Kümeler Kuramı Final Sınavı

Ali Nesin

2008

X bir küme olsun. $\wp(X)$, elemanları X'in altkümelerinden oluşan küme olsun. $\tau \subseteq \wp(X)$ olsun ve τ'nun elemanlarına X'in **açık kümeleri** adını verelim. Açık kümeerin şu özellikleri sağladığını varsayalım.

T1. $\varnothing$ ve X açık altkümelerdir.

T2. İki açık altkümenin kesişimi açıktır.

T3. Açık kümelerin birleşiminden oluşan altküme açıktır.

Yani

T1′. $\varnothing \in \tau$ ve $X \in \tau$.

T2′. Eğer $U, V \in \tau$ ise $U \cap V \in \tau$.

T3′. Eğer $\sigma \subseteq \tau$ ise $\cup\sigma \in \tau$.

O zaman (X, τ) çiftine **topolojik uzay** denir. Eğer τ'nun ne olduğu konunun gelişinden belliyse, (X, τ) yerine sadece X topolojik uzayından sözedeceğiz. Aynı küme üzerine değişik topolojiler kurulabileceğine dikkat edin.

Bu arada $\tau \subseteq \wp(X)$ yani $\tau \in \wp(\wp(X))$ olduğunu unutmamak gerekir.

Eğer τ_1 ve τ_2 aynı X kümesi üzerinde topolojiler ve $\tau_1 \subseteq \tau_2$ ise τ_1'in, τ_2'den daha **kaba** ya da τ_2'nin, τ_1'den daha **zengin** ya da daha **ince** bir topoloji olduğu söylenir.

1. X herhangi bir küme olsun.

1a. X üzerinde bütün topolojilerden daha kaba tek bir topoloji olduğunu gösterin (buna X üzerine **en kaba** topoloji denir) (2 pts.)

1b. X üzerinde bütün topolojilerden daha zengin tek bir topoloji olduğunu gösterin (buna X üzerine **ayrık** ya da **en ince** ya da **en zengin** topoloji) (2 pts.)..

1c. Eğer Σ, X üzerine topolojilerden oluşan bir küme ise $\cap\Sigma$ kümesinin de X üzerine bir topoloji olduğunu gösterin. (3 pts.)

1d. Bir X kümesi ve $\tau \subseteq \wp(X)$ verilmiş olsun, X üzerinde τ'yi altküme olarak içeren ve τ'yi içeren bütün topolojilerden daha kaba olan tek bir topoloji olduğunu gösterin. (5 pts.) Bu topolojiye τ ile **gerilmiş** topoloji denir ve bu topoloji $\langle\tau\rangle$ ile gösterilir.

1e. $\tau = \{A, B, C\} \subseteq \wp(X)$ olsun $\langle\tau\rangle$ topolojisinin elemanlarını bulun. (2 pts.)

1f. $\langle\varnothing\rangle$ topolojisinin elemanlarını bulun. (2 pts.)

1g. $\tau \subseteq \wp(X)$ altkümesinin şu özelliği olsun: Her A, $B \in \tau$ için $A \cap B$, τ'nun bazı elemanlarının bileşimidir. $\langle\tau\rangle = \{\cup\sigma : \sigma \subseteq \tau\}$ eşitliğini gösterin.(4 pts.)

1h. $\tau_1 \subseteq \tau_2$ ise $\langle\tau_1\rangle \subseteq \langle\tau_2\rangle$ olduğunu gösterin. (2 pts.)

1i. $\tau \subseteq \wp(X)$ için $\tau_{int} = \{A_1 \cap ... \cap A_n : n \in \mathbb{N}$ ve $A_i \in \tau$ her $i = 1, ..., n\}$ olsun. τ_{int}'in 1g'de belirttiğimiz koşulları sağladığını ve $\langle\tau\rangle = \langle\tau_{int}\rangle$ eşitliğini gösterin.(4 pts.)

2. Y topolojik bir uzay ve X, Y'nin bir altkümesi olsun. X'in bir altkümesi eğer Y'nin bir açık kümesiyle X'in kesişimi olarak yazılabiliyorsa, bu altkümeye ***X*'te açık** ya da ***X*-açık** diyelim. Başka bir deyişle $U \subseteq X$ altkümesi X'te açıktır ancak ve ancak $U = V \cap X$ eşitliğini sağlayan açık bir $V \subseteq Y$ altkümesi varsa. Bu tanımın X'te bir topoloji tanımladığını gösterin. X üzerinde tanımladığımız bu yeni topolojiye **kısıtlanmış topoloji** denir (Y'nin topolojisinden kısıtlanmıs topoloji). (4 pts.)

3. X ve Y topolojik uzaylar olsun. $X \times Y$'nin, sırasıyla X'in ve Y'nin U ve V açık altkümeleri için $U \times V$ biçiminde yazılan altkümelerine ve bunların her türlü bileşimlerine açık diyelim. Böylece $X \times Y$ üzerinde bir topoloji tanımladığımızı gösterin. (3 pts.) $X \times Y$ üzerindeki bu topolojiye **çarpım topolojisi** denir .

4. Bir X topolojik uzayından Y topolojik uzayına giden bir $f : X \to Y$ fonksiyonu alalım. Eğer Y'nin her V açık altkümesi için, $f^{-1}(V)$, X'in açık bir altkümesiyse, f'ye sürekli denir. (Dolayısyla bir $f : X \to Y$ fonksiyonunun sürekli olası X ve Y 'nin topolojilerine bağlıdır.)

4a. X, Y, Z topolojik uzaylar olsun. Eğer $f : X \to Y$ ve $g : Y \to Z$ sürekli fonksiyonlar ise, $g \circ f : X \to Z$ bileşke fonksiyonun da sürekli olduğunu gösterin. (2 pts.)

4b. İki topolojik uzay arasındaki sabit bir fonksiyonun her zaman sürekli olduğunu gösterin. (3 pts.)

4c. X bir topolojik uzay olsun. $\mathrm{Id}_X : X \to X$ fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterin. (Burada tanım ve görüntü kümelerindeki topolojinin aynı olduğu kabul edilmelidir.) (1 pt.)

4d. X en az iki elemanı olan bir küme olsun. Eğer tanım kümesinde en kaba topoloji, değer kümesinde ise en zengin topoloji alınırsa $\mathrm{Id}_X : X \to X$ fonksiyonunun sürekli olmadığını gösterin. (2 pts.)

4e. Y topolojik uzay ve $X \subseteq Y$ olsun. X üzerinde Y'den kısıtlanmış topolojiyi alırsak (bkz #2) $i : X \to Y$, $i(x) = x$ ile verilen fonksiyonun sürekli olduğunu gösterin. (4 pts.)

4f. X ve Y iki topolojik uzay olsun. $X \times Y$ çarpım topolojisini alırsak (see #3)

$$\pi_1 : X \times Y \to X \text{ ve } \pi_2 : X \times Y \to Y$$

izdüşüm fonksiyonlarının sürekli olduğunu gösteriniz. (3 pts.)

4g. Eğer Y üzerinde en kaba topolojiyi alırsak (bkz 1a) herhangi bir topolojik uzaydan Y'ye giden bütün fonksiyonların sürekli olduğunu gösteriniz. (2 pts.)

4h. Eğer X üzerinde ayrık topolojiyi alırsak (bkz 1b) X'ten herhangi bir Y topolojik uzayına giden bütün f fonksiyonlarının sürekli olduğunu gösteriniz. (2 pts.)

4i. X bir küme, Y topolojik bir uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. τ ve τ_1, X üzerinde iki topoloji ve τ_1 de τ'dan daha zengin olsun. X'i τ ile bir topolojik uzay olarak düşündüğümüzde f fonksiyonu sürekli oluyorsa, X'i τ_1 ile bir topolojik uzay olarak düşündüğümüzde de f fonksiyonunun sürekli olacağını gösteriniz. (2 pts.)

4j. X bir küme, Y bir topolojik uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Σ, X üzerinde f fonksiyonunu sürekli yapan bütün topolojilerin kümesi olsun. X'i $\cap\Sigma$ ile bir topolojik uzay olarak düşündüğümüzde f fonksiyonunun sürekli olacağını gösteriniz. (2 pts.)

$$\cap\Sigma = \langle f^{-1}(V) : V, Y\text{'nin açık kümesi}\rangle$$

olduğunu gösteriniz. (6 pts.) Buradan $\cap\Sigma$ topolojisinin X üzerinde f fonksiyonunu sürekli kılan en küçük topoloji olduğunu gösteriniz. (3 pts.)

4k. Y bir topolojik uzay ve $X \subseteq Y$ bir altküme olsun. $i : X \to Y$, $i(x) = x$ ile verilen fonksiyon olsun. τ da X üzerinde i'yi sürekli yapan en küçük topoloji olsun. τ'nın X üzerinde kısıtlanmış topoloji (Y'nin topolojisinden kısıtlanmış topoloji) olduğunu gösteriniz. (8 pts.)

4l. X bir küme, Y bir topolojik uzay ve $\mathcal{F}$ de X 'den Y'ye giden fonksiyonlardan oluşan bir küme olsun. X üzerinde $\mathcal{F}$ 'deki bütün fonksiyonları sürekli yapan bir enküçük topoloji olduğunu gösteriniz. (4 pts.)

4m. X ve Y topolojik uzaylar olsun. $X \times Y$ üzerinde, $\pi_1 : X \times Y \to X$ ve $\pi_2 : X \times Y \to Y$ projeksiyon fonkisyonlarını sürekli yapan en küçük topolojinin $X \times Y$ üzerindeki çarpım topolojisi olduğunu gösteriniz. (bkz #3). (10 pts.)

4n. X bir topolojik uzay, I da bir küme olsun. $\Pi_I X$, I 'dan X'e giden bütün fonksiyonların kümesi olsun. $f \in \Pi_I X$ ve $i \in I$ verildiğinde $\pi_i(f) = f(i)$ olarak tanımlansın. Bu durumda π_i,

$\Pi_I X$ den X 'e bir fonksiyon olur (i'inci projeksiyon fonksiyonu). $\Pi_I X$ üzerindeki bütün projeksiyon fonksiyonlarını sürekli yapan en küçük topolojiyi bulun. (10 pts.)

5. X bir topolojik uzay ve $K \subseteq X$. $(U_i)_{i\in I}$, X'in bir altkümeler ailesi olsun. $K \subseteq \cup_{i\in I} U_i$ içindeliği sağlanıyorsa, $(U_i)_{i\in I}$, ailesine X'in **örtüsü**adı verilir. Eğer her U_i kümesi açık ise **açık örtü**den sözedilir ve eğer I sonluysa **sonlu örtü**den sözedilir. $J \subseteq I$ ise ve $(U_j)_{j\in J}$ hâlâ daha K'nın bir örtüsüyse, $(U_j)_{j\in J}$ örtüsüne $(U_i)_{i\in I}$ örtüsünün altörtüsü denir. Eğer K 'nın her açık örtüsünün sonlu bir altörtüsü varsa,K'ya **tıkız** denir.

5a. Sonlu sayıda tıkız kümenin birleşiminin de tıkız olduğunu gösteriniz. (4 pts.)

5b. Sonlu bir kümenin tıkız olduğunu gösteriniz. (4 pts.)

5c. Eğer $f : X \to Y$ iki topolojik uzay arasında sürekli bir fonksiyonsa X'in her tıkız altkümesinin f altındaki görüntüsünün Y'de tıkız olduğunu gösteriniz . (6 pts.) Y'de tıkız bir altkümesinin f altındaki önimgesi her zaman X 'te tıkız olmak zorunda mıdır? (3 pts.)

5d. C, X topolojik uzayının bir altkümesi olsun. Eğer $X \setminus C$ açık bir kümeyse C'ye **kapalı** denir. Tıkız bir kümenin kapalı bir altkümesinin de tıkız olduğunu gösteriniz. (6 pts.)

5e. Eğer bir topolojik uzay kendi kendisinin tıkız bir altkümesi ise, o topolojik uzaya **tıkız** denir. X bir topolojik uzay, Y de X'in bir altkümesi olsun. Y'nin X'in tıkız bir altkümesi olması için Y'nin kısıtlanmış topoloji ile tıkız olmasının gerekli ve yeterli olduğunu gösteriniz. (bkz #2). (6 pts.)

5f. X ve Y topolojik uzaylar olsun. $X \times Y$ kümesinin çarpım topolojisi ile tıkız olması için (bkz #3) hem X hem de Y nin tıkız olmasının gerekli ve yeterli olduğunu gösteriniz. (10 pts.)