Math 112 Vizesi
Ali Nesin
9 Nisan 2006

1. $X = (0, 1)$ ve $C = \{(1/n, 1) : n = 1, 2, ...\}$ olsun. C'nin herhangi bir sonsuz altkümesinin X'i örttüğünü ve C'nin sonlu altkümelerinin X'i örtemediğini gösterin. (5 puan)

2. $T = [0, 1)$ ve $0 < \varepsilon < 1$ olsun. Ayrıca $C = \{(1/n, 1) : n = 1, 2, ...\} \cup \{(-\varepsilon, \varepsilon)\}$ olsun. C, T'nin sonlu bir alt örtüsüne sahip midir? (5 puan)

3. $S \subseteq \mathbb{R}$ ve C, S'nin herhangi bir açık örtüsü olsun. C'nin S'nin sayılabilir bir altörtüsü olduğunu gösterin. (10 puan)

4. $(x_n)_n$ bir metrik uzayda yakınsak bir dizi ve $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ olsun. O zaman

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$$

kümesinin tıkız olduğunu gösterin. (10 puan)

5. X bir topolojik uzay olsun. Aşağıdaki ifadelerin denk olduğunu kanıtlayın:

a) X tıkızdır.

b) X'in herhangi bir kapalı kümeler topluluğu C için, eğer $\cap C = \varnothing$ ise o zaman öyle $C(1), ..., C(n) \in C$ kümeleri vardır ki $C(1) \cap ... \cap C(n) = \varnothing$ olur. (10 puan)

6. $X \subseteq \mathbb{R}$ olsun. Aşağıdaki ifadelerin denk olduğunu kanıtlayın:

a) X tıkızdır.

b) Eğer $(C(n))_{n\in\mathbb{N}}$ X'in boş olmayan kapalı altkümeler dizisiyse ve her $n \in \mathbb{N}$ $C(n+1) \subseteq C(n)$ oluyorsa, o zaman $\cap_n C(n) \neq \varnothing$ olur. (10 puan)

7. X bir topolojik uzayın altkümesi olsun. X'in herhangi iki ayrık açık altkümesi U ve V için eğer $X \subseteq U \cup V$ ise o zaman ya $X \subseteq U$ ya da $X \subseteq V$ oluyorsa X'e bağlantılı dendiğini hatırlayalım. $\mathbb{R}$'nin bağlantılı altkümelerinin aralıklar (herhangi türde) olduğunu gösterin. (10 puan)

8. $(C_i)_i$'ler bağlantılı kümeler topluluğu olsun öyle ki $C_i \cap C_j \neq \varnothing$ bütün $i \neq j$. O zaman $\cup_i C_i$ bileşiminin de bağlantılı olduğunu gösterin. (10 puan)

9. $S \subseteq \mathbb{R}$ bağlantılı olmayan bir altkümesi olsun, ama $S \cup \{1\}$ bağlantılı olsun. 1'in S'nin limit noktası olduğunu gösterin. (S bir topolojik uzayın altkümesi ve $a \in S$ olsun. Eğer a'yı içeren her açık küme için S a'dan farklı eleman içeriyorsa, a elemanına limit noktası denir.) (10 puan)

10. X bir topolojik uzay ve S de X'in bir altkümesi olsun. Eğer $a \in S$ elemanı için $U \cap S = \{a\}$ eşitliğini sağlayan bir U açık kümesi bulabiliyorsak a'ya S'nin izole noktası denir. $I(S)$ ile S'nin izole noktalarının oluşturduğu kümeyi belirtelim. O zaman, öyle bir topolojik uzay X ve $S \subseteq X$ örnekleri bulun ki $I(S \setminus I(S)) \neq \varnothing$ olsun. (10 puan)

11. İki tıkız topolojik uzayın çarpımının da tıkız olduğunu gösterin. (30 puan)