Math 152 Finali
Haziran 2006
Ali Nesin

1. $f(x) = x^3 + 3/x^2 - 4x + \sqrt{x}$ fonksiyonu olsun. Öyle bir $a \in [1, 2]$ sayısı olduğunu gösterin ki tüm $x \in [1, 2]$ sayıları için $f(x) \geq f(a)$ eşitsizliği sağlanır. (4 puan)

2- $f(x) = x^3 - 3/x^2 + 4x + \sqrt{x}$ fonksiyonu olsun. $f(a) = 2$ eşitliğini sağlayan bir $a \in (0, 1]$ saysıı olduğunu kanıtlayın. (4 puan)

3- A ve B kümeleri $\mathbb{R}$'nin üstten sınırlı iki altkümesi olsun ve

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

tanımını yapalım.

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

eşitliğini gösteriniz. (7 puan)

4- (X, d) bir metrik uzay olsun. Tüm $x, y, z \in X$ *için*

$$|d(x, z)| \geq |d(x, y) - d(y, z)|$$

eşitsizliğini gösteriniz. (6 puan)

5- $A \subseteq \mathbb{R}$ altkümesi üstten sınırlı ve kapalı olsun. $\sup A \in A$ olmak zorunda mıdır? (5 puan)

6- (X, d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun.
A kapalıdır $\Leftrightarrow$ A'nın elemanlarından oluşan her yakınsak dizinin limiti A'dadır önermesini kanıtlayın. (10 puan)

7- (X_1, d_1) ve (X_2, d_2) herhangi iki metrik uzay olsun ve $d : X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$'ye

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}$$

olarak tanımlansın.

a. d'nin $X_1 \times X_2$ üzerinde bir metrik tanımladığını gösterin. (4 puan)
b. $((x_n, y_n))_n$ dizisi $X_1 \times X_2$'de bir (a, b) noktasına yakınsaması için $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ dizilerinin sırasıyla a ve b noktalarına yakınsamalarının yeter ve gerek olduğunu kanıtlayın. (6 puan)
c. d metriğinin verdiği $X_1 \times X_2$ üzerindeki topolojinin bu kümedeki çarpım topolojisi olduğunu gösterin. (8 puan)

8- X bir kompakt uzay, Y bir topolojik uzay, $f : X \to Y$ sürekli, birebir ve örten bir fonksiyon olsun. f^{-1} fonksiyonunun da sürekli olduğunu gösterin. (5 puan)

9- (X, d) ve(Y, d) iki metrik uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x \in X$ için f'nin $B(x, \varepsilon)$ yuvarı üzerinde sabit olduğu bir ε é 0 varsa f'ye yerel olarak sabit denir.

a. Sabit olmayan ama yerel olarak sabit bir fonksiyon bulun.(5 puan)
b. Yerel olarak sabit olan bir fonksiyonun sürekli olduğunu gösterin. (6 puan)
c. f'nin yerel sabit ve $c \in Y$ olduğunu varsayalım. $\{x \in X : f(x) = c\}$ kümesinin hem açık hem de kapalı olduğunu gösterin. (6 puan)

d. Eğer X bağlantılı ve f de yerel olarak sabitse f ‘nin de sabit olduğunu gösteriniz. (6 puan)

10- X bir topolojik uzay olsun. $f : X \to \mathbb{R}$ herhangi sürekli bir fonksiyon olsun. Her $c < d < e$ gerçel sayıları için eğer $f(x) = c$ ve $f(y) = d$ olacak şekilde $x, y \in X$ varsa, o zaman $f(z) = d$ eşitliğini sağlayan bir $z \in X$ olduğunu varsayalım. Bu durumda X’in bağlantılı olduğunu gösterin. (8 puan)