

Math 111. Kümeler Kuramı

Telafi Sınavı – Çözümler

Ali Nesin

10 Ekim 2010

X bir küme olsun. X 'in altkümelerinden oluşan bir kümeye – bu kümenin elemanlarına **açık küme denir** – eğer şu koşulları sağlıyorsa X üzerinde bir **topoloji** denir:

T1. $\emptyset$ ve X , X 'in açık altkümeleridir.

T2. X 'in iki açık altkümelerinin kesişimi X 'in gene açık bir altkümesidir.

T3. X 'in açık altkümelerinden oluşan herhangi bir ailenin birleşimi gene X 'in açık bir altkümesidir.

Daha biçimsel olarak, $\wp(X)$ 'in bir τ altkümesine eğer şu koşulları sağlıyorsa X üzerinde bir topoloji denir:

T1. $\emptyset \in \tau$ ve $X \in \tau$.

T2. Eğer $U, V \in \tau$, ise $U \cap V \in \tau$.

T2. Eğer $\sigma \subseteq \tau$, ise $\cup \sigma \in \tau$.

i. $\{\emptyset, X\}$ 'in X üzerine bir topoloji olduğunu gösterin. (2 puan)

Cevap. $\{\emptyset, X\}$ kümesinin T1, T2 ve T3 özelliklerini sağladığını göstermemiz gerekiyor. T1 bariz. T2 and T3, bu durumda, sadece $\{\emptyset, X\}$ kümesi kesişim ve birleşim altında kapalıdır anlamına geliyor. Bu da bariz.

ii. $\wp(X)$ 'in X üzerine bir topoloji olduğunu gösterin. (2 puan)

Cevap. Elbette $\emptyset, X \in \wp(X)$. T2 ve T3 de bariz.

iii. A , X 'in bir altkümesi olsun. $\{\emptyset, A, X\}$ 'in X üzerine bir topoloji olduğunu gösterin. (2 puan)

Cevap. Açık.

iv. A ve B , X 'in iki altkümeleri olsun. X üzerinde A ve B 'yi içeren sonlu bir topoloji bulun. (3 puan)

v. A , B ve C , X 'in üç altkümeleri olsun. X üzerinde A , B ve C 'yi içeren sonlu bir topoloji bulun. Böyle minimal bir topolojinin en fazla kaç elemanı olabilir? (4 puan)

- vi. τ , X üzerinde bir topoloji olsun. $A \subseteq X$ olsun. A 'nın içinde bir en büyük açık küme olduğunu gösterin. Bu kümeyi A° ile göstereceğiz. (6 puan)
- X 'in her A ve B altkümeleri için şunları gösterin:
- Eğer $A \subseteq B$ ise $A^\circ \subseteq B^\circ$. (4 puan)
 - $(A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \cap B^\circ$. (5 puan)
 - $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$. (7 puan)
- vii. Eğer σ ve τ , X üzerinde topolojilerse $\sigma \cap \tau$ kümesinin de X üzerinde bir topoloji olduğunu gösterin. (5 puan)
- viii. Eğer T X üzerinde herhangi topolojiler kümesiye $\cap T$ 'nin de X üzerinde bir topoloji olduğunu gösterin. (3 puan)
- ix. Eğer $\sigma \subseteq \wp(X)$ ise σ 'yi içeren tüm topolojilerin kesişimi $\langle \sigma \rangle$ 'nin, σ 'yi içeren en küçük topoloji olduğunu gösterin. Başka bir deyişle, eğer $A \in \sigma$ ise A , $\langle \sigma \rangle$, topolojisinde açık ve $\langle \sigma \rangle$ bu özelliği sağlayan X üzerindeki en küçük topoloji. Bu topolojiye σ tarafından **gerilen topoloji** denir. (10 puan)
- x. σ , X 'in tek elemanlı altkümelerinin kümesi olsun. $\langle \sigma \rangle$ topolojisini bulun. (3 puan)
- xi. $n \in \mathbb{N}$ olsun. σ de X 'in n elemanlı altkümelerinin kümesi olsun. $\langle \sigma \rangle$ topolojisini bulun. (5 puan)
- xii. σ , X 'in tümleyenli sonlu altkümelerinin kümesi olsun. $\langle \sigma \rangle$ topolojisini bulun. (4 puan)
- xiii. $\sigma \subseteq \wp(X)$ olsun. $[\sigma]$, X 'in şu özelliği sağlayan A altkümelerinin kümesi olsun:

Her $x \in A$ için sonlu sayıda öyle $S_1, \dots, S_n \in \sigma$ var ki
 $x \in S_1 \cap \dots \cap S_n \subseteq U$.

- $[\sigma]$ 'nin X üzerinde bir topoloji olduğunu gösterin. (5 puan)
 - $\langle \sigma \rangle \subseteq [\sigma]$ olduğunu göster. (5 puan)
 - $\langle \sigma \rangle = [\sigma]$ olduğunu göster. (5 puan)
- Yani $U \in \langle \sigma \rangle$ ancak ve ancak her $x \in U$ için öyle sonlu sayıda $S_1, \dots, S_n \in \sigma$ var ki $x \in S_1 \cap \dots \cap S_n \subseteq U$. (15 puan)
- xiv. σ , $\mathbb{R}$ 'nin tüm açık aralıklarından oluşan küme olsun. $\mathbb{R}$ kümesini $\langle \sigma \rangle$ topolojisi altında görelim.
- $\mathbb{R}$ 'nin bir A altkümeleri bu topolojide açık olması için gerek ve yeter şartın her $a \in A$ için $(a - \epsilon, a + \epsilon) \subseteq A$ koşulunu sağlayan bir $\epsilon \in \mathbb{R}^{>0}$ olması olduğunu kanıtlayın. (7 puan)

- b) $\mathbb{R}$ sonlu ve boş olmayan altkümelerinin açık olmadığını kanıtlayın. (2 puan)
- c) $[0, 1)$ kümesinin açık olmadığını kanıtlayın. (3 puan)
- d) Tümleyeni sonlu kümelerin açık olduğunu kanıtlayın. (3 puan)
- d) $\mathbb{Q}$ açık bir küme midir? (3 puan)
- xv. σ_1 , $\mathbb{R}$ 'nin $a \leq b \in \mathbb{R}$ olmak üzere tüm $[a, b)$ formundaki aralıklarının kümesi olsun.
- a. $\langle \sigma \rangle \subset \langle \sigma_1 \rangle$ olduğunu gösterin. (5 puan)
- b. Bu topolojide tek elemanlı bir küme açık olabilir mi? (3 puan)
- c. $[0, 1]$ kümesinin bu topolojide açık olmadığını gösterin. (3 puan)
- xvi. σ_2 , $\mathbb{R}$ 'nin tüm kapalı ve sınırlı aralıklarının kümesi olsun. $\langle \sigma_1 \rangle \subset \langle \sigma_2 \rangle$ olduğunu gösterin. Burada σ_1 , xv numaralı soruda tanımlanan topoloji. (5 puan)