Mat 113
MT 4
Ali Nesin
Aralık 20, 2009

$D \subseteq \mathbb{R}$ bir altküme, $f : D \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in D$ bir eleman olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$x \in D \text{ ve } |x - a| < \delta \text{ ise } |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

önermesini doğru kılan bir $\delta > 0$ varsa o zaman f fonksiyonuna a noktasında ***sürekli*** denir. Tüm $a \in D$ için sürekli olan bir fonksiyona D üzerinde ***sürekli*** denir.

1. $D = \{1/n : n = 1, 2, 3, \ldots\}$ kümesi olsun. D üzerindeki tüm gerçel değerli fonksiyonların sürekli olduğunu gösteriniz. (5 puan.)

2. $D = \{1/n : n = 1, 2, 3, \ldots\} \cup \{0\}$ kümesi olsun. "Gerçel değerli bir f fonksiyonu D üzerinde süreklidir ancak ve ancak $\lim_{n\to\infty} f(1/n) = f(0)$" ifadesini kanıtlayınız. (10 puan.)

3. f ve g fonksiyonları $D \subseteq \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer f ve g fonksiyonları a noktasında sürekli ise, $f + g$ ve fg fonksiyonlarınının da a noktasında sürekli olduğunu gösterin. Burdan da bir polinom tarafından verilen fonksiyonların sürekli olduğunu gösterin. (7 + 8 + 5 puan.)

4. $f : D \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $a \in D$ olsun. Bir $\varepsilon > 0$ için, f fonksiyonunun $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap D$ kümesi üzerinde sınırlı olduğunu kanıtlayın. (10 puan.)

5. $f : D \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $a \in D$ olsun. $f(a) > 0$ olduğunu varsayalım. Bir $\alpha > 0$ ve $\varepsilon > 0$ sayıları için f'nin $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap D$ üzerinde α'dan büyük olduğunu kanıtlayın. (10 puan.)

6. Eğer $f : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve hiçbir zaman 0 değerini almıyorsa, $1/f$ fonksiyonunun da D üzerinde sürekli olduğunu gösterin. (10 puan.)

7. $\exp x = \sum_{n\geq 0} x^n/n!$ fonksiyonunun heryerde sürekli olduğunu gösteriniz . (35 puan.)