \alpha) + \beta = \alpha' + (\alpha + \beta)\\ &= \alpha' + (\alpha + \gamma) = (\alpha' + \alpha) + \gamma = [0, 0] + \gamma = \gamma\end{aligned}$$

olur.

ii. Yukardakinden çıkar: $\alpha + \beta = \alpha = \alpha + [0, 0]$.
iii. (i)'den çıkar: $\alpha + \beta = [0, 0] = \alpha + \alpha'$. □

Önsav 5.3.ii ve 5.4.ii'den dolayı, $[0, 0]$ elemanına toplamanın ***etkisiz eleman***ı adı verme hakkına sahibiz. Önsav 5.3.iii ve 5.4.iii'ten dolayı, $\alpha \in \mathbb{Z}$ elemanının tersini $-\alpha$ olarak yazıp bu elemana α'nın ***toplamsal tersi*** adını verebiliriz. Önsav 5.3.iii'ten dolayı $[a, b]$ elemanının tersi $[b, a]$ elemanıdır, yani

$$-[a, b] = [b, a]$$

olur. Buradan,

$$-[a, a] = [a, a]$$

ve

$$-(-\alpha) = \alpha$$

eşitlikleri çıkar, ama son eşitlik Önsav 5.3.iii'ten de çıkar: α, α' elemanının tersiyse, α' elamanı da α'nın tersidir!

Grubumuzun işleminin (toplamanın yani) değişmeli olduğunu da kanıtlayalım.

Önsav 5.5. *Her* $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ *için*, $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

Kanıt: $\alpha = [a, b]$, $\beta = [c, d]$ olacak biçimde a, b, c ve d doğal sayıları bulalım ve hesaplayalım:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= [a, b] + [c, d] = [a + c, b + d] \\ &= [c + a, d + b] = [c, d] + [a, b] \\ &= \beta + \alpha. \end{aligned}$$ □

Önsav 5.5'teki eşitliği sağlayan bir gruba ***değişmeli*** ya da ***abelyen grup*** denir.

$\mathbb{Z}$'de çıkarma işlemini tanımlayalım: Her a, b, c, d doğal sayıları için,

$$[a, b] - [c, d] = [a, b] + [d, c] = [a + d, b + c]$$

olsun. Ya da grupların diliyle, her α, β tamsayıları için,

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$$

olsun. Buradaki $-\beta$, β tamsayısının toplamsal tersidir. Böylece $\mathbb{Z}$'de çıkarma işlemini tanımlamış olduk.

Benzer şekilde,

$$-\alpha + \beta = (-\alpha) + \beta$$

ve

$$-\alpha - \beta = (-\alpha) + (-\beta)$$

elemanları da tanımlanır.

Alıştırmalar

5.4.1. Her $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ için, $-(\alpha + \beta) = -\beta - \alpha$ eşitliğini kanıtlayın.

5.4.2. Her $a, b \in \mathbb{N}$ için $[a, 0] + [b, 0] = [a + b, 0]$ eşitliğini kanıtlayın.

5.4.3. Hangi $a \in \mathbb{N}$ için, $\alpha + \alpha = [a, 0]$ denklem $\mathbb{Z}$'de çözülebilir?

5.4.4. Hangi $[a, b]$ için $\alpha + \alpha = [a, b]$ denklemi $\mathbb{Z}$'de çözülebilir?

5.4.5. Her $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ için,

$$-(\alpha + \beta) = (-\beta) + (-\alpha) = -\alpha - \beta = -\beta - \alpha$$

eşitliklerini kanıtlayın.

5.4.6. Eğer (α, α') ve (β, β') tamsayı çiftleri Önsav 5.3.iii'ü sağlıyorsa, (α', α) ve $(\alpha + \beta, \alpha' + \beta')$ çiftlerinin de Önsav 5.3.iii'ü sağladığını kanıtlayın.

5.5. Çarpma

Tamsayılarda toplama dışında bir de çarpma işlemi var tabii. Bu bölümde çarpmayı tanımlayacağız. Toplama için yaptığımız akıl yürütmeyi çarpma için de yapalım.

1. $\mathbb{Z}$'den iki α ve β elemanı alalım.

2. $\mathbb{Z}$'nin tanımına göre, $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ için,

$$\alpha = [a, b] \text{ ve } \beta = [c, d]$$

eşitlikleri geçerlidir.

3. α ile β'yı, yani $[a, b]$ ile $[c, d]$'nin çarpımını tanımlamak istiyoruz.

4. Gelecekte, $[a, b]$'nin $a - b$ ve $[c, d]$'nin $c - d$ anlamına geleceğini en az bin defa söylemiştik. Demek ki $[a, b]$ ile $[c, d]$'nin çarpımı $\mathbb{Z}$'nin,

$$(a - b)(c - d)$$

ya da

$$(ac + bd) - (ad + bc)$$

anlamına gelecek elemanı olmalı, yani $\mathbb{Z}$'nin,

$$[ac + bd, ad + bc]$$

elemanı olmalı. Demek ki, planlarımıza göre,

$$\alpha = [a, b] \text{ ve } \beta = [c, d]$$

ise,

$$\alpha\beta = [ac + bd, ad + bc]$$

elemanı olarak tanımlanmalı.

Mükemmel bir plan daha... Ancak bu planda şöyle bir sorun olabilir. Diyelim Ayşe'yle Bülent'e yukardaki plana göre α ve β tamsayılarını çarpma görevini verdim. Ayşe, evinde

$$\alpha = [a, b] \text{ ve } \beta = [c, d]$$

olacak biçimde a, b, c ve d doğal sayılarını buldu ve çarpımı

$$[ac + bd, ad + bc]$$

olarak sundu. Tanımı en az Ayşe kadar iyi bilen Bülent de aynı şeyi yaptı ama Bülent, Ayşe'nin bulduğu a, b, c ve d doğal sayılarından başka doğal sayılar buldu. Diyelim Bülent,

$$\alpha = [a', b'] \text{ ve } \beta = [c', d']$$

olacak biçimde a', b', c' ve d' doğal sayılarını buldu ve çarpımı

$$[a'c' + b'd', a'd' + b'c']$$

olarak sundu. Elbette Ayşe'nin sunduğu $\alpha\beta$ çarpımıyla Bülent'in sunduğu $\alpha\beta$ çarpımı birbirine eşit olmalı, yoksa tanımımızda bir sorun var demektir, yani,

$$[ac + bd, ad + bc] = [a'c' + b'd', a'd' + b'c']$$

olmalı.

Dolayısıyla sunduğumuz toplama tanımının geçerli olması için aşağıdaki sonuç doğru olmalı.

Önsav 5.5. *a, b, c, d ve a', b', c', d' doğal sayılar olsun. Eğer*
$$[a, b] = [a', b'] \text{ ve } [c, d] = [c', d']$$
ise, o zaman,
$$[ac + bd, ad + bc] = [a'c' + b'd', a'd' + b'c']$$
olur.

Kanıt: Varsayımlara göre,
$$a + b' = a' + b \text{ ve } c + d' = c' + d$$
eşitlikleri doğru.
$$[ac + bd, ad + bc] = [a'c' + b'd', a'd' + b'c']$$
eşitliğini, yani
$$ac + bd + a'd' + b'c' = a'c' + b'd' + ad + bc$$
eşitliğini kanıtlamalıyız. Unutmayalım ki yukardaki eşitlik $\mathbb{N}$'de geçerli ve $\mathbb{N}$'de çıkarma ve bölme işlemleri yok. Dolayısıyla bu eşitliği çıkarma ve bölmeye başvurmadan kanıtlamalıyız.

Çıkarma işlemini kullanmadan bu eşitliği kanıtlamak hiç de kolay değil. Okurun vereceğimiz kanıtı okumadan kanıtlamaya çalışmasını öneririm. Plansız programsız yola koyulursa başarma olasılığı çok düşük olacağını sanıyorum.

Şu kanıt planını yapalım: Eşitliğin sağından ve solundan a'yı ve c'yi yok edelim. Bunun için her iki tarafa da ne kadar terim eklemek gerekirse ekleyelim. Her iki taraftan da a'yı ve c'yi yok edersek, eşitlik doğruysa karşımıza özdeş bir eşitlik çıkmalı.

a ve c'nin bulunduğu terimleri sıralayalım:
$$ac, ad, bc$$

Önce, a'ya ve c'ye göre "ikinci dereceden" bir terim olan en soldaki ac'yi yok etmeye çalışalım.
$$\begin{aligned} ac + (ad' + b'c + b'd') &= (a + b')(c + d') \\ &= (a' + b)(c' + d) \end{aligned}$$
eşitliğini göz önüne alarak, kanıtlamak istediğimiz eşitliğin her iki tarafına da
$$ad' + b'c + b'd'$$
terimini ekleyelim. Böylece eşitliğin solundaki ac kaybolacak; ancak eşitliğin sağ tarafında içinde a ve c barındıran ad' ve $b'c$ te-

rimleri belirecek. Ama bunlar a ve c'ye göre birinci dereceden terimler olduklarından, bunlardan kurtulmak ac'den kurtulmaktan daha da kolay olacak. Yukardaki eklemeyi yaptığımızda, içinde a ve c barındıran

$$ad, bc, ad', b'c$$

terimleri kalacak. Örneğin birincisinden kurtulmak için her iki tarafa da $b'd$ eklemek yeterli, çünkü böylece ad'nin olduğu tarafta,

$$ad + b'd = (a + b')d = (a' + b)d$$

eşitliğini kullanabileceğiz. İçinde a ve c barındıran yukarda sıralanan terimlerin her biri için, sırasıyla,

$$b'd, bd', b'd', b'd'$$

(iki kez $b'd'$) ekleyelim. Daha önceki $ad' + b'c + b'd'$ terimini de hesaba katalım. Böylece, her iki tarafa da,

$$ad' + b'c + b'd' + b'd + bd' + b'd' + b'd'$$

terimini, yani

$$ad' + b'c + 3b'd' + b'd + bd'$$

terimini eklememiz gerektiğini görürüz. Bu terimi ekleyelim, a'yı ve c'yi yok eden hesapları yapalım ve bakalım iki tarafta da aynı şeyi elde ediyor muyuz.

Önce sol tarafı hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
&(ac + bd + a'd' + b'c') + (ad' + b'c + 3b'd' + b'd + bd')\\
&\quad = (ac + ad' + b'c + b'd') + 2b'd' + b'd + bd' + bd + a'd' + b'c'\\
&\quad = (a + b')(c + d') + 2b'd' + b'd + bd' + bd + a'd' + b'c'\\
&\quad = (a' + b)(c' + d) + 2b'd' + b'd + bd' + bd + a'd' + b'c'.
\end{aligned}$$

Görüldüğü gibi hiç a ve c kalmadı. Benzer işlemi sağ taraf için de yapalım.

$$\begin{aligned}
&(a'c' + b'd' + ad + bc) + (ad' + b'c + 3b'd' + b'd + bd')\\
&\quad = a'c' + b'd' + (ad + b'd) + (bc + bd')\\
&\qquad\qquad + (ad' + b'd') + (b'c + b'd') + b'd'\\
&\quad = a'c' + b'd' + (a + b')d + b(c + d')\\
&\qquad\qquad + (a + b')d' + b'(c + d') + b'd'\\
&\quad = a'c' + b'd' + (a' + b)d + b(c' + d)\\
&\qquad\qquad + (a' + b)d' + b'(c' + d) + b'd'.
\end{aligned}$$

Sağ tarafta da hiç a ve c kalmadı. Şimdi bu a'sız ve c'siz terimler birbirine eşit, hatta özdeş olmalı. Nitekim kolayca görüleceği üzere öyleler.

Doğal sayılarda sadeleştirmeyi bildiğimizden, eklediğimiz

$$ad' + b'c + 3b'd' + b'd + bd'$$

terimlerini sadeleştirip istediğimiz

$$ac + bd + a'd' + b'c' = a'c' + b'd' + ad + bc$$

eşitliğine kavuşuruz. Nihayet! □

Önsav sayesinde,

$$[a, b][c, d] = [ac + bd, ad + bc]$$

işlemini (çarpımını) vicdanımız rahat tanımlayabiliriz. Artık $\mathbb{Z}$'de sadece toplama değil, bir de çarpma işlemimiz var. Çarpma işlemi $\alpha\beta$ olarak gösterildiği gibi, kimileyin $\alpha\times\beta$ ya da $\alpha\cdot\beta$ olarak da gösterilir.

Alıştırmalar

5.5.1. $[3, 5][5, 3] = [0, 4]$ eşitliğini gösterin.

5.5.2. $[3, 4][2, 3]$ hangi tamsayıya eşittir?

5.5.3. $[3, 4][1, 3] = \alpha + \alpha$ denkleminin tamsayılarda çözümü var mıdır?

5.5.4. Her $\alpha \in \mathbb{Z}$ için, $\alpha[1, 0] = \alpha$ eşitliğini kanıtlayın.

5.5.5. Her $[a, b] \in \mathbb{Z}$ için, $[a, b][0, 1] = [b, a]$ eşitliğini kanıtlayın.

5.5.6. Her $\alpha \in \mathbb{Z}$ için, $\alpha + \alpha[0, 1] = [0, 0]$ eşitliğini kanıtlayın.

5.5.7. Her $\alpha \in \mathbb{Z}$ için, $\alpha[0, 0] = [0, 0]$ eşitliğini kanıtlayın.

5.5.8. Her $\alpha \in \mathbb{Z}$ için, $\alpha + \alpha = [2, 0]\alpha$ eşitliğini kanıtlayın.

5.5.9. $[a, b][c, d] = \alpha + \alpha$ denkleminin tamsayılarda çözümü olması için $[a, b] = \alpha + \alpha$ ya da $[c, d] = \alpha + \alpha$ denkleminin çözümü olmasının yeter ve gerek koşul olduğunu kanıtlayın. (Yani iki tamsayının çarpımının çift olması için iki tamsayıdan briinin çift olmasının yeter ve gerek koşul olduğunu kanıtlayın.)

5.6. Çarpmanın Özellikleri

Önsav 5.6. i. *Her* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ *için*,
$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma).$$
ii. $[1, 0]$ *çarpmanın* ***etkisiz elemanı****dır*, *yani her* $\alpha \in \mathbb{Z}$ *için*,
$$\alpha[1, 0] = [1, 0]\alpha = \alpha.$$
iii. *Her* $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ *için*, $\alpha\beta = \beta\alpha$.

Kanıt: Birincisi biraz uzun olabilecekse de kanıtlar son derece basit. Aynen Önsav 5.3'ün kanıtındaki gibi her şey, $\mathbb{Z}$ kümesinin ve $\mathbb{Z}$'de çarpmanın tanımlarından ve doğal sayıların daha önceki bölümlerde kanıtlanan özelliklerinden çıkar. (Eğer doğal sayıların kanıtlamayı unuttuğumuz bir özelliği varsa, okur toplamanın tanımına başvurarak bu özelliği kolaylıkla kanıtlayabilir diye umuyoruz.) □

5.7. Toplamayla Çarpmayı Harmanlayan Özellik

Toplamayla çarpmayı harmanlayan tek bir özellik vardır: Şimdi kanıtlayacağımız ***dağılma özelliği***. Bir de $[0, 0] \neq [1, 0]$ özelliği vardır ama bu çok basit.

Önsav 5.7. $[1, 0] \neq [0, 0]$ *ve her* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ *için*,
$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$
ve
$$(\beta + \gamma)\alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha.$$
Kanıt: Birinci eşitsizlik çok basit.

İkinci eşitlik birincisinden ve Önsav 5.6.iii'ten çıkar. Birinci eşitliği kanıtlayalım.

$\alpha = [a, b]$, $\beta = [c, d]$, $\gamma = [e, f]$ olacak biçimde a, b, c, d, e, f doğal sayılarını bulalım ve kanıtlamak istediğimiz eşitliğin solunu ve sağını bu doğal sayılar cinsinden yazalım:
$$\begin{aligned}\alpha(\beta + \gamma) &= [a, b]([c, d] + [e, f])\\ &= [a, b][c + e, d + f]\\ &= [a(c + e) + b(d + f), a(d + f) + b(c + e)]\end{aligned}$$
ve

$$\begin{aligned}\alpha\beta + \alpha\gamma &= [a, b][c, d] + [a, b][e, f]\\ &= [ac + bd, ad + bc] + [ae + bf, af + be]\\ &= [ac + bd + ae + bf, ad + bc + af + be].\end{aligned}$$

Demek ki

$$\begin{aligned}&[a(c + e) + b(d + f), a(d + f) + b(c + e)]\\ &\quad = [ac + bd + ae + bf, ad + bc + af + be]\end{aligned}$$

eşitliği kanıtlanmalı, ki, eğer doğal sayıların özelliklerini bildiğimizi varsayıyorsak bu çok bariz bir şey. □

Aşina olduğumuz

$$\begin{aligned}&-n(m - p) = np - nm,\\ &(-n)(-m) = nm,\\ &(-n)m = n(-m) = -nm\end{aligned}$$

gibi eşitliklerin kanıtını okura bırakıyoruz.

Alıştırmalar

5.7.1. Eğer $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ için $\alpha\beta = [0, 0]$ ise, o zaman $\alpha = [0, 0]$ ve $\beta = [0, 0]$ eşitliklerinden en az birinin doğru olması gerektiğini kanıtlayın.

5.7.2. Her $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ için, $\alpha\beta = [1, 0]$ ise

$$\alpha = \beta = [1, 0] \text{ ya da } \alpha = \beta = [0, 1]$$

eşitliklerinden birinin doğruluğunu kanıtlayın.

5.7.3. $\mathbb{Z}$'de $\alpha\beta = [2, 0]$ denklemini çözün.

5.7.4. $\mathbb{Z}$'de $\alpha\alpha = [1, 0]$ denklemini çözün.

5.7.5. $\mathbb{Z}$'de $\alpha\alpha = [0, 1]$ denkleminin çözümünün olmadığını kanıtlayın.

5.7.6. $\mathbb{Z}$'de $\alpha\alpha = [2, 0]$ denkleminin çözümünün olmadığını kanıtlayın.

5.7.7. $\mathbb{Z}$'de $\alpha\alpha = [4, 0]$ denkleminin çözüm kümesini bulun.

5.7.8. $\mathbb{Z}$'de $\alpha\alpha + \alpha + [1, 0] = [0, 0]$ denkleminin çözümü olmadığını kanıtlayın.

5.7.8. $\mathbb{Z}$'de $\alpha\alpha + \alpha + [0, 6] = [0, 0]$ denkleminin tüm çözümlerini bulun.

5.8. Buraya Kadar Özet

Yukardaki Önsav 3.i, ii, iii, 4, 6 ve 7'de kanıtladıklarımnızı özetleyelim:

Teorem 5.8. ($\mathbb{Z}$, +, ×, [0, 0], [1, 0]) *yapısı şu özellikleri sağlar*: *Her* α, β, $\gamma \in \mathbb{Z}$ *için*,

T1. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.

T2. $\alpha + [0, 0] = [0, 0] + \alpha = \alpha$.

T3. $\alpha + \alpha' = \alpha' + \alpha = [0, 0]$ *eşitliğini sağlayan bir* $\alpha' \in \mathbb{Z}$ *vardır*.

T4. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

Ç1. $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.

Ç2. $\alpha[1, 0] = [1, 0]\alpha = \alpha$.

Ç4. $\alpha\beta = \beta\alpha$.

TÇ1. $[1, 0] \neq [0, 0]$.

TÇ2. $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

Teoremdeki özellikleri sağlayan bir yapıya ***değişmeli halka*** denir. Demek ki ($\mathbb{Z}$, +, ×, [0, 0], [1, 0]) değişmeli bir halkadır.

Bu bölümün sonunda [0, 0] yerine 0, [1, 0] yerine 1 yazacağız ve o zaman T2 ve Ç2 daha doğal gözükecek.

($\mathbb{Z}$, +, ×, [0, 0], [1, 0]) halkasının her halkada bulunmayan bir özelliği vardır: [0, 0]'a eşit olmayan iki elemanın çarpımı [0, 0] olamaz. (Bkz. Alıştırma 5.7.1) Bu tür halkalara ***bölge*** (İngilizcesi *domain*) adı verilir.

Teorem Üzerine Notlar. Önce özelliklerin adlarından sözedelim:

T: Toplamayla ilgili,

Ç: Çarpmayla ilgili,

demektir. TÇ, toplama **ve** çarpmayla ilgili özellik anlamına gelir.

T1 ve Ç1 özellikleri toplamanın ve çarpmanın ***birleşmeli*** bir işlem olduğunu söylüyor. Açık açık yazılmamış ama teoremden toplamanın ve çarpmanın birer işlem olduğu anlaşılıyor, yani α, $\beta \in \mathbb{Z}$ ise, $\mathbb{Z}$'de $\alpha + \beta$ ve $\alpha\beta$ olarak yazılan elemanlar vardır.

T2, [0, 0] elemanının toplamanın, [1, 0] elemanının da çarpmanın ***etkisiz elemanı*** olduğunu söylüyor. Açık açık yazılmamış ama teorem aslında [0, 0] ve [1, 0] elemanlarının $\mathbb{Z}$'de olduğunu da söylüyor.

T4 ve Ç4, toplamayla çarpmanın değişmeli işlemler olduğunu söylüyor.

T3'teki α', α'ya göre değişir ama verilmiş bir α için bu özelliği sağlayan bir tane α' vardır. α' elemanı $-\alpha$ olarak yazılır.

Ç3 unutulmamıştır! Tam Ç3 olmasa da Ç3'ün çok benzeri bir özellik ileride tanımlayacağımız kesirli sayılar için doğru olacaktır.

T1, T2 ve T3'ü sağlayan bir $(\mathbb{Z}, +, [0, 0])$ yapısına ***grup*** denir. Bu yapı bir de T4'ü sağlarsa yapıya ***değişmeli*** ya da ***abelyen grup*** denir.

Teoremi sağlayan bir $(\mathbb{Z}, +, \times, [0, 0], [1, 0])$ yapısına ***değişmeli*** ya da ***komütatif halka*** denir. Alıştırma 5.7.1'deki özelliğini sağlayan değişmeli halkalara ***bölge*** denir. Demek ki

$$(\mathbb{Z}, +, \times, [0, 0], [1, 0])$$

yapısı bir bölgedir. Bir bölgede $ab = ac$ ve $a \neq 0$ ise $b = c$ olur. (Neden?)

5.9. Sıralama

Tamsayılarda toplama ve çarpma dışında bir de bir tamsıralama vardır. Sıra $\mathbb{Z}$'de sıralamayı tanımlamaya geldi.

$[a, b] \leq [c, d]$ eşitsizliğinin, bildiğimiz tamsayılarda

$$a - b \leq c - d$$

anlamına geleceğini defalarca söyledik. Ama eşitsizliğin tanımını

$$[a, b] \leq [c, d] \Leftrightarrow a - b \leq c - d$$

olarak veremeyiz çünkü $a - b \leq c - d$ eşitsizliği doğal sayılarla ilgili bir önerme ve doğal sayılarda çıkarma işlemimiz yok. Buna benzer bir sorunla daha önce karşılaşmıştık. $a - b \leq c - d$ eşitsizliğinin $a + d \leq c + b$ eşitsizliğine denk olduğunu biliyoruz. Bu son eşitsizlikte sadece doğal sayılar ve toplama var. Şimdi $\mathbb{Z}$'de eşitsizliğin tanımını önerebiliriz:

$$[a, b] \leq [c, d] \Leftrightarrow a + d \leq c + b.$$

Ama daha önce iki kez yaptığımız gibi, bu tanımın geçerli bir tanım olduğunu kanıtlamalıyız. Nitekim gene şöyle bir sorun olabilir: Ayşe'yle Bülent'e α ve β tamsayılarını verip bunlardan hangisinin diğerinden daha büyük olduğunu sorabiliriz. Bu sorunun yanıtını bulmak için Ayşe,

$$\alpha = [a, b] \text{ ve } \beta = [c, d]$$

olacak biçimde a, b, c, d doğal sayılarını bulur ve

$$a + d \text{ ile } c + b$$

doğal sayılarını karşılaştırır. Bülent de aynı yönteme başvurur (zaten başka yöntem de yok.) Ama Bülent, Ayşe'nin seçtiği a, b, c, d doğal sayılarını seçmek zorunda değil, Bülent

$$\alpha = [a', b'] \text{ ve } \beta = [c', d']$$

olacak biçimde a', b', c', d' doğal sayılarını seçip ve

$$a' + d' \text{ ile } c' + b'$$

doğal sayılarını karşılaştırabilir. Tanımın geçerli olması için Ayşe'yle Bülent'in karşılaştırmaları uyumlu olmak zorundadır, yani Ayşe, örneğin,

$$a + d \leq c + b$$

sonucunu bulmuşsa, Bülent de

$$a' + d' \leq c' + b'$$

sonucunu bulmalıdır. Şimdi bunu kanıtlayalım.

Önsav 5.9. *Her* $a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbb{N}$ *için, eğer* $[a, b] = [a', b']$ ve $[c, d] = [c', d']$ ise,

$$a + d \leq c + b \Leftrightarrow a' + d' \leq c' + b'.$$

Kanıt: Durum simetrik olduğundan sadece $\Rightarrow$ istikametini kanıtlamak yeterli. Demek ki,

$$a + b' = a' + b$$
$$c + d' = c' + d$$
$$a + d \leq c + b$$

önermelerini kabul edip $a' + d' \leq c' + b'$ önermesini kanıtlamalıyız. Kanıtlanacak önermenin sağına ve soluna $b + c$ eklersek dilediğimizi elde edeceğiz:

$$\begin{aligned}(a' + d') + (b + c) &= (a' + b) + (c + d') = (a + b') + (c' + d)\\ &= (a + d) + (b' + c') \leq (c + b) + (b' + c')\\ &= (b' + c') + (b + c).\end{aligned}$$

Şimdi $b + c$'leri sadeleştirip (doğal sayılarla bunu yapabileceğimizi biliyoruz) istenen $a' + d' \leq c' + b'$ eşitliğini elde ederiz. □

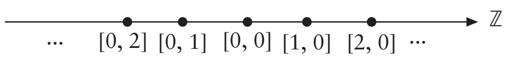
Ancak bu önsavdan sonra gönül rahatlığıyla

$$[a, b] \leq [c, d] \Leftrightarrow a + d \leq c + b$$

tanımını verebiliriz.

Alıştırmalar

5.9.1. $[0, 3] < [0, 2] < [0, 1] < [0, 0] < [1, 0] < [2, 0] < [3, 0]$ eşitsizliklerini kanıtlayın. (Burada, $\alpha < \beta$ ifadesi, $\alpha \leq \beta$ ve $\alpha \neq \beta$ anlamına gelmektedir.)



5.9.2. Hiçbir n doğal sayısı için,

$$[n, 0] < \alpha < [n + 1, 0]$$

eşitsizliklerini sağlayan bir α tamsayısının olmadığını kanıtlayın.

5.9.2. Hiçbir n doğal sayısı için, $[0, n+1] < \alpha < [0, n]$ eşitsizliklerini sağlayan bir α tamsayısının olmadığını kanıtlayın.

5.10. Sıralamanın Özellikleri

Hemen yukarda tanımladığımızın gerçekten bir sıralama olduğunu, hatta bir tamsıralama olduğunu gösterelim.

Önsav 5.10. *Her* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ *için*,

i. $\alpha \leq \alpha$.

ii. $\alpha \leq \beta$ ve $\beta \leq \alpha$ ise $\alpha = \beta$.

iii. $\alpha \leq \beta$ ve $\beta \leq \gamma$ ise $\alpha \leq \gamma$.

iv. Ya $\alpha \leq \beta$ ya $\beta \leq \alpha$.

Kanıt: Tahmin edildiği üzere her şey tanımlardan ve doğal sayıların bilinen özelliklerinden çıkacak.

$\alpha = [a, b]$, $\beta = [c, d]$, $\gamma = [e, f]$ olacak biçimde a, b, c, d, e, f doğal sayılarını bulalım.

i. Bu, $a + b = a + b$ eşitliğinden çıkıyor!

ii. Varsayımlara göre

$$a + d \le c + b \text{ ve } c + b \le a + d.$$

Demek ki $a + d = c + b$. Yani $[a, b] = [c, d]$.

iii. Varsayımlara göre

$$a + d \le c + b \text{ ve } c + f \le e + d.$$

Bu iki eşitsizliği toplarsak,

$$(a + d) + (c + f) \le (c + b) + (e + d),$$

yani

$$(a + f) + (d + c) \le (b + e) + (d + c)$$

elde ederiz. Şimdi soldaki $d + c$'leri sadeleştirebilmemiz gerekiyor. Bunu da Teorem 3.19'da yaptık, daha doğrusu okura alıştırma olarak bıraktık.

iv. $a + d \le c + b$ ve $c + b \le a + d$ eşitsizliklerinden birinin doğru olduğunu kanıtlamamız gerekiyor ki doğal sayılarla ilgili olan bu önermeyi biliyoruz. □

Tamsayıların tamsıralanması sayesinde tamsayıları soldan sağa doğru sıralanmış biçimde temsil edebiliriz. Sağdaki tamsayıların soldakilerden daha büyük oldukları varsayılır.

Tamsayılardaki sıralama "ayrık" bir sıralamadır. Her tamsayıdan hemen sonra gelen bir tamsayı ve hemen önce gelen bir tamsayı vardır. Nitekim eğer $\alpha \in \mathbb{Z}$ ise, $\alpha + [1, 0]$, α'dan daha büyüktür ve bu iki tamsayı arasında bir başka tamsayı yoktur ve $\alpha + [0, 1]$, α'dan daha küçüktür ve bu iki tamsayı arasında bir başka tamsayı yoktur. (Bunu Önsav 3.18 ile karıştırın.) Bu $\alpha + [1, 0]$ ve $\alpha + [0, 1]$ sayıları ilerde sırasıyla $\alpha + 1$ ve $\alpha - 1$ anlamına gelecekler. Aşağıdaki alıştırmalarda okurdan bunu kanıtlamasını istiyoruz.

Alıştırmalar

5.10.1. Eğer $\alpha \in \mathbb{Z}$ ise, $\alpha + [1, 0]$ tamsayısının α'dan daha büyük olduğunu ve bu iki tamsayı arasında bir başka tamsayı olmadığını kanıtlayın.

5.10.2. Eğer $\alpha \in \mathbb{Z}$ ise, $\alpha + [0, 1]$ tamsayısının α'dan daha küçük olduğunu ve bu iki tamsayı arasında bir başka tamsayı olmadığını kanıtlayın.

5.10.3. $\mathbb{Z}$'de en büyük ve en küçük elemanların olmadığını kanıtlayın.

5.10.4. Her $\alpha \in \mathbb{Z}$ için, $\alpha\alpha \geq [0, 0]$ eşitsizliğini kanıtlayın.

5.10.5. Her $\alpha \in \mathbb{Z}$ için, $\alpha\alpha \geq \alpha$ eşitsizliğini kanıtlayın.

5.11. Sıralamayla İşlemlerin İlişkisi

Şimdi herhangi bir sayıyla toplamanın ve $[0, 0]$'dan büyük (yani ***pozitif***) bir sayıyla çarpmanın sıralamaya saygı duyduğunu (yani işlem uygulanan elemanların sıralamasını bozmayacağını) kanıtlayalım.

Önsav 5.11. $\alpha \leq \beta$ *ve* γ *tamsayı olsunlar.*

i. $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$.

ii. *Eğer* $\gamma \geq [0, 0]$ *ise*, $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$.

Kanıt: $\alpha = [a, b]$, $\beta = [c, d]$, $\gamma = [e, f]$ olacak biçimde a, b, c, d, e, f doğal sayılarını bulalım. Varsayıma göre $a + d \leq c + b$.

i. $\alpha + \gamma$ ve $\beta + \gamma$ tamsayılarını a, b, c, d, e, f doğal sayıları cinsinden yazalım.

$$\alpha + \gamma = [a, b] + [e, f] = [a + e, b + f],$$
$$\beta + \gamma = [c, d] + [e, f] = [c + e, d + f].$$

İstediğimiz $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$ eşitsizliğinin doğru olması için,

$$(a + e) + (d + f) \leq (c + e) + (b + f),$$

yani

$$(a + d) + (e + f) \leq (c + b) + (e + f),$$

eşitsizliğinin doğru olması gerekiyor. Varsayıma göre $a + d \leq c + b$ eşitsizliği doğru olduğundan, bu son eşitsizlik de doğrudur [Teorem 3.19].

ii. Varsayımdaki $\gamma \geq [0, 0]$ eşitsizliği $e \geq f$ demektir. $a + d \leq c + b$ eşitsizliği dışında bir de bunu aklımızda tutalım, her ikisini de kullanacağız.

$\alpha + \gamma$ ve $\beta + \gamma$ tamsayılarını a, b, c, d, e, f doğal sayıları cinsinden yazalım.

$$\alpha\gamma = [a, b][e, f] = [ae + bf, af + be],$$
$$\beta\gamma = [c, d][e, f] = [ce + df, cf + de].$$

İstediğimiz $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$ eşitsizliğinin doğru olması için,

$$(ae + bf) + (cf + de) \leq (ce + df) + (af + be),$$

yani

$$(a + d)e + (b + c)f \leq (b + c)e + (a + d)f,$$

eşitsizliğinin doğru olması gerekiyor. $e \geq f$ olduğundan, bir g doğal sayısı için,

$$e = f + g$$

eşitliği doğrudur. Bunu kullanarak kanıtlamak istediğimiz eşitlikteki e'yi yok edelim:

$$(a + d)(f + g) + (b + c)f \leq (b + c)(f + g) + (a + d)f,$$

eşitsizliğini kanıtlamalıyız. Eşitliğin sağında ve solundaki

$$(a + b + c + d)f$$

terimleri var. Demek ki,

$$(a + d)g \leq (b + c)g$$

eşitsizliğini kanıtlamalıyız. Ama $a + d \leq c + b$ eşitsizliğini biliyoruz... İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

5.12. Özetle

Teorem 5.12. $(\mathbb{Z}, +, \times, \leq, [0, 0], [1, 0])$ *yapısı Teorem* 5.8'*deki özelliklerden başka şu özellikleri de sağlar*: *Her* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ *için*,

S1. $\alpha \leq \alpha$.

S2. $\alpha \leq \beta$ *ve* $\beta \leq \alpha$ *ise* $\alpha = \beta$.

S3. $\alpha \leq \beta$ *ve* $\beta \leq \gamma$ *ise* $\alpha \leq \gamma$.

S4. *Ya* $\alpha \leq \beta$ *ya* $\beta \leq \alpha$.

TS. *Eğer* $\alpha \leq \beta$ *ise* $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$.

ÇS. *Eğer* $\alpha \leq \beta$ *ve* $\gamma \geq [0, 0]$ *ise*, $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$.

Teorem Üzerine Notlar: Önce özelliklerin adları:

T: Toplamayla ilgili,
Ç: Çarpmayla ilgili,
S: Sıralamayla ilgili

demektir. Örneğin TS, toplama ve sıralamayla ilgili özellik anlamına gelir.

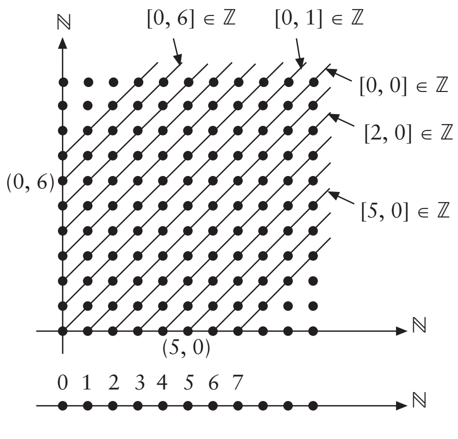
T1, T2, T3, T4, S1, S2, S3, TS'yi sağlayan bir

$$(\mathbb{Z}, +, \leq, [0, 0])$$

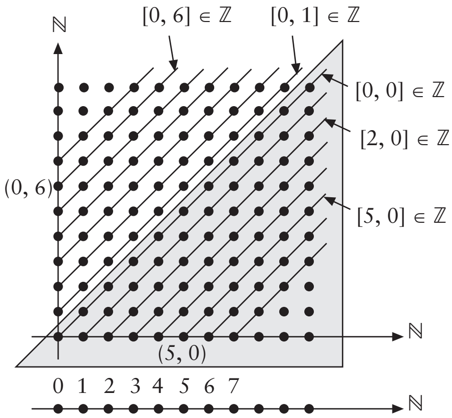
yapısına ***sıralı abelyen grup*** adı verilir. Teorem 5.8 ve 5.12'yi sağlayan bir $(\mathbb{Z}, +, \times, \leq, [0, 0], [1, 0])$ yapısına da ***sıralı halka*** denir. Sıralı halkalar bölge olmak zorundadırlar. (Neden?) Her sıralı halkada $-1 < 0 < 1$ olmak zorundadır. (Neden?)

5.13. ℕ'yi ℤ'ye Gömmek

İlkokuldan beri bize her doğal sayının bir tamsayı olduğu öğretilmiştir: Her doğal sayı bir tamsayıdır; doğal sayılar, tam tamına 0'dan büyükeşit tamsayılardır... demiştir öğretmen. Ama burada yaptığımız inşada hiç de öyle değil, hiçbir doğal sayı bir tamsayı değil, çünkü her tamsayı $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinin bir altkümesi (bkz. aşağıdaki şekil) ve hiçbiri ℕ'nin bir elemanı değil. Yani $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ ilişkisi doğru olmadığı gibi, tam tersine, $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \emptyset$ ilişkisi doğru. Aşağıdaki şekilde görüldüğü üzere...



Bu sorunu ilerde çözeceğiz ve $\mathbb{N}$ kümesi gerçekten $\mathbb{Z}$'nin altkümesi olacak; ama tabii bunun için $\mathbb{Z}$'yi ya da $\mathbb{N}$'yi (ikisinden birini) değiştirmemiz gerekecek. Şimdilik sorunu çözme yolunda bir adım atalım ve $\mathbb{Z}$'nin içinde $\mathbb{N}$'ye çok benzeyen bir altküme bulalım. Sadece küme olarak değil, toplama ve çarpma işlemleri ve sıralamalarıyla birlikte $\mathbb{N}$ ile $\mathbb{Z}$'nin bulduğumuz bu altkümesi birbirlerine benzeyecekler.



$x \in \mathbb{N}$ için, $\mathbb{Z}$'nin $[x, 0]$ elemanının ilerde $x - 0$, yani x anlamına geleceğini söylemiştik. Demek ki aslında $\mathbb{Z}$'nin hangi altkümesinin $\mathbb{N}$'ye benzeyeceğini de söylemişiz: $\mathbb{Z}$'nin yukarıda resmedilen

$$\{[x, 0] : x \in \mathbb{N}\}$$

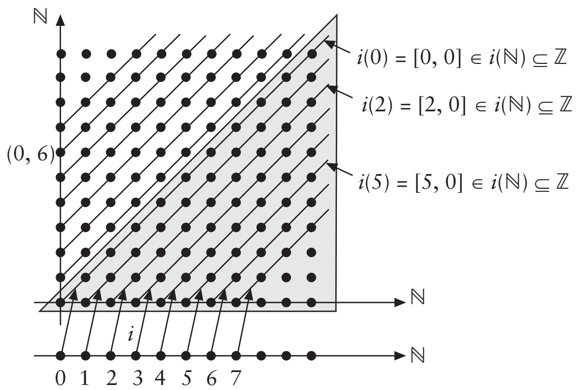
altkümesi $\mathbb{N}$'ye çok benzeyecek.

$\mathbb{N}$'den $\mathbb{Z}$'ye giden ve

$$i(x) = [x, 0]$$

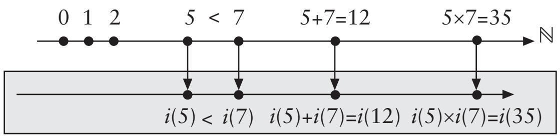
kuralıyla tanımlanan i fonksiyonu ele alalım. Bu i fonksiyonunun bir "gömme" olduğunu, yani toplamaya, çarpmaya ve sıralamaya saygı duyan birebir bir fonksiyon olduğunu kanıtlayacağız birazdan.

Önce sezgi kazanmak amacıyla fonksiyonu resmedelim.



Önsav 5.13. *i, $\mathbb{N}$'den $\mathbb{Z}$'ye giden, toplamaya, çarpmaya ve sıralamaya saygı duyan birebir bir fonksiyondur*; *yani her x, $y \in \mathbb{N}$ için*,

$$i(x + y) = i(x) + i(y),$$
$$i(xy) = i(x)i(y),$$
$$x < y \Leftrightarrow i(x) < i(y).$$



Önsav 5.13'ün resmi

Kanıt: Önce i'nin birebir olduğunu kanıtlayalım. x, $y \in \mathbb{N}$ için, $i(x) = i(y)$ olsun. Demek ki

$$[x, 0] = [y, 0],$$

yani $x + 0 = y + 0$, yani $x = y$. Böylece i'nin birebir olduğu kanıtlanmış oldu.

Eşitliklerin kanıtı da oldukça biçimsel:

$$i(x + y) = [x + y, 0]$$

ve

$$i(x) + i(y) = [x, 0] + [y, 0] = [x + y, 0].$$

Demek ki $i(x + y) = i(x) + i(y)$. Diğer iki önerme de benzer şekilde kanıtlanır. □

Önsav, $(\mathbb{N}, +, \times, <)$ yapısıyla $(i(\mathbb{N}), +, \times, <)$ yapısının birbirine çok benzediğini, aralarındaki tek farkın elemanlarının adları olduğunu söylüyor. $\mathbb{N}$'de x dediğimize $i(\mathbb{N})$'de $i(x)$ diyoruz. Bu, Ali'ye Veli, Ayşe'ye Fatma demek gibi bir şey... Teşbihte hata olmazmış. Bu benzerlik yüzünden i'ye ***gömme*** adı verilir. Gerçekten de i fonksiyonu $(\mathbb{N}, +, \times, <)$ yapısını bir anlamda $(\mathbb{Z}, +, \times, <)$ yapısının içine gömüyor.

$\mathbb{Z}$'nin $i(\mathbb{N})$ altkümesi toplama ve çarpma işlemleri altında kapalıdır elbet ama $\mathbb{Z}$'nin bu özelliğe sahip başka altkümeleri de vardır. Örneğin,

$$\{[2x, 0] : x \in \mathbb{N}\}$$

ve

$$\{[x, 0] : x \in \mathbb{N} \text{ ve } x > 5\}$$

kümeleri $\mathbb{Z}$'nin toplama ve çarpma altında kapalı altkümelerdir. Ama $i(\mathbb{N})$ altkümesi gene de $\mathbb{Z}$'nin belli bir özelliğe sahip biricik altkümesidir. Örneğin, $i(\mathbb{N})$, $\mathbb{Z}$'nin, $[0, 0]$ ve $[1, 0]$ elemanlarını içeren ve toplama altında kapalı en küçük altkümesidir. Bunun kanıtı kolaydır ve okura bırakılmıştır.

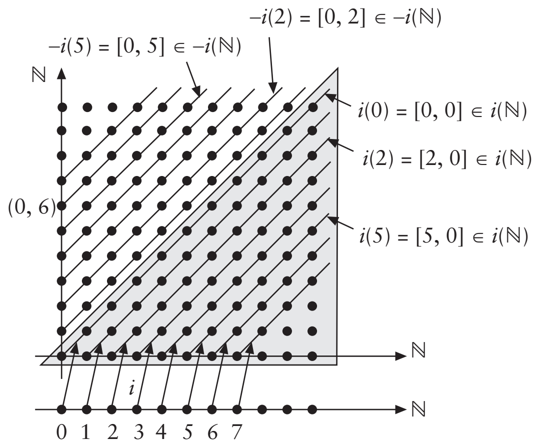
i fonksiyonun doğallığına ikna etmek amacıyla okura şu sonucu sunalım:

Önsav 5.14. *Eğer i, $\mathbb{N}$'den $\mathbb{Z}$'ye giden* ve *toplamaya* ve *çarpmaya saygı duyan bir fonksiyonsa, o zaman ya her $x \in \mathbb{N}$ için $i(x) = [0, 0]$ olur ya da her $x \in \mathbb{N}$ için $i(x) = [x, 0]$ olur.*

Konumuzun candamarını teşkil etmediğinden bu önsavı kanıtlamayıp okura bırakıyoruz. Daha canalıcı sonuçlarımız var.

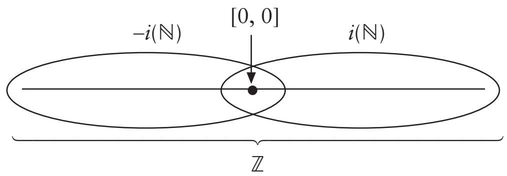
Bir sonraki önsav, ilerde, $\mathbb{Z}$'nin, doğal sayılarla doğal sayıların eksilerinden oluştuğunu söyleyecek.

Önsavın kanıtına geçmeden önce aşağıdaki resmi incelemenizi özellikle öneririz.



Önsav 5.15. *Aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.*

$$\mathbb{Z} = i(\mathbb{N}) \cup -i(\mathbb{N}) \,,$$
$$i(\mathbb{N}) \cap -i(\mathbb{N}) = \{[0, 0]\},$$
$$i(\mathbb{N}) = \{[a, b] \in \mathbb{Z} : a \geq b\},$$
$$-i(\mathbb{N}) = \{[a, b] \in \mathbb{Z} : a \leq b\}.$$



Önsav 5.15'in resmi

Kanıt: Son iki eşitliği kanıtlayalım önce. İkinci eşitlik birinciden çıktığından ($-i(\mathbb{N})$ kümesi, tanımı gereği, $i(\mathbb{N})$'deki elemanların toplamsal terslerinden oluşur), birinci eşitliği kanıtlamak yeterli. Birinci eşitliğin $\subseteq$ kısmı çok bariz. Diğer yönünü kanıtlayalım. $a \geq b$, iki doğal sayı olsun. Doğal sayılarda eşitsizliğin tanımından dolayı, bir x doğal sayısı için

$$b + x = a = a + 0$$

eşitlikleri doğrudur. Demek ki

$$[a, b] = [x, 0] = i(x) \in i(\mathbb{N}).$$

$\mathbb{Z} = i(\mathbb{N}) \cup -i(\mathbb{N})$ eşitliği son iki eşitlikten çıkar.

$i(\mathbb{N}) \cap -i(\mathbb{N}) = [0, 0]$ eşitliğini kanıtlayalım.

$$\alpha \in i(\mathbb{N}) \cap -i(\mathbb{N})$$

olsun. Demek ki $a \geq b$ ve $c \geq d$ doğal sayıları için

$$\alpha = [a, b] = [d, c].$$

Dolayısıyla $a + c = d + b$. Bu eşitlikten ve $a \geq b$ ve $c \geq d$ eşitsizliklerinden $a = b$ eşitliği çıkar. Demek ki

$$\alpha = [a, b] = [a, a] = [0, 0]. \qquad \square$$

Demek ki $\mathbb{Z}$'nin $\mathbb{N}$'ye çok benzeyen $i(\mathbb{N})$ kümesinin elemanlarından ve bu kümenin elemanlarının eksilerinden oluştuğunu kanıtladık. Şimdilik

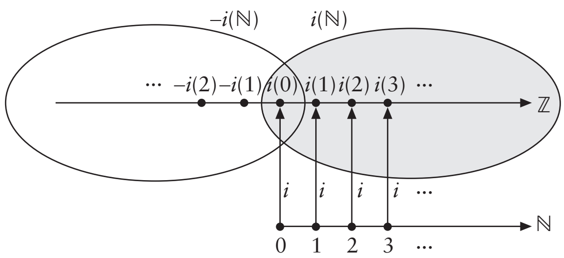
$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup -\mathbb{N} \text{ ve } \mathbb{N} \cap -\mathbb{N} = \{0\}$$

eşitliklerimiz yok ama bunun yerine bu eşitliklere çok benzeyen

$$\mathbb{Z} = i(\mathbb{N}) \cup -i(\mathbb{N}) \text{ ve } i(\mathbb{N}) \cap -i(\mathbb{N}) = \{[0, 0]\}$$

eşitliklerimiz var.

Bir sonraki bölümde, gözümüzü karartıp $i(\mathbb{N})$ ile $\mathbb{N}$'yi "özdeşleştireceğiz". Şimdilik genel resim şöyle:



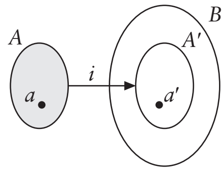
5.14. $\mathbb{N}$'yi $\mathbb{Z}$'nin İçinde Bulmak

Bu ve bundan sonraki bölümlerde $\mathbb{N}$ ile $\mathbb{Z}$'nin ayrık kümeler olma sorununu çözeceğiz. $\mathbb{N}$'yi aslında $\mathbb{Z}$'nin içinde altküme olarak bulmak istiyoruz ama şimdiye kadar yaptıklarımızdan tam tersine $\mathbb{N}$ ile $\mathbb{Z}$'nin ayrık kümeler oldukları çıkıyor. Bu üzücü duruma son vereceğiz.

Bunu “kesip yapıştırma” yöntemiyle yapacağız. Matematikte çok sık kullanılan ve adına “özdeşleştirme” denilen “kesip yapıştırma” yöntemini açıklayalım şimdi. Daha sonra esas konumuza geri döneceğiz.

5.15. Kesip Yapıştırma ya da Özdeşleştirme

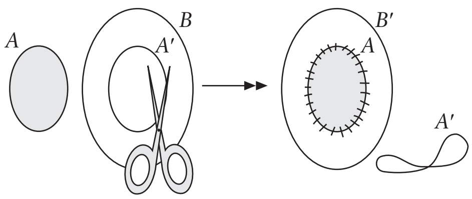
A ve B iki küme olsun. B’de A’ya “çok benzeyen” bir A' altkümesi olsun. “Çok benzemek”ten tam kastımızı açıklamayacağız, ama bu en azından A ile A' arasında bir eşleme var anlamına gelir. Duruma göre, A ve A' kümeleri arasında bir eşleme-



nin varlığından daha yakın bir ilişki de isteyebiliriz, ama aralarında en az bir eşlemenin olması şart. A kümesini B kümesinin A' altkümesi olarak görmek istiyoruz. Matematikte bu “A ile A' kümelerini özdeşleştirelim” biçiminde ifade edilir. Bu bölümde bunun tam ne anlama geldiğini ve nasıl yapılacağını açıklayacağız. Özdeşleştirme aşağı yukarı şöyle yapılır: A' kümesi itinayla kesilir ve yerine kendisine çok benzeyen A kümesi yapıştırılır ya da aşağıdaki şekildeki gibi dikilir. Böylece B kümesinden A' kaybolur ve yerine A gelir. Bunu matematiksel olarak yapmak oldukça kolay: B kümesi yerine,

$$B' = (B \setminus A') \cup A$$

kümesi almak yeterli.



Okurun aşina olduğunu düşündüğümüz bir örnek verelim. $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ olsun. $\mathbb{C}$'nin

$$\mathbb{R} \times \{0\}$$

altkümesi $\mathbb{R}$'ye çok benzediğinden, kimi durumlarda $\mathbb{R}$'yi $\mathbb{C}$'nin $\mathbb{R} \times \{0\}$ altkümesi olarak görmek isteyebiliriz. Nitekim $\mathbb{C}$'yi karmaşık sayılar kümesi olarak yorumlarsak, $\mathbb{R}$'yi $\mathbb{C}$'nin altkümesi olarak görmek istediğimizde yaptığımız budur: $\mathbb{C}$'den $\mathbb{R} \times \{0\}$ altkümesini kesip yerine $\mathbb{R}$ yapıştırırız, bir başka deyişle, $\mathbb{C}$'nin $(r, 0)$ elemanına r adı verilir.

Kimi durumlarda da $\mathbb{C}$'nin

$$\partial(\mathbb{C}) = \{(r, r) \in \mathbb{C} : r \in \mathbb{R}\}$$

altkümesi $\mathbb{R}$'ye çok benzediğinden, $\mathbb{R}$'yi $\mathbb{C}$'nin $\partial(\mathbb{C})$ altkümesi olarak görmek isteyebiliriz. Bu durumda $\mathbb{R}$'nin (r, r) elemanı r adını alır.

Tabii gerçekte $\mathbb{R} \cap \mathbb{C}$ boşkümedir...

Aslında özdeşleştirme çok basit bir konudur, anlaşılacak bir yanı yoktur ama işte bazen böyle en basit konular zihinde soru işaretleri uyandırabilirler. Küçük sinek mide bulandırı misali.

Özdeşleştirmede biraz daha ayrıntıya girelim.

Şimdiye kadar A ile A' arasında var olduğunu varsaydığımız eşlemeyi kullanmadık. Eşleme şimdi gerekecek: Diyelim B'de $+$ diye yazılan ikili bir işlem var. Bu işlemin bir benzerini B' kümesinde de tanımlamak istiyoruz. Bunun için A ile A' arasındaki bir eşlemeden yararlanacağız. Bu eşlemeye tahmin edeceğiniz nedenden $i : A \to A'$ diyelim.

B' kümesinden iki x ve y elemanının $x \oplus y$ toplamını tanımlayalım. Duruma göre birkaç şıkka ayırmalıyız:

Eğer $x, y \in B' \setminus A = B \setminus A'$ ise, o zaman x'le y'yi B'de $+$ işlemiyle toplayabiliriz. Eğer

$$x + y \in B' \setminus A = B \setminus A'$$

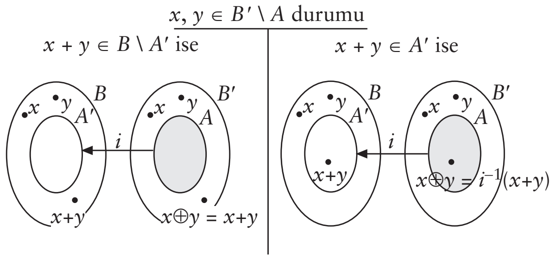
ise,

$$x \oplus y = x + y$$

olsun. Eğer $x + y \in A'$ ise,

$$x \oplus y = i^{-1}(x + y)$$

olsun. Resim aşağıda.



Eğer $x \in B' \setminus A = B \setminus A'$ ve $y \in A$ ise, x ile $i(y)$'yi B'de $+$ işlemiyle toplayabiliriz. Eğer

$$x + i(y) \in B' \setminus A = B \setminus A'$$

ise,

$$x \oplus y = x + i(y)$$

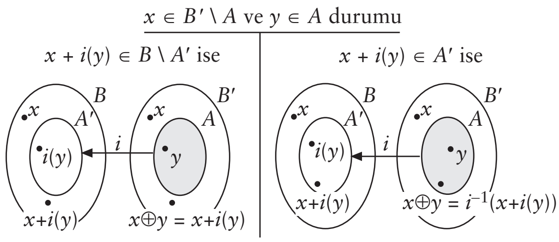
olsun. Eğer

$$x + i(y) \in A'$$

ise,

$$x \oplus y = i^{-1}(x + i(y))$$

olsun. Resim aşağıda.



Eğer $x \in A$ ve $y \in B' \setminus A = B \setminus A'$ ise, $i(x)$ ile y'yi B'de $+$ işlemiyle toplayabiliriz. Eğer

$$i(x) + y \in B' \setminus A = B \setminus A'$$

ise, o zaman,

$$x \oplus y = i(x) + y$$

olsun. Eğer $i(x) + y \in A'$ ise, o zaman,

$$x \oplus y = i^{-1}(i(x) + y)$$

olsun. Resim yapmıyoruz.

Eğer $x, y \in A$ ise, $i(x)$ ile $i(y)$'yi B'de + işlemiyle toplayabiliriz. Eğer

$$i(x) + i(y) \in B' \setminus A = B \setminus A'$$

ise,

$$x \oplus y = i(x) + i(y)$$

olsun. Eğer

$$i(x) + i(y) \in A'$$

ise,

$$x \oplus y = i^{-1}(i(x) + i(y))$$

olsun. Gene resim yok.

Yapılanları takip edebildiniz mi bilmiyorum, ama çok basit bir şey yaptık. B' kümesinde B'nin toplamasının aynısını yapmak istiyoruz, zorda kaldığımızda i'yi kullanarak A ile A' arasında geçiş yapıyoruz. Yapılan şey aslında B'deki $a' \in A'$ elemanları yerine A'daki $a = i^{-1}(a')$ elemanlarını kullanmak, yani birdenbire A' kümesinin elemanlarının adlarını değiştirmek.

Bu, matematikte çok sık kullanılan bir yöntemdir. Kaliteli matematik kitaplarında sık sık buna rastlayacaksınız.

Çoğu zaman A'da da bir toplama işlemi vardır ve i, A ile A' arasında toplamayı koruyan bir eşlemedir. Böylece $(A, +)$ yapısını $(A', +)$ yapısıyla özdeşleştirmiş oluruz.

Eğer A'da ve B'de daha zengin bir matematiksel yapı varsa, i'nin bu yapıya saygı duymasını isteriz.

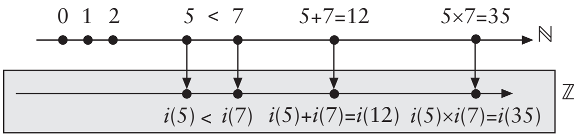
Bir önceki bölümdeki $i : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu da aynen böyle bir fonksiyon: Birebir, toplamaya ve çarpmaya ve sıralamaya saygı duyuyor. Birazdan yukardaki yöntemle $\mathbb{N}$ ile $i(\mathbb{N})$'yi özdeşleştireceğiz.

5.16. Nihayet Yılların $\mathbb{Z}$'si

i gömmesini kullanarak $\mathbb{N}$ ile $\mathbb{Z}$'nin $i(\mathbb{N})$ altkümesini özdeşleştireceğiz ve insanlığın yüzyıllardır bildiği, hissettiği, kullandığı $\mathbb{Z}$'ye kavuşacağız.

Bundan böyle her $x \in \mathbb{N}$ için, $\mathbb{Z}$'nin $i(x) = [x, 0]$ elemanını x olarak yazacağız. Böylece $\mathbb{N}$'yi $\mathbb{Z}$'nin içinde bulacağız. Yapay bir biçimde olsa da...

Böyle yapmakla $\mathbb{N}$'deki toplamayı, çarpmayı ve sıralamayı değiştirmemiş olacağız, örneğin $5 + 7$ toplamı eski $\mathbb{N}$ yapısında 12 yapıyorsa, $\mathbb{Z}$'de de 12 yapacak, çünkü *i* toplamaya saygı duyuyor. Eski şeklimizi bellek tazelemek için yeniden gösterelim:



Demek ki artık $[0, 0] = i(0)$ elemanı yerine 0, $[1, 0] = i(1)$ elemanı yerine 1, $[2, 0] = i(2)$ elemanı yerine 2, $[0, 1] = -i(1)$ elemanı yerine -1, $[0, 2] = -i(2)$ elemanı yerine -2 yazacağız.

Önsav 5.15'te kanıtladığımız

$$\mathbb{Z} = i(\mathbb{N}) \cup -i(\mathbb{N}) \text{ ve } i(\mathbb{N}) \cap -i(\mathbb{N}) = \{[0, 0]\}$$

eşitlikleri şimdi artık

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup -\mathbb{N} \text{ ve } \mathbb{N} \cap -\mathbb{N} = \{0\}$$

eşitlikleri halini almış oldu.

Teorem 5.12'de

$$(\mathbb{Z}, +, \times, \leq, [0, 0], [1, 0])$$

yapısının sıralı bir halka olduğunu kanıtlamıştık. Artık, doğal sayıları da içeren

$$(\mathbb{Z}, +, \times, \leq, 0, 1)$$

sıralı halkasından sözedeceğiz.

5.17. $\mathbb{Z}$'yi Belirleyen Özellik

Ne dediği anlaşıldığında aşağıdaki teoremin kanıtı çok kolaydır. (Ama ne dediğini anlamak da kolay değildir!)

Teorem 5.16. *Pozitif elemanları doğal sayılar yapısına eşyapısal olan her sıralı halka $\mathbb{Z}$'ye eşyapısaldır.*

Bu teoremde doğal sayılar yapısını Bölüm 2'de inşa ettiğimiz gibi P1 ve P2'yi sağlayan $(\mathbb{N}, 0, S)$ yapısı olarak alırsak, o zaman Teorem 3B.1'den dolayı $\mathbb{Z}$ sıralı halkasının kümeler kuramında biricik olduğu çıkar. Ama doğal sayılar yapısını Bölüm 4'te inşa ettiğimiz gibi PA1, PA2, PA3, PA4 önermelerini sağlayan bir $(\mathbb{N}, 0, S, +, \times)$ yapısı olarak alırsak, o zaman PA önermelerini sağlayan her yapı için ayrı bir $\mathbb{Z}$ buluruz. Bir başka deyişle, teoremin anlamı, $\mathbb{Z}$'yi inşa etmek için hangi doğal sayılar yapısından başlandığına göre değişir.

Bu arada (bilinen bir teoreme göre), her doğal sayı en fazla dört karenin toplamı olarak yazılabildiğiniden, $\mathbb{Z}$'de sıralama toplama ve çarpmayla tanımlanabilir:

$$x \leq y \Leftrightarrow \exists a\ \exists b\ \exists c\ \exists d\ y = x + a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$