3. Doğal Sayılarda Toplama, Çarpma ve Sıralama

Geçen bölümde, P1 ve P2 özelliklerini sağlayan $(\mathbb{N}, S, 0)$ matematiksel yapısının varlığını kanıtlamıştık. Anımsayalım:

$\mathbb{N}$ bir kümedir.
0, $\mathbb{N}$ kümesinin bir elemanıdır, ve
$S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bir fonksiyondur;

ayrıca $(\mathbb{N}, 0, S)$ üçlüsü şu iki özelliği sağlar:

P1. S birebir bir fonksiyondur ve 0 değerini almaz (ama diğer tüm değerleri alır, bkz. Önsav 2.6).

P2. A, $\mathbb{N}$'nin,

(i) $0 \in A$, ve
(ii) $x \in A$ ise $Sx \in A$

özelliklerini sağlayan bir altkümesiyse, o zaman, $A = \mathbb{N}$ olur.

"Doğal sayı sistemi" ya da yapısı yukardaki özellikleri sağlayan matematiksel bir yapıdır.

Bu bölümde $(\mathbb{N}, S, 0)$ yapısında toplamayı, çarpmayı ve sıralamayı tanımlayıp, bunların hepimizin bildiği eşitlikleri ve ilişkileri sağladığını göstereceğiz.

3.1. Toplama

Toplamayı tanımlamak için, doğru olmasını istediğimiz,
$$n + 0 = n$$
ve
$$n + (m + 1) = (n + m) + 1,$$
yani
$$n + Sm = S(n + m)$$
eşitliklerini kullanacağız.

Tanım Denemesi. n ve p iki doğal sayı olsun. Bu iki sayının toplamını tanımlayacağız. Tanımlayacağımız toplamı $n + p$ olarak yazacağız. Eğer $p = 0$ ise $n + p$ doğal sayısı n olarak tanımlanır. Eğer $p \neq 0$ ise, P1'den ve Önsav 2.6'dan dolayı bir ve bir tek $m \in \mathbb{N}$ için, $p = Sm$ eşitliği doğrudur; bu durumda $n + p$ toplamı $S(n + m)$ doğal sayısı olarak tanımlanır. Bir başka deyişle toplamanın tanımı şöyledir:
$$n + 0 = n,$$
$$n + Sm = S(n + m).$$
Bu tanım iki soruna gebe.

Çözümü Kolay Bir Sorun. Bölüm 1E'de ortaya konan sorun burada da belirir ama bu sorunu çözmek o kadar zor değildir, sorunu çözmek için Temellendirme Aksiyomu'na gerek yoktur. Nitekim, P1'den dolayı $Sm = Sm_1$ ise $m = m_1$ olur ve dolayısıyla
$$n + Sm = S(n + m) = S(n + m_1) = n + Sm_1$$
olur.

Daha Ciddi Bir Sorun. Tanımda genellikle gözden kaçan çok daha ciddi bir sorun vardır. Anlatalım: Yukardaki tanımdan, her n ve p sayısı için $n + p$ diye bir sayısının gerçekten tanımlandığı çıkmaz. Eğer $p = 0$ ise, $n + p$ toplamının n olması gerektiğini biliyoruz, burada bir sorun yok. Ama eğer $p \neq 0$ ise önce p'yi bir m doğal sayısı için Sm olarak yazmak gerekir:

$$n + p = n + Sm = S(n + m)$$

eşitliklerinden sonra $n + m$ sayısını hesaplamak lazım. Eğer $m = 0$ ise sorun yok: $n + m = n + 0 = n$. Ancak $m \neq 0$ ise, $n + m$ sayısını hesaplayabilmek için, $m = Sm'$ eşitliğini sağlayan bir m' bulmalı. Öyle bir m' sayısının olduğunu biliyoruz. Bulalım öyle bir m' sayısı. Şimdi,

$$n + p = n + Sm' = S(n + m')$$

eşitliklerinden $n + m'$ sayısını hesaplamak gerektiği anlaşılır. Eğer $m' = 0$ ise gene bir sorun yok, ama eğer $m' \neq 0$ ise, $n + m'$ sayısını hesaplamak için $m' = Sm''$ eşitliğini sağlayan bir m'' sayısı bulmalı. Şimdi,

$$n + m' = n + Sm'' = S(n + m'')$$

çıkar. $n + m''$ toplamını hesaplamalıyız. Eğer $m'' = 0$ ise gene bir sorun yok, ama eğer $m'' \neq 0$ ise, $n + m''$ sayısını hesaplamak için $m'' = Sm'''$ eşitliğini sağlayan bir m''' sayısı bulmalı... Bu böylece devam eder. Ta ki 0'a rastlayana dek... Eğer rastlarsak tabii...

Sonlu bir zaman sonra 0'a rastlasak $n + m$ toplamını tanımlayacağız ama bundan emin olamayız. Yukardaki süreç sonsuza dek de sürebilir... Sürmemesi gerektiğini biliyoruz, ama kanıtlanması gerekir...

Bu ve bu tür nerdeyse ince sorunların farkında olmadan da matematik yapılır, yapılmaz değil, yapılıyor da, ama matematiğin bu ince noktalarından haberdar olmak insana bir başka keyif verir, bir başka boyut katar.

Bu sorunun altından şöyle kalkılır: Toplamayı yukarda önerdiğimiz biçimde değil, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinden $\mathbb{N}$ kümesine giden bir + fonksiyonu olarak tanımlayacağız. Böylece her n ve m doğal sayıları için $n + m$ doğal sayısını + fonksiyonunun (n, m) çiftinde aldığı değer olarak tanımlanacak. Yani $n + m$ toplamı $+(n, m)$ olarak tanımlanacak.

Yukarda önerilen sistem aslında doğal sayıların toplamasını teker teker tanımlıyor: Büyük sayıları toplamak için küçük sayıların toplamını bilmek gerekiyor ve başlangıç noktasına ulaşacağımıza emin olamadığımızdan bu tanımın gerçekten toplamayı tanımlayıp tanımlamadığına emin olamıyoruz. Önerdiğimiz yeni yöntemle **tüm** doğal sayıları toplamasını tek bir hareketle, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinden $\mathbb{N}$ kümesine giden bir fonksiyon olarak tanımlayacağız.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinden $\mathbb{N}$ kümesine giden bir fonksiyon, aslında $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N}$, yani $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinin bir T grafiği için $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathbb{N}, T)$ üçlüsüdür. Şimdi bu T grafiğinin arayışına girişelim.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinin aşağıdaki T1 ve T2 özelliklerini sağlayan bir X altkümesine ***toplamsal*** diyelim.

T1. Her $n \in \mathbb{N}$ için $(n, 0, n) \in X$,

T2. Eğer $(n, m, p) \in X$ ise, o zaman $(n, Sm, Sp) \in X$.

T1, $n + 0 = n$ demek istiyor ama başka bir m için $(n, 0, m) \in X$ ise bu isteği yerine gelemiyor. Aynı şekilde T2, $n + m = p$ ise, $n + Sm = Sp$ eşitliğini istiyorum diyor, ama Sp'den değişik q için $(n, Sm, q) \in X$ oluyorsa bu isteğini pek gerçekleştiremiyor.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinin kendisi toplamsaldır elbette. Demek ki en azından bir küme toplamsal. En küçüğünü bulacağız.

Alıştırmalar

1. $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus \{(2, 0, 1)\}$ kümesinin tümevarımsal olduğunu kanıtlayın.

2. $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus \{(2, 1, 4)\}$ kümesinin tümevarımsal olmadığını kanıtlayın.

3. $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus \{(2, 0, 3), (2, 1, 4)\}$ kümesinin tümevarımsal olduğunu kanıtlayın.

4. (1, 1, 3)'i içermeyen en büyük tümevarımsal küme olduğunu kanıtlayın ve bu kümeyi bulun.

5. Her tümevarımsal kümenin (2, 3, 5)'i içermek zorunda olduğunu kanıtlayın.

Eğer ilkokuldan beri sezgisel olarak bildiğimiz toplama işlemini $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinden $\mathbb{N}$ kümesine giden bir fonksiyon olarak tanımlayabilseydik, o zaman bu fonksiyonun grafiği, yani

$$\{(n, m, n+m) : n, m \in \mathbb{N}\}$$

kümesi toplamsal bir küme olacaktı; ayrıca biraz düşününce anlaşılacağı gibi bu grafik en küçük toplamsal küme olmalı (yani her toplamsal kümenin bir altkümesi olmalı.)

Toplamsal kümelerin kesişimi toplamsal olduğundan (bunun kanıtı kolay), tüm toplamsal kümelerin kesişimi de toplamsaldır, ve elbette bu kesişim en küçük toplamsal kümedir. En küçük toplamsal kümeye T diyelim.

Teorem 3.1. *Tüm toplamsal kümelerin kesişimi gene toplamsal bir kümedir. Bu en küçük toplamsal kümeye T diyelim. T, $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinin bir grafiğidir, yani her $n, m \in \mathbb{N}$ için, $(n, m, p) \in T$ ilişkisini sağlayan bir ve bir tane p vardır. Ayrıca, eğer bu biricik p'ye $n + m$ adını verirsek, her n ve m için,*

$$n + 0 = n$$
$$n + Sm = S(n + m)$$

eşitlikleri geçerlidir.

Kanıt: T, tüm toplamsal kümelerin kesişimi olsun. $n \in \mathbb{N}$ olsun.

a) **En Küçük Toplamsal Küme.** Tanıma göre, $(n, 0, n)$ tüm toplamsal kümelerde olduğundan kesişimdedir de, yani T'dedir. Dolayısıyla T, T1'i sağlıyor. Şimdi $(n, m, p) \in T$ olsun. Demek ki (n, m, p) tüm toplamsal kümelerde. Demek ki (n, Sm, Sp) de tüm toplamsal kümelerde. Dolayısıyla $(n, Sm, Sp) \in T$. Dolayısıyla T, T2'yi de sağlıyor.

Şimdi T'nin bir fonksiyonun grafiği olduğunu gösterelim. Yani her $n, m \in \mathbb{N}$ için, $(n, m, p) \in T$ içindeliğini sağlayan bir ve bir tane $p \in \mathbb{N}$ olduğunu gösterelim. Önce p'nin varlığını, sonra da biriciliğini gösterelim.

b) Varlığın Kanıtı: Önce, verilmiş n ve m doğal sayılari için,

$$(n, m, p) \in T$$

içindeliğini sağlayan bir p doğal sayısının varlığını kanıtlayalım, daha çetrefilli olan p'nin biricikliğini daha sonraya bırakıyoruz. Varlığı m üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. Kanıtlayacağımız $\varphi(m)$ önermesi şu:

$$\forall n\ \exists p\ (n, m, p) \in T.$$

Başlangıç Adımı. $m = 0$ olsun. n herhangi bir doğal sayı ise, $(n, 0, n) \in T$ içindeliğini biliyoruz. Demek ki $p = n$ alabiliriz. Bundan da $\varphi(0)$'ın doğruluğu çıkar.

Tümevarım Adımı. Şimdi $m \in \mathbb{N}$ olsun ve $\varphi(m)$ önermesini doğru varsayıp $\varphi(Sm)$ önermesini kanıtlayalım. $n \in \mathbb{N}$ sabitlensin. $\varphi(m)$ önermesini varsaydığımızdan, öyle bir p vardır ki,

$$(n, m, p) \in T.$$

olur. T toplamsal olduğundan, o zaman

$$(n, Sm, Sp) \in T$$

içindeliği sağlanır. $\varphi(Sm)$ önermesi kanıtlanmıştır.

Demek ki her n ve her m için $(n, m, p) \in T$ içindeliğini sağlayan bir p vardır.

c) Biricikliğin Kanıtı: Şimdi, verilmiş n ve m doğal sayılari için,

$$(n, m, p) \in T$$

içindeliğini sağlayan p doğal sayısının biricikliğini kanıtlayalım. Biricikliği de m üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. Kanıtlayacağımız $\psi(m)$ önermesi şu:

$$\forall n\ \forall p\ \forall p'\ (((n, m, p) \in T \wedge (n, m, p') \in T) \to p = p').$$

Başlangıç Adımı. Önce $\psi(0)$ önermesini kanıtlayalım. $n_0 \in \mathbb{N}$ rastgele bir doğal sayı olsun. T toplamsal olduğundan, $(n_0, 0, n_0)$ üçlüsünün T'de olduğunu biliyoruz. Bir de ayrıca, bir çelişki elde etmek amacıyla, $p \neq n_0$ için $(n_0, 0, p)$ üçlüsünün de T'de olduğunu varsayalım.

$$T' = T \setminus \{(n_0, 0, p)\}$$

olsun. $T' \subset T$ olduğundan, T' toplamsal bir küme olmamalı; ama öyle olduğunu kanıtlayacağız!

Her $n \in \mathbb{N}$ için $(n, 0, n) \in T$. Ama $p \neq n_0$ olduğundan,

$$(n, 0, n) \neq (n_0, 0, p),$$

yani

$$(n, 0, n) \in T \setminus \{(n_0, 0, p)\} = T'$$

olmalı. Demek ki T' kümesi T1 özelliğini sağlıyor.

Şimdi (n, m, p) üçlüsünün T' kümesinde olduğunu varsayalım. $T' \subset T$ olduğundan,

$$(n, m, p) \in T$$

olur. T toplamsal olduğundan,

$$(n, Sm, Sp) \in T$$

olur. Ama $Sm \neq 0$ olduğundan (P1 özelliği),

$$(n, Sm, Sp) \neq (n_0, 0, p).$$

Demek ki,

$$(n, Sm, Sp) \in T \setminus \{(n_0, 0, p)\} = T'.$$

T2 özelliğinin de T' için doğru olduğunu kanıtladık. Yani T' toplamsal bir küme. Bir çelişki.

Tümevarım Adımı: $m_0 \in \mathbb{N}$ olsun ve $\psi(m_0)$ önermesini varsayıp $\psi(Sm_0)$ önermesini kanıtlayalım. n_0 rastgele bir doğal sayı olsun. Kanıtın birinci kısmından dolayı, bir p_0 doğal sayısı için

$$(n_0, m_0, p_0) \in T$$

içindeliği doğrudur. T toplamsal olduğundan,

$$(n_0, Sm_0, Sp_0) \in T$$

içindeliği de doğrudur. Bir çelişki elde etmek amacıyla bir

$$p_1 \neq Sp_0$$

için,

$$(n_0, Sm_0, p_1) \in T$$

içindeliğini varsayalım.

$$T' = T \setminus \{(n_0, Sm_0, p_1)\}$$

olsun. $T' \subset T$ olduğundan, T' toplamsal bir küme olmamalı; ama öyle olduğunu kanıtlayacağız!

Her $n \in \mathbb{N}$ için $(n, 0, n) \in T$. Ama $Sm_0 \neq 0$ olduğundan,
$$(n, 0, n) \neq (n_0, Sm_0, p_1),$$
yani
$$(n, 0, n) \in T \setminus \{(n_0, Sm_0, p_1)\} = T'$$
olmalı. Demek ki T' kümesi T1 özelliğini sağlıyor.

Şimdi (n, m, p) üçlüsünün T' kümesinde olduğunu varsayalım. $T' \subset T$ olduğundan,
$$(n, m, p) \in T$$
olur. T toplamsal olduğundan,
$$(n, Sm, Sp) \in T$$
olur.

Bir an için $(n, Sm, Sp) = (n_0, Sm_0, p_1)$ eşitliğini varsayalım. O zaman
$$n = n_0,$$
$$Sm = Sm_0,$$
$$Sp = p_1$$
olur. İkinci eşitlik, P1'den dolayı
$$m = m_0$$
verir. Demek ki
$$(n_0, m_0, p) = (n, m, p) \in T.$$
Ama aynı zamanda,
$$(n_0, m_0, p_0) \in T.$$
$\psi(m_0)$ önermesi doğru olduğundan, bundan,
$$p = p_0$$
ve
$$p_1 = Sp = Sp_0$$
çıkar. Çelişki. Demek ki
$$(n, Sm, Sp) \neq (n_0, Sm_0, p_1).$$
Yani
$$(n, Sm, Sp) \notin T \setminus \{(n_0, Sm_0, p_1)\} = T'$$
olur. T' kümesinin toplamsal olduğunu kanıtladık. Bu da elde etmek istediğimiz nihai çelişkidir.

d) Son olarak, teoremin en sonundaki iki eşitliğin doğru olduğunu kanıtlayalım.

$(n, 0, n) \in T$ olduğundan, teoremin önermesindeki tanıma göre, $n + 0 = n$ olmalı.

Gene tanıma göre, $(n, m\ n + m) \in T$ içindeliğini biliyoruz. T toplamsal olduğundan, bundan,

$$(n, Sm, n + Sm) \in T$$

çıkar. Yani $n + Sm = S(n + m)$. □

Kanıt belki uzun ve meşakkatli ama her şey yerli yerine oturdu. Bundan böyle doğal sayılardan ve doğal sayıların toplamından matematiksel anlamda sözedebiliriz.

3.2. Toplamanın Özellikleri

0'ın toplamanın sağdan etkisiz eleman olduğunu biliyoruz: $n + 0 = n$. Şimdi 0'ın soldan da etkisiz eleman olduğunu kanıtlayalım.

Önsav 3.2 [Etkisiz Eleman]. *Her* $m \in \mathbb{N}$ *için*, $0 + m = m$.

Kanıt: Önsavdaki eşitliği m üzerinden tümevarımla kanıtlayacağız.

Birinci Adım: Önsavı $m = 0$ için, yani $0 + 0 = 0$ eşitliğini kanıtlamalıyız. Ama bunun doğru olduğunu tanımdan biliyoruz. (Yukardaki teoremdeki birinci eşitlikte $n = 0$ alın.)

Tümevarım Adımı: Önsavın m için doğru olduğunu varsayıp, yani $0 + m = m$ eşitliğini varsayıp (tümevarım varsayımı), teoremin Sm için doğru olduğunu, yani $0 + Sm = Sm$ eşitliğini kanıtlamalıyız. Tek bir satırla kanıtlayabiliriz bunu:

$$0 + Sm = S(0 + m) = Sm.$$

Birinci eşitlik toplamanın tanımından, ikinci eşitlik tümevarım varsayımından ileri geliyor. □

Bu sonuç $0 + m = m + 0$ eşitliğini veriyor. Birazdan
$$n + m = m + n$$
değişme özelliğini kanıtlayacağız.

1'in $S0$ olarak tanımlandığını anımsatırız. Teorem 3.1'deki eşitliklerden dolayı, her $n \in \mathbb{N}$ için,
$$Sn = S(n + 0) = n + S0 = n + 1,$$
yani Sn, beklendiği üzere, $n + 1$ sayısına eşit:
$$Sn = n + 1.$$

Toplamayla ilgili başka sonuçlar gündemimizde.

Gereksiz görülebilecek aşağıdaki önsavın yegâne işlevi bir sonraki teoremin kanıtında kullanılmak olacak! Masa başında önce Teorem 3.4'ü kanıtlamaya çalıştık. Tıkandığımız yerde Önsav 3.3'e ihtiyacımız olduğunu gördük. Tabii kitabı yazarken, akademik dürtülerden dolayı düşünme sürecini ters çevirdik.

Önsav 3.3. *Her n, $m \in \mathbb{N}$ için, $m + Sn = Sm + n$.*

Kanıt: n üzerinden tümevarımla kanıtlayacağız. Eğer $n = 0$ ise,
$$m + Sn = m + S0 = S(m + 0) = Sm = Sm + 0 = Sm + n$$
ve bu durumda kanıt tamam.

Şimdi, her m için, $m + Sn = Sm + n$ eşitliğini varsayıp (tümevarım varsayımı), her m için,
$$m + SSn = Sm + Sn$$
eşitliğini kanıtlayalım:
$$m + SSn = S(m + Sn) = S(Sm + n) = Sm + Sn.$$
Kanıtımız tamamlanmıştır. □

Teorem 3.4 [Değişme Özelliği]. *Her n, $m \in \mathbb{N}$ için,*
$$n + m = m + n.$$

Kanıt: m üzerinden tümevarım yapacağız.

Birinci Adım: Eğer $m = 0$ ise, toplamanın tanımından ve Önsav 2'den, $n + 0 = n = 0 + n$ çıkar.

Tümevarım Adımı: Önsavın m için doğru olduğunu, yani her $n \in \mathbb{N}$ için $n + m = m + n$ eşitliğini varsayıp (tümevarım var-

sayımı), önsavı Sm için kanıtlayacağız, yani her $n \in \mathbb{N}$ için
$$n + Sm = Sm + n$$
eşitliğini kanıtlayacağız:
$$n + Sm = S(n + m) = S(m + n) = m + Sn = Sm + n.$$
Burada, sırasıyla, toplamanın tanımını, tümevarım varsayımını, tekrar toplamanın tanımını ve Önsav 3'ü kullandık. □

Teorem 3.5 [Birleşme Özelliği]. *Her n, m, $p \in \mathbb{N}$ için,*
$$(n + m) + p = n + (m + p).$$
Kanıt: p üzerinden tümevarımla kanıtlayacağız.

Birinci Adım: Eğer $p = 0$ ise,
$$\begin{aligned}(n + m) + p &= (n + m) + 0 = n + m\\ &= n + (m + 0) = n + (m + p)\end{aligned}$$
ve bu durumda kanıt tamam.

Tümevarım Adımı: Kanıtı doğrudan veriyoruz:
$$\begin{aligned}(n + m) + Sp &= S((n + m) + p) = S(n + (m + p))\\ &= n + S(m + p) = n + (m + Sp).\end{aligned}$$
□

Teorem 5'e göre, toplama yaparken parantez koymak gereksizdir. $(n + m) + p$ ve $n + (m + p)$ yerine $n + m + p$ yazabiliriz. Aynı şey 4 ya da daha fazla doğal sayı toplarken de geçerlidir. (Bu son dediğimiz tümevarımla kanıtlanır ve kanıt sanıldığı kadar kolay değildir. Bkz Bourbaki.)

Önsav 3.6 [Sadeleşme, birinci adım]. *Her n, $m \in \mathbb{N}$ için, eğer $n + m = n$ ise $m = 0$'dır.*

Kanıt: n üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. $n = 0$ ise Önsav 3.2 istediğimizi verir. Şimdi n için önermenin (her m için) doğru olduğunu varsayalım. Diyelim $Sn + m = Sn$. O zaman, toplamanın değişme özelliğine göre,
$$Sn = Sn + m = m + Sn = S(m + n) = S(n + m)$$
olur. P1'den dolayı
$$n = n + m$$
olur ve tümevarımla $m = 0$ sonucuna varırırz. □

Teorem 3.7 [Sadeleşme]. *Her* $n, m, p \in \mathbb{N}$ *için, eğer*

$$n + m = n + p$$

ise $m = p$ *olur.*

Kanıt: p üzerine tümevarımla. Eğer $p = 0$ ise, istediğimiz Önsav 3.6'dan çıkar. Şimdi teoremin p için doğru olduğunu varsayalım. Diyelim

$$n + m = n + Sp.$$

Eğer $m = 0$ ise, Önsav 3.6'dan dolayı $Sp = 0$ olur, ki bu mümkün değildir. Demek ki $m \neq 0$. Dolayısıyla bir $m' \in \mathbb{N}$ için $Sm' = m$ olur. Bundan,

$$S(n + m') = n + Sm' = n + m = n + Sp = S(n + p)$$

çıkar. Bundan ve P1'den

$$n + m' = n + p$$

bulunur. Tümevarımla,

$$m' = p$$

elde ederiz. Yani

$$m = Sm' = Sp.$$

Teoremimiz kanıtlanmıştır. □

Alıştırmalar

1. n ve m doğal sayıları için $n + m = 0$ ise $n = m = 0$ eşitliklerini kanıtlayın.

2. Her doğal sayısının bir n doğal sayısı için ya $n + n$ biçiminde ya da $n + n + 1$ biçiminde yazılabileceğini ama iki biçimde birden (değişik n'ler olabilir) yazılamayacağını kanıtlayın.

3. Her n ve m doğal sayıları için $n + p = m$ ya da $m + p = n$ eşitliğini sağlayan bir p doğal sayısının varlığını kanıtlayın. Her iki eşitlik birden (belki ayrı p'ler için) ne zaman sağlanır?

3.3. Çarpma

Çarpmayı tanımlamak için, doğru olmasını istediğimiz,

$$n \times 0 = 0$$

$$n \times (m + 1) = (n \times m) + n$$

eşitliklerini kullanacağız. Yukarda yaptıklarımızdan toplamayı biliyoruz ve çarpmanın tanımında toplamayı kullanabiliriz.

Tanım Denemesi. n ve m iki doğal sayı olsun. Eğer $m = 0$ ise $n \times m$ doğal sayısı 0 olarak tanımlanır. Eğer $m \neq 0$ ise, o zaman, bir ve bir tek $m' \in \mathbb{N}$ için, $m = Sm'$ eşitliği doğrudur ve bu durumda $n \times m$ sayısı $n\times m' + n$ olarak tanımlanır[2]. Bir başka deyişle çarpmanın tanımı şöyle olmalıdır:

$$n \times 0 = 0$$
$$n \times Sm = n \times m + n.$$

Gene Hile Yaptık! Toplamada da olduğu gibi, çarpmanın tanımını böyle yaparsak küçük ama matematiksel düşünce açısından önemli bir noktayı atlamış oluruz. Bu tanımla $n \times m$ çarpımını her zaman var olduğunu kanıtlayamayız.

Bu sorun'un altından şöyle kalkılır: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinin aşağıdaki özellikleri sağlayan bir X altkümesine ***çarpımsal*** diyelim.

Ç1. Her $n \in \mathbb{N}$ için $(n, 0, 0) \in X$,

Ç2. Eğer $(n, m, p) \in X$ ise, o zaman $(n, Sm, p + n) \in X$.

Örneğin $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinin kendisi çarpımsaldır.

Eğer çarpmayı $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinden $\mathbb{N}$ kümesine giden bir fonksiyon olarak tanımlayabilseydik, o zaman çarpmanın grafiği yani

$$\{(n, m, n\times m) : n, m \in \mathbb{N}\}$$

kümesi çarpımsal bir küme olacaktı; ayrıca biraz düşününce anlaşılacağı gibi çarpmanın grafiği en küçük çarpımsal küme olacaktı (yani her çarpımsal kümenin bir altkümesi olacaktı.) Dolayısıyla çarpmayı tanımlayacağımıza çarpma fonksiyonunun grafiğini (en küçük çarpımsal küme olarak) tanımlayacağız.

Çarpımsal kümelerin kesişimi gene çarpımsal olduğundan (bunun kanıtı kolay), tüm çarpımsal kümelerin kesişimi de top-

---

2 $n\times m' + n$, alışageldiği üzere $(n\times m') + n$ anlamına gelmektedir.

lamsaldır, ve elbette bu kesişim en küçük çarpımsal kümedir. En küçük çarpımsal kümeye *Ç* diyelim.

Teorem 3.8. *Her n, $m \in \mathbb{N}$ için, $(n, m, p) \in Ç$ ilişkisini sağlayan bir ve bir tane p vardır. Ayrıca, eğer bu p'ye $n \times m$ adını verirsek, her n ve m için,*

$$n \times 0 = n$$
$$n \times Sm = n \times m + n$$

olur.

Bu teoremin kanıtını okura alıştırma olarak bırakıyoruz. Aynen Teorem 3.1 gibi kanıtlanır.

Teorem 3.1 ile Teorem 3.8'in önermelerinin ve kanıtlarının benzer olmaları bu sonuçların genelleştirilebileceği düşüncesini getirmeli. Nitekim ilerde bu teoremleri genelleştiren Tümevarım Teoremi adı altında (Teorem 3A.1) bir sonuç kanıtlayacağız ve yukardaki teorem (önceki de) bu genel teoremin bir sonucu olacak.

Bilindiği üzere çoğu zaman $n \times m$ yerine $n \cdot m$, hatta çoğu zaman çok daha basit olarak nm yazılır.

3.4. Çarpmanın Özellikleri

Şimdi çarpmayla ilgili savlarımızı kanıtlayabiliriz. Bunun için toplamayı ve toplamanın özelliklerini kullanacağız elbet. Toplamanın özelliklerini Altbölüm 3.2'de kanıtladık. Bunları kullanırken artık referans vermeyeceğiz.

Önsav 3.9 [Yutan Eleman]. *Her $m \in \mathbb{N}$ için,* $0 \times m = 0$.

Kanıt: m üzerine tümevarımla. Başlangıç adımı bariz.

$$0 \times Sm = 0 \times m + 0 = 0 + 0 = 0.$$

İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

Önsav 3.10 [Etkisiz Eleman]. *Her* $m \in \mathbb{N}$ *için*,
$$1 \times m = m = m \times 1.$$
Kanıt: m üzerine tümevarımla. Başlangıç adımı kolay. Tümevarım adımı:
$$1 \times Sm = 1{\times}m + 1 = m + 1 = Sm.$$
İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

Teorem 3.11 [Değişme Özelliği]. *Her* n, $m \in \mathbb{N}$ *için*,
$$n \times m = m \times n.$$
Kanıt: m üzerine tümevarımla kanıtlamaya çalışalım. Başlangıç adımı gene kolay. Tümevarım adımı:
$$n \times Sm = n{\times}m + n = m{\times}n + n = \ldots$$
Başaramadık. En sağdakinin $Sm \times n$'ye eşit olduğunu kanıtlamak istedik ama sonunu getiremedik. Demek ki
$$m{\times}n + n = Sm \times n$$
eşitliğini kanıtlamamız gerekiyor. Sonuçların numaralarına sadık kalmak için bu sonucu "3.10 buçuk" olarak numaralandırıp kanıtlayalım. □

Önsav 3.10,5. *Her* n, $m \in \mathbb{N}$ *için*, $m{\times}n + n = Sm \times n$.

Kanıt: n üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. (Bir defa daha m üzerine tümevarımla kanıtlama çabası başarısızlıkla sonuçlanmaya mahkûmdur.) $n = 0$ için bir zorlukla karşılaşmıyoruz. Şimdi önsavı n için varsayıp Sn için kanıtlayalım. m herhangi bir doğal sayı olsun.
$$\begin{aligned} m{\times}Sn + Sn &= S(m{\times}Sn + n) = S(m{\times}n + m + n) \\ &= S(m{\times}n + n + m) = S(Sm \times n + m) \\ &= Sm \times n + Sm = Sm \times Sn. \end{aligned}$$
İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

Teorem 3.12 [Dağılma Özelliği]. *Her* n, m, $p \in \mathbb{N}$ *için*,
$$n \times (m + p) = n \times m + n \times p.$$
Kanıt: Eğer $p = 0$ ise, her iki tarafta da nm elde ederiz. Şimdi teoremi p için varsayıp Sp için kanıtlayalım:

$$n(m + Sp) = n \cdot S(m + p) = n(m + p) + n$$
$$= nm + np + n = nm + n \cdot Sp.$$

İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

Teorem 3.13 [Birleşme Özelliği]. *Her n, m, $p \in \mathbb{N}$ için,*

$$(n \times m) \times p = m \times (n \times p).$$

Kanıt: p üzerine tümevarımla. Eğer $p = 0$ ise, her iki ifade de 0'a eşittir. Geri kalan kısım da kolay:

$$(n \times m) \times Sp = (n \times m) \times p + (n \times m) = m \times (n \times p).$$

İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

Teorem 3.14 [Sıfırçarpansızlık]. *Her n, $m \in \mathbb{N}$ için $nm = 0$ ise ya n ya da $m = 0$ olur.*

Kanıt: Eğer $m \neq 0$ ise, P1'den dolayı, bir p doğal sayısı için $m = Sp$ olur. Demek ki,

$$0 = nm = n \cdot Sp = np + n.$$

Bir önceki altbölümün Alıştırma 1'ine göre $n = 0$. □

Alıştırma. $\mathbb{N}$'den $\mathbb{N}$'ye giden ve $f(0) = 1$, $f(Sn) = 2f(n)$ eşitliklerini sağlayan bir fonksiyonun varlığını kanıtlayın.

3.5. Sıralama

Tanım. n ve m iki doğal sayı olsun. Eğer $n + p = m$ eşitliğini sağlayan bir p doğal sayısı varsa, o zaman $n \leq m$ yazılır ve bu durumda n, m'den ***küçükeşit*** denir.

$0 + n = n$ olduğundan, her $n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq n$ olur; yani 0, $\mathbb{N}$'nin en küçük elemanıdır.

Eğer $n \leq m$ ise, ama $n \neq m$ ise, bu durumda $n < m$ yazılır ve n, m'den ***mutlak küçük*** denir. Elbette

$$n < m \Leftrightarrow \exists p \neq 0 \ (n + p = m)$$

ve her n doğal sayı için için $n < n + 1 = Sn$.

Teorem 3.15 [Sıralama]. $\leq$ *ilişkisi bir sıralamadır, yani her* $n, m, p \in \mathbb{N}$ *için,*

i. $n \leq n$.

ii. $n \leq m$ *ve* $m \leq n$ *ise* $n = m$.

iii. $n \leq m$ *ve* $m \leq p$ *ise* $n \leq p$.

Kanıt: i belli. ii'yi kanıtlayalım. Varsayımlar altında,

$$n + p = m \text{ ve } m + q = n$$

eşitliklerini sağlayan p ve q sayıları vardır. Buradan,

$$n + (p + q) = (n + p) + q = m + q = n$$

çıkar. Önsav 3.6'ya göre $p + q = 0$. Bölüm 3.1, Alıştırma 1'e göre $p = q = 0$. iii'ün kanıtı daha da kolay: Varsayımlara göre a ve b doğal sayıları için, $n + a = m$ ve $m + b = p$. Demek ki,

$$n + (a + b) = (n + a) + b = m + b = p,$$

yani $n \leq p$. □

Teorem 3.16 [Sıralama]. *Her* $n, m, p \in \mathbb{N}$ *için,*

i. $n \not< n$.

ii. $n < m$ ve $m < p$ *ise* $n < p$.

Kanıt: Bir önceki teoremden ve mutlak eşitsizliğin tanımından çıkar. □

Teorem 3.17 [Tamsıralama]. $\leq$ *ilişkisi bir tamsıralamadır, yani her* $n, m \in \mathbb{N}$ *için, ya* $n \leq m$ *ya da* $m \leq n$ *olur.*

Kanıt: n üzerine tümevarımla. Eğer $n = 0$ ise sorun yok. Şimdi teoremi n için varsayıp Sn için kanıtlayalım. m bir doğal sayı olsun. Eğer $m \leq n$ ise o zaman $m \leq n < Sn$ olur ve sorun kalmaz. Eğer $n < m$ ise, öyle bir $p \neq 0$ vardır ki,

$$n + p = m$$

olur. $p \neq 0$ olduğundan, bir p' için $Sp' = p$ olur. Demek ki,

$$m = n + p = n + Sp' = n + p' + 1 = (n + 1) + p' = Sn + p'.$$

Demek ki $Sn \leq m$. □

Önsav 3.18 [Ayrık Sıralama]. *Her* $n, m \in \mathbb{N}$ *için*,
i. $m < Sn \Leftrightarrow m \leq n$.
ii. $m < n \Leftrightarrow Sm \leq n$.
iii. $m < n < Sm$ *eşitsizliklerini sağlayan bir* n *doğal sayısı yoktur*.

Kanıt: i. $(\Rightarrow)$ $m < Sn$ olduğundan, $m + p = Sn$ eşitliğini sağlayan bir $p \neq 0$ vardır. $p \neq 0$ olduğundan bir $r \in \mathbb{N}$ için,

$$p = Sr$$

ve

$$S(m + r) = m + Sr = m + p = Sn$$

ve $m + r = n$. Demek ki $m \leq n$.

$(\Leftarrow)$ $m \leq n$ ise $n < Sn$ olduğundan, kolaylıkla $m < Sn$ buluruz.

ii. $m < n$ olsun. Demek ki bir $p \neq 0$ doğal sayısı için $m + p = n$. Ama $p \neq 0$ olduğundan bir $r \in \mathbb{N}$ için $p = Sr$ olur. Demek ki

$$n = m + p = m + Sr = m + (r + 1) = (m + 1) + r = Sm + r.$$

Böylece $Sm \leq n$ eşitsizliği kanıtlanmış olur. Diğer yön bariz.

iii. $m < n < Sm$ ise, i ve ii'den $Sm \leq n \leq m$ çıkar, çelişki. □

Son olarak toplama ve çarpmanın sıralamayla olan ilişkilerini irdelemek gerekiyor. Bunların kanıtlarını alıştırma olarak okura bırakıyoruz.

Teorem 3.19 [Toplamaya Saygı]. *Her* $n, m, p \in \mathbb{N}$ *için*, $n < m$ *ancak ve ancak* $n + p < m + p$ *ise*.

Teorem 3.20 [Çarpmaya (bir yere kadar) Saygı]. *Her* $n, m, p \in \mathbb{N}$ *için*, *eğer* $n < m$ *ve* $0 < p$ ise, *o zaman* $n \times p < m \times p$.

Bu altbölümün son teoremi olarak, bu ders notlarında hiçbir işimize yaramayacak, ama bir sonraki ders notlarında önemli olacak bir sonuç kanıtlayacağız. Teoremin kanıtının P1 ve P2'den daha fazlasını, doğal sayının tanımını kullandığına dikkatinizi çekeriz.

Teorem 3.21*. *Her* n, $m \in \mathbb{N}$ *için,*
i. $n \leq m$ *ise* $n \subseteq m$ *olur.*
ii. $n < m$ *ancak ve ancak* $n \in m$ *ise.*
iii. *Her* n *için* $n \notin n$.

Kanıt: i) m üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. Eğer $n \leq m = 0$ ise $n = m = 0$ olmalı. $n = 0 = \emptyset \subseteq \emptyset = 0 = m$ olduğundan bu durumda önerme doğru. Şimdi teoremin m için doğru olduğunu varsayıp Sm için kanıtlayalım. $n \leq Sm$ olsun. Eğer $n = Sm$ ise, elbette $n \subseteq Sm$. Bundan böyle $n < Sm$ olsun. Önsav 3.18'e göre, $n \leq m$ olur. Tümevarım varsayımından $n \subseteq m$ elde ederiz Öte yandan $m \subseteq m \cup \{m\} = Sm$. Demek ki $n \subseteq Sm$.

ii. Eğer $n < m$ ise Önsav 3.18.ii'den $Sn \leq m$ çıkar. Bir paragraf önce kanıtlanan i'den de,
$$n \in n \cup \{n\} = Sn \subseteq m$$
bulunur.

Diğer yönü m üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. $m = 0 = \emptyset$ ise sorun yaratacak bir n bulamayız. Şimdi önermeyi m için varsayıp Sm için kanıtlayalım. $n \in Sm = m \cup \{m\}$ olsun. Eğer $n = m$ ise $n < Sm$ olur ve kanıt biter. Aksi halde $n \in m$ olur ve tümevarımla $n < m$ bulunur; bundan da $n < Sm$ çıkar.

iii. Bir öncekinden ve Teorem 3.16.i'den çıkar. □

Doğal sayılarda mutlak eşitsizliği
$$n < m \Leftrightarrow n \in m$$
olarak da tanımlayabilirdik (bkz. Teorem 3.21.ii). Ama bunu özellikle yapmak istemedik çünkü olabildiğince kümeler kuramından kaçınmak istiyoruz.

3.6. İyisıralama

Geçen altbölümde doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'yi $\leq$ ilişkisiyle tamsıraladık (Teorem 3.15 ve 3.17): H*er* n, m, $p \in \mathbb{N}$ için,

i. $n \leq n$.
ii. $n \leq m$ ve $m \leq n$ ise $n = m$.

iii. $n \leq m$ ve $m \leq p$ ise $n \leq p$.
iv. ya $n \leq m$ veya $m \leq n$ olur.

Bu tamsıralamanın önemli bir özelliği daha vardır: Her doğal sayı kümesinin bir en küçük elemanı vardır, yeter ki küme boş olmasın. İşte o teorem:

Teorem 3.22 [İyisıralama Teoremi]. $\mathbb{N}$'*nin boş olmayan her altkümesinin en küçük elemanı vardır*, *yani* $\leq$ *ilişkisi* $\mathbb{N}$'*yi iyisıralar*.

Kanıt: $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{N}$ olsun.

$$M = \{m \in \mathbb{N} : \text{her } x \in X \text{ için } m \leq x\}$$

olsun. (Yani M, X'in altsınırları kümesi olsun.) Elbette $0 \in M$. Ayrıca $x \in X$ ise, $Sx \notin M$ çünkü ne de olsa Sx, x'ten küçükeşit değil. Demek ki $M \neq \mathbb{N}$. Dolayısıyla P2'den dolayı, öyle bir $m \in M$ vardır ki $Sm \notin M$ olur. $m \in M$ olduğundan, m, X'in her elemanından küçükeşit. Eğer m, S'de olmasaydı, m, X'in her elemanından mutlak küçük olurdu. Demek ki Sm, X'in her elemanından küçükeşit olurdu (Önsav 3.18.ii). Demek ki $Sm \in M$, çelişki. Demek ki $m \in S$. □

Sonuç 3.23. *Eğer bir* $\varphi(n)$ *önermesi bir doğal sayısı için yanlışsa, o zaman* φ'*nin yanlış olduğu en küçük bir doğal sayı vardır.*

Kanıt: Aslında bu sonuç bir önceki teoremin doğrudan bir sonucu. Bunu görmek için, bir önceki teoremde

$$X = \{n \in \mathbb{N} : \neg\varphi(n)\}$$

almak yeterli. □

3.7. Tümevarımla Kanıt

Bu altbölümün konusu olan teoremlerimizi yazmadan ve kanıtlamadan önce Teorem 2.5'i çok daha alışık olduğumuz dilde yazalım.

Teorem 3.24. $\varphi(n)$, *doğal sayılar hakkında bir önerme olsun. Varsayalım ki*

a) $\varphi(0)$ *doğru,*

b) *Her* $\varphi(n)$ *doğru olduğunda* $\varphi(n+1)$ *de doğru.*

O zaman her $n \in \mathbb{N}$ *için* $\varphi(n)$ *doğrudur.*

Kanıt: $Sn = n + 1$ olduğundan bu aynen Teorem 2.5'tir. □

Sonuç 3.23 (ya da isterseniz Teorem 3.22 ama biz Sonuç 3.23'ü tercih ederiz) bize yeni bir kanıt yönteminin kapısını açıyor. Diyelim doğal sayılar hakkında bir $\varphi(n)$ önermesini kanıtlamak istiyoruz. φ'nin her doğal sayı için doğru olmadığını varsayalım. O zaman Sonuç 3.22'ye göre φ'nin doğru olmadığı en küçük bir doğal sayı vardır. Diyelim n, φ'nin doğru olmadığı en küçük doğal sayı. O zaman φ, n'den küçük sayılar için doğrudur ama n için yanlıştır. Bundan bir çelişki elde edilmeye çalışılır. Açıklayalım.

Kanıtlamak istenen önerme, daha önce olduğu gibi sadece n'den küçük tüm doğal sayılar için doğru olduğu varsayılıp, önerme n için kanıtlanır. Eğer bu yapılabilirse, o zaman önerme her n doğal sayısı için doğrudur.

Bu kanıt yöntemi tümevarımla kanıtın bir çeşitlemesidir. Biçimsel olarak bu çeşitlemeyi şöyle ifade ederiz (parantez enflasyonundan dolayı $\varphi(n)$ yerine φn yazdık):

$$[\forall n\ ((\forall i\ (i < n \rightarrow \varphi i) \rightarrow \varphi n))] \rightarrow \forall n\ \varphi n.$$

Bu formülün ne dediğinin anlaşılması zor olduğundan şöyle açıklayalım: Her n doğal sayısı için,

$$(\forall i\ (i < n \rightarrow \varphi i) \rightarrow \varphi n)$$

önermesi doğruysa, o zaman her n doğal sayısı için

$$\varphi n$$

önermesi doğrudur.

Daha popüler (ama matematiksel olmayan) bir dille bu çeşitlemeyi şöyle ifade ederiz: Eğer her n doğal sayısı için,

$$(\varphi(0) \wedge \ldots \wedge \varphi(n-1)) \rightarrow \varphi(n)$$

önermesi doğruysa, o zaman her n doğal sayısı için

$$\varphi(n)$$

önermesi doğrudur.

Bu çeşitlemede başlangıç adımına ihtiyaç yoktur, çünkü $n = 0$ ise, 0'den küçük doğal sayı olmadığından, φ önermesi 0'dan küçük her doğal sayı için doğrudur. Dolayısıyla önerme 0 için de doğrudur.

Bu söylediklerimizi not edelim:

Teorem 3.25 [Tümevarımla Kanıt II]. $\varphi(n)$ *doğal sayılar hakkında bir önerme olsun. Eğer her n doğal sayısı için,*

$$\varphi(0), \ldots, \varphi(n-1)$$

önermeleri doğru olduğunda

$$\varphi(n)$$

önermesi de doğruysa, o zaman $\varphi(n)$ *her n için doğrudur. Daha matematiksel bir deyişle, eğer her n doğal sayısı için, n'den küçük her i doğal sayısı* φ*'yi doğruladığında n de* φ*'yi doğrulanıyorsa, o zaman herdoğal sayı* φ*'yi doğrular. Gene bir başka deyişle, eğer her n için,*

$$(\forall i\ (i < n \to \varphi(i))) \to \varphi(n)$$

önermesi doğruysa, o zaman her n için $\varphi(n)$ *doğrudur.*

Kanıt: $X = \{n \in \mathbb{N} : \varphi(n) \text{ yanlış}\}$ olsun. X'in boşküme olmadığını varsayalım. Teorem 3.22'ye, hatta Sonuç 3.23'e göre X'in en küçük bir elemanı vardır, diyelim n. O zaman n'den küçük hiçbir sayı X'te değil, demek ki n'den küçük her sayı için φ doğru. Ama o zaman da teoremin varsayımına göre $\varphi(n)$ doğrudur. Çelişki. Demek ki X boşküme ve her $n \in \mathbb{N} : \varphi(n)$ doğru. □

Tümevarımla kanıtın bu versiyonunu kullanarak doğal sayılarda kalanlı bölme işleminin (örneğin $23 = 7\times3 + 2$) yapılabileceğini kanıtlayalım.

Teorem 3.26 [Doğal Sayılarda Bölme]. *n ve m iki doğal sayı olsun, ama $m \neq 0$ olsun. O zaman öyle bir ve bir tane q ve r doğal sayı çifti vardır ki, $n = mq + r$ ve $r < m$ olur.*

Kanıt: Önce q ve r doğal sayılarının varlığını kanıtlayalım. Bunu n üzerine tümevarımla (ama tümevarımla kanıt yönteminin ikinci versiyonuyla) kanıtlayacağız. Eğer $n < m$ ise $q = 0$ ve $r = n$ alabiliriz. Şimdi $n \geq m$ olsun ve teoremin n'den küçük sayılar için doğru olduğunu varsayalım. p doğal sayısı $m + p = n$ eşitliğini sağlasın. $p < n$ olduğundan, teorem p için doğru. Demek ki bir q_0 ve $r_0 < m$ doğal sayı çifti için $p = mq_0 + r_0$ eşitliği doğru.

$$n = m + p = m + mq_0 + r_0 = m(q_0 + 1) + r_0.$$

olur. $q = q_0 + 1$ ve $r = r_0$ olsun.

$$n = m(q_0 + 1) + r_0 = mq + r$$

ve

$$r = r_0 < m$$

olur. q ve r'nin varlığını böylece n için de kanıtlamış olduk.

Şimdi q ve r'nin biricikliğini kanıtlayalım. Diyelim

$$mq + r = mq_0 + r_0 \text{ ve } r, r_0 < m.$$

$q = q_0$ ve $r = r_0$ eşitliklerini kanıtlayacağız. $q = q_0$ eşitliğini kanıtlamak yeterli (Teorem 3.7). Diyelim $q < q_0$. O zaman bir $q_1 > 0$ için $q + q_1 = q_0$ olur. Demek ki,

$$mq + r = mq_0 + r_0 = m(q + q_1) + r_0 = mq + mq_1 + r_0$$

ve dolayısıyla

$$r = mq_1 + r_0.$$

$0 < q_1$ olduğundan, $1 \leq q_1$ ve

$$m \leq mq_1 \leq mq_1 + r_0 = r < m$$

olur, ki bariz bir çelişkidir. □